

**Gerhard Schickhofer**

**Starrer und nachgiebiger Verbund  
bei geschichteten, flächenhaften Holzstrukturen**

# **Monographic Series TU Graz**

## **Timber Engineering & Technology**

### Series Editors

G. Schickhofer	Institut für Holzbau und Holztechnologie
R. Brandner	Institut für Holzbau und Holztechnologie



**Monographic Series TU Graz**

**Timber Engineering & Technology**

**Volume 1**

**Gerhard Schickhofer**

---

**Starrer und nachgiebiger Verbund  
bei geschichteten, flächenhaften Holzstrukturen**

---

Diese Schrift wurde im Mai 1994 unter dem Titel "Starrer und nachgiebiger Verbund bei geschichteten, flächenhaften Holzstrukturen" als Dissertation an der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Universität Graz eingereicht.

Hauptberichter: R. Pischl (Technische Universität Graz)

Mitberichter: G. Kattinger (Technische Universität Wien)

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek:  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen  
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<http://dnb.ddb.de> abrufbar.

© 2013 Verlag der Technischen Universität Graz

Titelbild                      Wennerbrücke bei St. Georgen, Steiermark / A (Quelle:  
Gerhard Schickhofer)

Layout                        Wolfgang Karl, TU Graz / Universitätsbibliothek

Druck                         TU Graz / Büroservice

Verlag der Technischen Universität Graz

[www.ub.tugraz.at/Verlag](http://www.ub.tugraz.at/Verlag)

ISBN: 978-3-85125-262-0 (print)

ISBN: 978-3-85125-268-2 (e-book)

DOI: 10.3217/978-3-85125-262-0

Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede  
Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne  
Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für  
Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und  
Verarbeitung in elektronischen Systemen.

---

# Starrer und nachgiebiger Verbund bei geschichteten, flächenhaften Holzstrukturen

---

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der technischen Wissenschaften  
ausgeführte Dissertation

eingereicht an der Fakultät für Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Graz

von

Dipl.Ing. Gerhard SCHICKHOFER

Hauptberichter:

o.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.techn. Richard PISCHL

Mitberichter:

o.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.techn. Georg KATTINGER

Graz, im Mai 1994

---



**Mein aufrichtiger Dank gilt**

**o.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.techn.  
Richard GREINER  
Institut für Stahlbau, Holzbau und  
Flächentragwerke  
Technische Universität Graz**

für die Möglichkeit der Erstellung dieser  
Arbeit am genannten Institut

**o.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.techn.  
Richard PISCHL  
Institut für Stahlbau, Holzbau und  
Flächentragwerke  
Ordinariat für Holzbau  
Technische Universität Graz**

für die stets wohlwollende Förderung meiner  
Arbeit und Übernahme des Hauptberichtes

**o.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.techn.  
Georg KATTINGER  
Institut für Tragwerkslehre und  
Ingenieurholzbau  
Technische Universität Wien**

für die Übernahme des Mitberichtes

**Univ.Ass. Dipl.Ing. Dr.techn.  
Werner GUGGENBERGER  
Institut für Stahlbau, Holzbau und  
Flächentragwerke  
Technische Universität Graz**

für die freundschaftliche und kollegiale  
Unterstützung und die vielen themabezogenen  
Diskussionen

**und**

**meiner Familie  
Ursl, Lukas und Nanna**

für das entgegengebrachte Verständnis und die  
Geduld während der letzten Jahre



für Nanna





---

# *Inhalt*

---

---

## Bezeichnungen

---

### 1. Einleitung und Problemstellung

---

#### EINLEITUNG 1-1

Allgemeines 1-1

Flächige Strukturen aus Holz 1-2

Allgemeines 1-2

Ein Schalentragwerk aus Holz 1-2

Die Entwicklung nichtmetallischer Verbundwerkstoffe 1-3

Erkenntnisse für das Bauingenieurwesen 1-4

#### PROBLEMSTELLUNG 1-5

### 2. Stand des Wissens und der Forschung

---

Holz und Faser-Kunststoff-Verbunde 2-1

1D-Modellierung 2-1

2D-Modellierung 2-1

Experimente 2-2

### 3. Umfang und Ziel der Arbeit

---

UMFANG DER ARBEIT 3-1

ZIEL DER ARBEIT 3-2

---

4. Anisotropie von Holz und Faser-Kunststoff-Verbunden

---

DIE ANISOTROPIE DES WERKSTOFFES HOLZ 4-1

Die Anisotropie im Mikrobereich des Holzes 4-1

Die Anisotropie im Makrobereich des Holzes 4-4

Die Anisotropie der Holzwerkstoffe 4-15

Lagenholz 4-18

Schichtholz 4-18

Sperrholz 4-21

DIE ANISOTROPIE VON FASER-KUNSTSTOFF-VERBUNDEN 4-24

Allgemeine Betrachtungen zur Anisotropie von Faser-Kunststoff-Verbunden und die Materialverwandtschaft zum Holz und den Holzwerkstoffen 4-24

Die beiden Hauptkomponenten der Faser-Kunststoff-Verbunde 4-25

Der isotrope Matrixwerkstoff 4-25

Die isotropen und anisotropen Faserwerkstoffe 4-26

Analogien zwischen Holz sowie Holzwerkstoffen und Faser-Kunststoff-Verbunden 4-28

---

5. Kraft-Verschiebungsverhalten einer Stiftverbindung

---

STIFTFÖRMIGE, NACHGIEBIGE VERBINDUNGSTECHNIK 5-1

Einflußfaktoren auf das Tragverhalten eines stiftförmigen Verbindungsmittels - Beeinflussungsgruppen 5-1

Beeinflussungsgruppe Holz 5-1

Beeinflussungsgruppe Stift 5-2

Beeinflussungsgruppe Verbindungscharakteristik 5-2

Beeinflussungsgruppe Belastungsart 5-3

Kraft-Verschiebungsverhalten einer Stiftverbindung 5-3

Beanspruchung parallel zur Faser 5-3

Beanspruchung senkrecht zur Faser 5-4

Beanspruchung schräg zur Faser 5-4

Erläuterung der beiden Modelle 1 und 2 5-5

Modellformulierung einer in der Ebene in einer beliebigen Richtung beanspruchten Stiftverbindung 5-7

Modell 1 5-7

Größe der Beanspruchung 5-7

Richtung der Beanspruchung 5-8

Modell 2 5-8

Größe der Beanspruchung 5-9

Richtung der Beanspruchung 5-9

Vergleich der beiden Interaktionsmodelle 1 und 2 5-9

Zusammenbau zum Gesamtsystem der Verbindung 5-11

Verformungszustände einer Holzverbindung 5-11

Schaumstoffmodell 5-11  
Zusammenbau zum Gesamtsystem der Verbindung für das Modell 2

---

## 6. Modellierung des starren und nachgiebigen Verbundes

---

2D - MODELL EINER GESCHICHTETEN HOLZSTRUKTUR 6-1  
3D - Allgemeines 6-1  
3D - Kinematik 6-2  
3D - Gleichgewicht 6-3  
3D - Stoffgleichungen 6-3  
3D - Stoffgleichungen - Grundfälle elastischer Symmetrie 6-6  
3D - Transformation 6-9  
2D - Modellierung der Einzelschichte ES 6-11  
2D - Kinematik der Einzelschichte ES 6-13  
2D - Gleichgewicht der Einzelschichte ES 6-17  
2D - Stoffgleichungen der Einzelschichte ES 6-21  
2D - Transformation in der Einzelschichte ES 6-22  
2D - Integration über die Schichtdicke  $h$  6-24  
2D - Steifigkeit der Einzelschichte - Einzelschichtsteifigkeitsmatrix  $[K]$  6-29  
2D - Modellierung der Verbundfuge 6-30  
2D - Kinematik der Verbundfuge 6-32  
2D - Gleichgewicht der Verbundfuge 6-35  
2D - Stoffgleichungen der Verbundfuge 6-38  
2D - Transformation in der Verbundfuge 6-38  
2D - Steifigkeit der Fuge - Koppelungsmatrix  $[k]$  6-40  
2D - Zusammenbau 6-42

---

## 7. Geschichtete Holzstrukturen Beispiele: Balken - Platte - Schale

---

BALKEN - VERBUND1D UND PLATTE - VERBUND2D 7-1  
Allgemeines 7-1  
2D - Zusammenbau - siehe Kapitel 6 7-1  
2D - Diskretisierung 7-2  
1D - Beispiele 7-5  
Beispiel 1: Zweiteiliger Verbundquerschnitt 2\*100/160 mm 7-5  
Beispiel 2: Zweiteiliger Verbundquerschnitt 2\*100/160 mm

Variation des Fugenwiderstandes  $c_x$  7-6

Beispiel 3: Vierteiliger Verbundquerschnitt 4\*100/80 mm

Variation des Fugenwiderstandes  $c_x$  7-7

2D - Beispiele 7-11

Belastungssituation 7-11

Einzelschichte ES 7-11

Schichtverbund SV - Geometrie 7-12

Schichtverbund SV - Lagerung 7-12

Verbundfuge 7-12

Beispiel 1: Umfangsgelenkig gelagerte, zweischichtige Platte mit starrer Verbundfuge - Vergleichsberechnung mit ABAQUS Vers. 5.2 mit VERBUND2D 7-12

Beispiel 2: Umfangsgelenkig gelagerte, zweischichtige Platte 4000\*4000 mm Berechnung mit dem Programm ABAQUS Vers. 5.2 und dem Programm VERBUND2D 7-14

DARSTELLUNG DER PROBLEMATIK DURCH WEITERE BEISPIELE 7-23

Beispiel 1: Geschichtete zylinderförmige Holzschale 7-23

Allgemeines 7-23

Versuchsaufbau und Versuchsablauf 7-24

Beispiel 1: Berechnung mit dem Programm ABAQUS Vers. 4.9 und 5.2 Lineare Berechnung und GNL - geometrisch nichtlineare - Berechnung 7-35

---

## 8. Ausblick und Schlußbetrachtung

---

AUSBLICK 8-1

1D - Verbund 8-2

2D - Verbund 8-2

Schalentragwerke aus Holz 8-3

SCHLUSSBETRACHTUNG 8-4

---

## 9. Literatur

---

BÜCHER 9-1

DIPLOMARBEITEN & DISSERTATIONEN 9-2

SEMINARE & FORSCHUNGSBERICHTE 9-3

ZEITSCHRIFTEN 9-3

Holz als Material 9-3

Kunststoff als Material 9-5

Stiftförmige Verbindungstechnik im Holzbau 9-6

2D - Verbund & Plattentheorie 9-7

1D - Verbund 9-8

Schalentragwerke 9-9

1D - Verbund - Verstärkungsmaßnahmen 9-9

Allgemeines 9-10

EDV 9-10

A. Anhang

---

PROGRAMMLISTING VERBUND2D A-1  
PROGRAMMLISTING VERBUND1D A-8  
Reduktion von Verbund 2D A-8  
Programm HOLZBALKEN - Verbund1D A-14

B. Anhang

---

ABAQUS - INPUT-FILES B-1  
Input-File 'plate-254.inp' B-1  
Input-File 'plate-4x4-02.inp' B-4  
Input-File 'cyl-tim-lit3.inp' B-6  
Input-File 'cyl-tim-lit4.inp' B-10



---

# Bezeichnungen

---

## Kapitel 4. Anisotropie von Holz und Faser-Kunststoff-Verbunden

---

$E_{xx} = E_L$	E-Modul in Faserlängsrichtung des Holzes
$E_{yy} = E_T$	E-Modul in Tangentialrichtung des Holzes
$E_{zz} = E_R$	E-Modul in Radialrichtung des Holzes
$G_{xz} = G_{LR}$	G-Modul in der LR-Schnittebene
$G_{xy} = G_{LT}$	G-Modul in der LT-Schnittebene
$G_{yz} = G_{TR}$	G-Modul in der TR-Schnittebene
$\nu_{LT}, \nu_{LR}, \nu_{TR}$	Poisson-Ziffern
$\nu_{TL}, \nu_{RL}, \nu_{RT}$	Poisson-Ziffern

---

## Kapitel 5. Kraft-Verschiebungsverhalten einer Stiftverbindung - Modellierung

---

$C_{  }$	Fugenwiderstandskomponente parallel zur Faser
$C_{\perp}$	Fugenwiderstandskomponente senkrecht zur Faser
$F_{  }$	Kraft parallel zur Faser
$F_{\perp}$	Kraft senkrecht zur Faser
$F_{\beta}$	Kraft schräg zur Faser
$C_{  ,u}, C_{\perp,u}$	Fugenwiderstandskomponenten für die Lamelle unten
$C_{  ,o}, C_{\perp,o}$	Fugenwiderstandskomponenten für die Lamelle oben
$F_{\beta,o}, F_{\beta,u}$	Kraft schräg zur Faser bezüglich oberer und unterer Lamelle
$\beta_o$	Winkel des Lastangriffes schräg zur Faser bezogen auf die obere Lamelle
$\beta_u$	Winkel des Lastangriffes schräg zur Faser bezogen auf die untere Lamelle
$\Delta u_{\gamma,o}, \Delta u_{\gamma,u}$	Differenzverschiebungen zweier Lamellen in der Kontaktfläche
$\Delta u_{\gamma}$	Differenzverschiebung in Abhängigkeit des Winkels $\gamma$

---

## Bezeichnungen

---

$\gamma_o, \gamma_u$	Winkeln der Differenzverschiebungen bezogen auf die obere und untere Lamelle
$\alpha_o, \alpha_u$	Lage der lokalen KOSe für die obere und untere Lamelle bezogen auf das globale KOS
$n$	Nagelungsdichte
$C_{RES}$	Resultierende Fugenwiderstandskomponente

## Kapitel 6. Modellierung des starren und nachgiebigen Verbundes

---

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Verzerrungen - Dehnungen - in den drei Koordinatenrichtungen
$\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$	Verzerrungen in den drei Koordinatenebenen
$u, v, w$	Verformungen in den drei Koordinatenrichtungen
$[G]$	Operatormatrix
$\{u\}$	Verformungsvektor
$\{\epsilon\}$	Verzerrungsvektor
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Spannungen am 3D-Element in den drei Koordinatenrichtungen
$\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$	Spannungen am 3D-Element in den drei Koordinatenebenen
$P_x, P_y, P_z$	Belastungen in den drei Koordinatenrichtungen
$[G^T]$	transponierte Operatormatrix
$\{p\}$	Belastungsvektor
$\{\sigma\}$	Spannungsvektor
$Q_{11}, Q_{12}, \dots$	globale Steifigkeitskomponenten
$Q_{11,L}, Q_{12,L}, \dots$	lokale Steifigkeitskomponenten
$[Q]$	globale Steifigkeitsmatrix
$[Q_L]$	lokale Steifigkeitsmatrix
$C_{11}, C_{12}, \dots$	Nachgiebigkeitskomponenten
$[C]$	Nachgiebigkeitsmatrix
$E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}$	E-Moduli in den drei Koordinatenrichtungen
$G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}$	G-Moduli in den drei Koordinatenebenen
$\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yz} \dots$	Poisson-Ziffern
$\eta_{x,yz}, \eta_{x,xz} \dots$	Rabinovich-Koeffizienten der ersten Art
$\eta_{yz,z}, \eta_{xz,z} \dots$	Rabinovich-Koeffizienten der zweiten Art
$\mu_{xz}, \mu_{yz} \dots$	Chentsov-Koeffizienten
$[T]$	Transformationsmatrix
$[T^T]$	inverse, transponierte Transformationsmatrix
$[B]$	B-Matrix
$\{U\}$	Verformungsvektor für die Einzelschicht ES nach Berücksichtigung der Ansatzfunktion
$N_x, M_x, Q_x \dots$	Schnittlasten der Einzelschicht ES
$\{S\}$	Vektor der Schnittlasten
$\{N\}$	Vektor der Normalkraftbeanspruchung
$\{M\}$	Vektor der Momentenbeanspruchung
$\{Q\}$	Vektor der Querkraftbeanspruchung
$A_{11}, A_{12} \dots$	Dehnsteifigkeitskomponenten
$[A]$	Dehnsteifigkeitsmatrix
$D_{11}, D_{12} \dots$	Biegesteifigkeitskomponenten
$[D]$	Biegesteifigkeitsmatrix



$E_{11}, E_{12} \dots$	Steifigkeitskomponenten der Querkraftbeanspruchungen
$[E]$	Steifigkeitsmatrix der Querkräfte
$h^{k-1}, h^k \dots$	Schichtdicke der Einzelschichten ES k-1 und k
$k_x, k_y$	Schubkorrekturfaktoren
$[B^T]$	transponierte B-Matrix
$[K]$	Einzelschichtsteifigkeitsmatrix
$\Delta u, \Delta v, \Delta w$	Differenzverschiebungen zwischen zwei Einzelschichten ES in der Verbundfuge
$\{\Delta u\}$	Differenzverschiebungsvektor
$\{\Delta u_L\}$	lokaler Differenzverschiebungsvektor
$[T]$	Fugenmatrix
$[T^T]$	transponierte Fugenmatrix
$\{U^{k-1,k}\}$	Verschiebungsvektor angrenzender Einzelschichten ES Einzelschichten ES k-1 und ES k
$\{p^{k-1,k}\}$	Lastvektor der Lastanteile der zu verbindenden Einzelschichten ES
$\{s\}$	Kraftkomponenten in der Verbundfuge
$\{s_L\}$	lokale Kraftkomponenten in der Verbundfuge
$[c]$	Fugenwiderstandsmatrix
$[c_L]$	lokale Fugenwiderstandsmatrix
$[t]$	Transformationsmatrix für die Verbundfuge
$[k]$	Koppelungsmatrix $[k]$

## **Kapitel 7. Geschichtete Holzstrukturen Beispiele**

---

Für die Bezeichnungen des Kapitels 7 sind die Bezeichnungen des Kapitels 6 heranzuziehen. Weitere, im Kapitel 6 nicht enthaltene Parameter, werden direkt im Kapitel 7 beschrieben.



---

# 1. Einleitung und Problemstellung

---

## Einleitung

### Allgemeines

Holz als einer der bekanntesten und dem Menschen vertrautester Werkstoff existiert seit Jahrtausenden. Allerdings wird es nur selten richtig gewürdigt, welch ein hochentwickelter und 'kluger' Baustoff uns da von der Natur zur Verfügung gestellt wird.

J.E. Gordon (1988) [5-2] findet dafür folgende Begründung, welche hier dem Sinne nach wiedergegeben werden soll: *Man kann mit gewisser Sicherheit bis zum heutigen Tag von einem Image-Problem des Baustoffes Holz sprechen. Dies deshalb, da Holz in sehr vielen Anwendungsbereichen verankert war und ist, wobei es in vielen dieser Bereiche kaum eine Weiterentwicklung gab. Ein zu hohes Maß an Traditionalismus verbunden mit dem Verweilen auf vorhandenem Wissen und dies gleichzeitig als ausreichend betrachtend, waren ausschlaggebend für das Image des Holzes der letzten Jahre. Weiters waren es die untergeordneten Anwendungsbereiche die wenig Fachwissen erforderten. Aber auch die Verwendung von Holz in Fachbereichen die mit hoher Handwerkskunst verbunden waren, halfen nicht, Imageprobleme mit denen der Baustoff Holz im wissenschaftlichen Bereich konfrontiert war, zu beseitigen. Man hat es in diesen Bereichen verabsäumt, die vorhandene Kunst durch notwendige fundierte wissenschaftliche Tätigkeit zu untermauern. Grund dafür war und ist auch das Fehlen des intensiven Studiums des Werkstoffes Holz durch Materialwissenschaftler und Ingenieure. Die Vielfalt der Anwendungsbereiche haben dem Holz allerdings nicht geholfen diesem von der Natur hochentwickelten Baustoff eine größere Würdigung entgegenzubringen.*

Holz ist zweifelsfrei das am reichlichsten vorkommende und gleichzeitig zweckmäßigste Baumaterial der Welt. Die weltweite Holzproduktion liegt bei zirka 2400 Millionen Tonnen Holz im Jahr, wobei etwa 1000 Millionen Tonnen im Industrie-

bereich als Rundholz für die Weiterverarbeitung Verwendung finden - Quelle: A.P. Schniewind (1989) [14].

Holz ist ein natürliches Produkt und besitzt eine enorme Artenvielfalt. Diese Artenvielfalt stellt einen enormen Vorteil dar, der aber erst genutzt werden muß. Bedenkt man, daß es weltweit an die 30000 Holzarten gibt, so kann man sich gut vorstellen, welche Variabilität in den Holzeigenschaften uns hier von der Natur zur Verfügung gestellt wird. Nur ein Bruchteil dieser Holzartenvielfalt kann wirtschaftlich genutzt werden. Wie auch immer, damit ist es möglich, je nach Anwendungsbereich, die dafür best geeignete Holzart zu wählen.

Holz ist ein hoch anisotropes Material, das heißt, das Materialverhalten ist richtungsabhängig. Die Hauptmaterialrichtungen im Holz lassen sich in Längsrichtung, Radialrichtung und Tangentialrichtung unterscheiden. Die Längsrichtung ist parallel zum Baumstamm bzw. parallel zur Faserrichtung. Die Radialrichtung ist normal und die Tangentialrichtung ist tangential zu den Wachstumsringen eines Stammquerschnittes. Beide, Radial- als auch Tangentialrichtung, sind normal zu den Fasern. Die Festigkeit und Steifigkeit von Holz ist am höchsten in Faserrichtung und am niedrigsten senkrecht zur Faser. Die Verhältniszahl all dieser Werkstoffeigenschaften zwischen Faserrichtung und quer zur Faser liegt in der Größenordnung von etwa 5:1 bis etwa 25:1. Der Grad der Anisotropie ist demzufolge extrem hoch.

### Flächige Strukturen aus Holz

#### Allgemeines

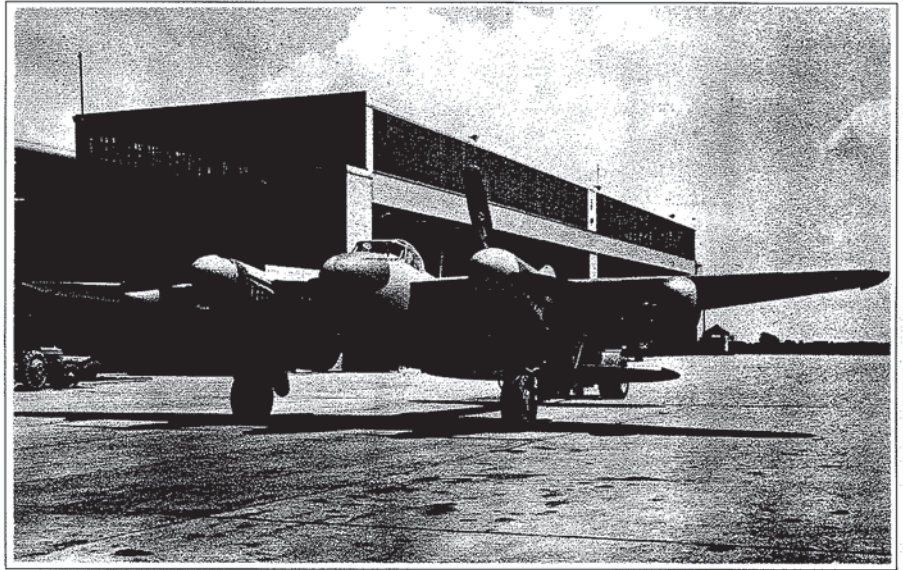
Die Verwendung von Holz im Bauwesen reicht sehr weit in die Geschichte zurück. Heute findet der Baustoff Holz in vielen Bereichen des Bauingenieurwesens Verwendung. Das Anwendungsgebiet reicht von einfachen Bauwerken über Hallen-tragwerke, mehrgeschoßigen Bauwerken sowie Brückentragwerken bis hin zu leichten Schalenkonstruktionen aus Holz. Das heißt, Holz ist nicht nur geeignet für ebene und räumliche Stabtragwerke - die natürlichen Wachstumsbedingungen führen ja direkt zum stabförmigen Bauteil, sondern auch unter Heranziehung von Holzwerkstoffen - in der Regel aus Furnieren gebildet - für flächenhafte Holzkonstruktionen. Flächenhafte Holzkonstruktionen können aus einer beliebigen Anzahl von Holzschichten aufgebaut sein. Diese können untereinander verleimt - quasi starrer Verbund - oder mechanisch durch eine Nagelung - nachgiebiger Verbund - verbunden sein. In den Bildern 4.23 und 4.24 ist der dementsprechende Aufbau derartiger flächiger Holzstrukturen dargestellt.

#### Ein Schalentragwerk aus Holz

Ein aus der Geschichte bekannter Anwendungsbereich von Schalentragwerken aus Holz war der Bau von Flugzeugen. Eines der bekanntesten Fluggeräte des 2. Weltkrieges war der von den Engländern gebaute de Havilland Mosquito Bomber. Im Bild 1.1 ist dieser doch außergewöhnliche Anwendungsbereich dargestellt. 7781 dieser Bomber waren im 2. Weltkrieg im Einsatz. Weitere 5000 leichte Fluggleiter aus Holz waren während der Invasion in der Normandie im Jahre 1944 im 2. Weltkrieg im Einsatz - Quelle: J.E. Gordon (1988) [5-2]. Warum das hier erwähnt wird



hat folgenden Grund. Betrachtet man die geschichtliche Entwicklung der Verwendung von Verbundmaterialien im Flugzeugbau, so stößt man unweigerlich auf den Werkstoff Holz als ein natürlicher faseriger Werkstoff, dessen Matrix vereinfachend das Lignin darstellt.



**Bild 1.1**

Ein Schalentragwerk aus Holz - Fluggerät des 2. Weltkrieges

Ein kurzer historischer Überblick soll den Weg der faserigen Werkstoffe und ihre Verwendung, allen voran der Flugzeugbau, aufzeigen. Den vor allem die Bereiche des Leichtbaues sind auch für den Werkstoff Holz als Werkstoff mit geringem Gewicht von Interesse.

### **Die Entwicklung nichtmetallischer Verbundwerkstoffe**

1936 und 1937 begannen N.A. de Bruyne, W.D. Douglas sowie J.E. Gordon mit der Entwicklung neuer nichtmetallischer Verbundwerkstoffe. Das unter dem Namen 'Gordon-Aerolite' bekannte Material ist ein unidirektionaler Verbundwerkstoff, wobei die tragende Funktion die in einer Phenolharzmatrix eingebetteten Flachsfasern übernehmen. Die Zugfestigkeit der Flachsfasern liegt bei 690 MPa und der E-Modul bei 103 GPa - P. McMullen (1984) [55]. J.E. Gordon erkannte sehr bald, daß diese Materialien ausgezeichnet geeignet waren für die Produktion von industriell vorgefertigten Schalenelementen für den Flugzeugbau.

Das Wesen der Verbundwerkstoffe liegt darin, ein hochfestes Material als 'Bewehrung' für ein weniger tragfähiges Material zu verwenden, oder Materialien zu kombinieren, die einander mit ihrer jeweiligen spezifischen Werkstoffeigenschaften ergänzen. Gordon war auch der erste, der die Wichtigkeit der Faserorientierung erkannte. Er wies darauf hin, daß nur dann werkstoffgerecht konstruiert werden würde, wenn die auf ein Bauteil wirkenden Belastungen durch geeignete, in Lage und Anzahl optimierte, Schichten übernommen und abgetragen werden können. Dieses Fasermaterial und weitere Materialien wie z.B.: Hanffasern wurden hauptsächlich im Versuchswesen erprobt. Eine wesentliche Rolle spielten allerdings Holzfasern in Form eines hochfesten Papiers, welches als 'Bewehrung' Verwendung fand. Als

Matrix diente Knochenleim und Stärkeleim. Später wurde das Papier mit Phenolharz vorimprägniert. Während des Krieges wurde dieser Verbundwerkstoff - Cellulose Fibre Composites - CFC - mit Erfolg im Flugzeugbau eingesetzt. Allerdings wurden bei den ersten Anwendungen die hygroskopischen Eigenschaften der Naturfasern unterschätzt. Trotzdem war die Arbeit mit CFC ein wesentlicher Beginn für das Verstehen des Einflusses der Faserorientierung und der Wichtigkeit, allen Herstellungsbedingungen gerecht zu werden.

Gleichzeitige und weiterführende Forschungstätigkeiten führten schließlich zu den heute bekannten Verbundwerkstoffen. Heute ist meines Erachtens eine Einteilung in verschiedene Anwendungsbereiche erforderlich, da hier die jeweiligen material-spezifischen Eigenschaften dieser vielfältigen Werkstoffgruppe bestimmend für die Anwendungen sind. So hat man es einerseits mit den hochentwickelten Faser-Kunststoff-Verbunden zu tun, deren Anwendungsbereiche sehr vielfältig sind. Ein wesentlicher Bereich sind Flächentragwerke, vor allem im Bereich der Flugzeug-technik und der Raumfahrt, wobei die Gewichtsersparnis die wesentlichste Rolle spielt. Fasern die hier als sogenannte Bewehrung eingesetzt werden sind z.B.: Glasfasern (G), Kohlefasern (C), Aramidfasern (A) usw. Als Matrixwerkstoffe in der diese Fasern eingebettet sind kennt man vor allem Thermoplaste und Duroplaste.

### **Erkenntnisse für das Bauingenieurwesen**

Betrachtet man nun den Bereich des Bauingenieurwesens, so ist klar, daß die eben erwähnten Materialien keinen bestimmenden Faktor im Baugeschehen spielen. Allerdings lassen sich aus den gewonnenen Erkenntnissen wiederum zahlreiche Schlüsse für flächige Konstruktionen, vor allem im Bezug auf den Werkstoff Holz ziehen. Hat man vor etwa 50 Jahren wichtige Schlüsse aus der Verwendung von Cellulosefasern für die heutigen Kunststoffe erzielen können, so ist es heute gerade umgekehrt. Begibt man sich auf das bislang kaum erforschte Gebiet der flächigen Strukturen aus Holz, so wird es einem nicht erspart bleiben, einen scheinbaren Umweg über das Gebiet der faserverstärkten Kunststoffe zu nehmen, um ein vollkommenes Verständnis über mehrfach geschichtete Holzkonstruktionen zu erlangen. Immerhin hat man es auch hier mit einer Anzahl von Schichten zu tun, die zueinander verschieden orientiert sein können und im Normalfall auch sind, und die miteinander nachgiebig oder starr verbunden sind. Im Bereich der flächigen Holzkonstruktionen sind nur wenige Forschungsarbeiten bekannt. Zum größten Teil handelt es sich um Arbeiten im Bereich des starren Verbundes, d.h.: man hat es mit einem Teil der sogenannten Holzwerkstoffe zu tun, die damit mechanisch beschreibbar sind. Der Anwendungsbereich dieser Werkstoffe ist vielfältig und sicherlich noch weiter ausbaubar. Zahlreich bekannte und vielfältige Anwendungen aus Amerika, Kanada, Australien und Neuseeland lassen sich mit mehr oder weniger notwendigen Überarbeitungen auch für den europäischen Raum umsetzen. Alle bekannten Holzwerkstoffe werden in Plattenform geliefert und eventuell zu bestimmt geformten Endprodukten weiterverarbeitet.

Innovationen in diesem Industriebereich könnten meiner Meinung nach neben flächenhaften Strukturen vor allem einfach gekrümmte und eventuell auch doppelt gekrümmte geschichtete Schalenelemente sein, die aus transport- und montagetechnischen Gründen eine bestimmte Größe nicht überschreiten dürfen.



Anwendungsbereiche für diese Einzelemente im Baubereich könnten aus Segmenten zusammengesetzte leichte Hallenüberdachungen sein oder Deckenkonzeptionen, eventuell auch im Verbund mit anderen Werkstoffen.

## Problemstellung

---

Eine besondere Möglichkeit Schalentragerwerke aus Holz auszubilden, liegt darin, mit einzelnen Holzlamellen flächige Strukturen zu formen. Die damit entstehenden Schichten können einerseits miteinander verleimt oder andererseits nachgiebig miteinander, mittels mechanischer Verbindungstechnik, verbunden werden. Abgesehen von montage- und herstellungstechnischen Bedingungen sind damit großflächige und stützenfreie Überdachungskonstruktionen möglich.

Betrachtet man eine flächige Holzstruktur, wobei die einzelnen Schichten starr miteinander verbunden sind - starrer Verbund - so stellt sich vor allem die Frage, welche Modellvorstellung zur Berechnung solcher Strukturen zugrunde zu legen ist. Im weiteren ist es notwendig, den Grenzfall des starren Verbundes in die allgemeine Problematik der nachgiebig verbundenen, geschichteten Holzkonstruktionen einzubinden.

Die eben erwähnte Problematik ist nun auf die folgenden Bauteilgeometrieformen zu übertragen.

- **1D - BALKEN**  
Die Problematik des mehrteiligen, geschichteten Balkens ergibt sich aus der Reduktion der 2D-Problematik, d.h., daß es sich hierbei um einen Grenzfall der geschichteten, flächigen Platte handelt.
- **2D - PLATTE und SCHEIBE**  
Ebene Strukturen aus Holz ergeben sich, wenn man entweder mit dünnen Schichten aus Furnieren ein plattenförmiges Bauteil aufbaut oder, wie bereits erwähnt, eine geschichtete, flächige Struktur aus Brettlamellen. Es ist vor allem von Interesse, eine allgemein gültige Formulierung für das Problem der nachgiebig verbundenen, geschichteten, flächigen Holzstruktur zu finden.
- **SCHALE**  
Prinzipiell sind für eine geschichtete Schale die selben Problempunkte von Bedeutung wie für die ebene Struktur. Man muß hier allerdings - wie auch bei den Platten - unterscheiden zwischen Strukturen aus Holzwerkstoffen, aufgebaut aus Furnierschichten - starrer Verbund - und Schalentragerwerken, aufgebaut aus geschichtet angeordneten Brettlamellen - starrer und nachgiebiger Verbund.

Der Aufbau einer geschichteten, flächigen Struktur aus Furnierschichten erfolgt zumeist aus einer beliebigen, ungeraden Anzahl von Einzelschichten ES. Bei Verwendung von Brettlamellen für den Aufbau hat man es zumeist mit zwei bis fünf Einzelschichten ES zu tun, wobei auch hier eine größere Anzahl von Einzelschichten ES möglich ist.

Das Problem der Modellierung der Verbundfuge und der Einbau in das Tragmodell ist eines der wesentlichsten Kriterien zur Erfassung der Gesamtprobatik. Zudem sollte dieses Modell für eine starre und nachgiebige Verbundfuge anwendbar sein.





---

## 2. Stand des Wissens und der Forschung

---

### **Holz und Faser-Kunststoff-Verbunde**

In diesem Bereich ist es von Bedeutung, das Materialverhalten der Faser-Kunststoff-Verbunde zu durchleuchten. Dies passiert in den Arbeiten [47] bis [63]. Weiters ist die Arbeit von S.W. Tsai und H.T. Hahn (1980) [16] und von K. Moser (1992) [11] sowie von R.M. Christensen (1991) [2] zu erwähnen, die sich vor allem mit der Mechanik der Verbundmaterialien befassen. Um eine Gegenüberstellung von Faser-Kunststoff-Verbunden und Holz zu erreichen, ist es notwendig, das Materialverhalten des Werkstoffes Holz in den Arbeiten [32] bis [46] zu kennen.

### **1D-Modellierung**

Im Bereich des elastischen Verbundes für den Balken sind eine Vielzahl von Arbeiten bekannt. J. Natterer und M. Hoelt (1987) [30] geben in ihrem Forschungsbericht zum Thema des Tragverhaltens von Holz-Beton-Verbundkonstruktionen einen ausführlichen Überblick über die Forschungstätigkeiten der letzten Jahrzehnte im Bereich zusammengesetzter Biegeträger mit elastischem Verbund. Jüngere Arbeiten, wie z.B. die Arbeiten von R. Kneidl (1991) [19] und B. Norlin (1993) [22] stellen einen Beitrag zu nichtlinearen Berechnungen von Schichtbalkensystemen dar. Es geht vor allem darum, die Nichtlinearität des Last-Verschiebungsverhaltens der mechanischen Verbindungstechnik in der Verbundfuge zu berücksichtigen. Als weitere Arbeiten zum Thema des 1D-Verbundes sind die Arbeiten von D.R. Bohnhoff, S.M. Cramer, R.C. Moody, C.O. Cramer (1989) [99] sowie von U.A. Girhammar, V.K.A. Gopu (1993) [100] zu erwähnen. Zu diesem Thema sind auch die Arbeiten [99] bis [105] zu zählen.

### **2D-Modellierung**

Für die 2D-Formulierung einer mehrschichtig aufgebauten Holzstruktur ist die Ausbildung der Verbundfuge von wesentlicher Bedeutung. Für den starren Verbund

sind einige Arbeiten bekannt, vor allem Untersuchungen, welche sich mit dem Verhalten der plattenförmigen Holzwerkstoffe - Schichtholz - beschäftigen. Zu erwähnen ist hier die Arbeit von J. McGlenn und B.J. Hartz (1968) [93] über die Anwendung der FE-Methode bei der Berechnung von Furnierschichtholzplatten. Die gute Übereinstimmung mit den Experimenten bestätigen diese Arbeit. Weitere Arbeiten, die den 2D-Verbund - starr - und das Verhalten der anisotropen Platte zum Inhalt haben, sind die Arbeiten [88] bis [98]. In diesem Zusammenhang ist es von Bedeutung, das analoge Verhalten der Faser-Kunststoff-Verbunde zu erkennen. Vor allem die Arbeit von H. Lehar (1985) [20] in der es um die numerische Behandlung ebener, anisotroper Schichtverbunde mittels der FE-Methode geht, sei an dieser Stelle erwähnt.

### **Experimente**

Im Bereich der experimentellen Forschung sind begleitend zu den theoretischen Untersuchungen für den 1D-Verbund zahlreiche Versuchsserien gelaufen - siehe Literatur. Für die Situation der 2D-Modellierung sind vor allem Versuche bekannt, welche sich auf den starren Verbund - Holzwerkstoffe - beziehen. Im Bereich der flächigen Holzstrukturen sind zwar auch bestimmte Versuche in der Literatur, vor allem Schalentragwerke betreffend, zu finden. Allerdings fehlt eine befriedigende Modellbildung und theoretisch fundierte Lösung nicht nur für nachgiebig verbundene, ebene Holzstrukturen, sondern auch für allgemein flächige Holzkonstruktionen.

---

# 3.

## Umfang und Ziel der Arbeit

---

### Umfang der Arbeit

---

Die Arbeit gliedert sich in 9 Kapitel und in den Anhang A und Anhang B. Im folgenden wird kurz der Inhalt der einzelnen Kapitel beschrieben, wobei mit Kapitel 4 begonnen wird.

- **Kapitel 4 - Anisotropie von Holz und Faser-Kunststoff-Verbunden**  
In diesem Kapitel wird auf das Material Holz näher eingegangen. Es wird vor allem die Richtungsabhängigkeit der Materialkennwerte hervorgehoben. Bereits bei der mikroskopischen Betrachtung einer Holzfaser läßt sich dieser richtungsabhängige Aufbau des Holzes - Anisotropie - erkennen. Dieser Aufbau setzt sich im makroskopischen Bereich fort und bestimmt das Verhalten des Werkstoffes Holz. Beginnend mit dem 3D-Element wird schließlich die Anisotropie für ebene Bauteile - Holzwerkstoffe und im besonderen Sperrholz - betrachtet. Ebenso werden für einige Holzarten aus verschiedenen Versuchsserien stammende Materialkennwerte für den anisotropen Werkstoff angegeben. Weiters wird auf Faser-Kunststoff-Verbunde eingegangen. Wichtige Analogie-betrachtungen zwischen geschichteten Holzwerkstoffen und Faser-Kunststoff-Verbunden schließen dieses Kapitel ab.
- **Kapitel 5 - Kraft-Verschiebungsverhalten einer Stiftverbindung - Modellierung**  
Es werden die maßgebenden Beeinflussungsfaktoren für eine stiftförmige Verbindung erläutert. Ausgehend von Stiftbeanspruchungen parallel und senkrecht zur Faser wird auf zwei Modelle eingegangen, welche eine Interaktion bei einer Beanspruchung schräg zur Faser erlauben. Diese Interaktionsmodelle werden benötigt, um für verschieden orientierte, benachbarte Einzelschichten ES die 2D-Stoffgleichungen der Verbundfuge zu formulieren.
- **Kapitel 6 - Modellierung des starren und nachgiebigen Verbundes**  
In diesem Kapitel wird das 2D-Modell einer geschichteten Holzstruktur behandelt. Beginnend mit den 3D-Bestimmungsgleichungen wird vor allem die mechanische Beschreibung der Anisotropie hervorgehoben. Mit der Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion für die Verschiebungen erhält man die 2D-Bestim-



mungsgleichungen für die Einzelschichte ES. Weiters wird das Modell zur Ermittlung der 2D-Bestimmungsgleichungen für die Verbundfuge erläutert. Damit ist es möglich, sowohl die starre Verbundfuge - hier ergibt sich wiederum die Analogie zu den Faser-Kunststoff-Verbunden - als auch die nachgiebige Verbundfuge zu beschreiben. Der 2D-Zusammenbau der beiden Einzelemente - Einzelschichten ES und Verbundfugen - zum Schichtverbund SV schließt dieses Kapitel ab. Es entsteht somit ein Gleichungssystem mit dem es möglich ist, daß Verhalten des Schichtverbundes SV zu beschreiben.

- **Kapitel 7 - Geschichtete Holzstrukturen Beispiele: Balken - Platte - Schale**  
In diesem Kapitel erfolgt die Umsetzung der im Kapitel 6 gefundenen theoretischen Erkenntnisse des Schichtverbundes SV. Die Diskretisierung für eine numerische Lösung erfolgt mittels trigonometrischem Reihenansatz. Mit dem im Anhang A enthaltenen und auf Basis der genannten Diskretisierung erstellten Programme VERBUND1D und VERBUND2D werden Beispiele zum Kapitel 6 gerechnet. Die Ergebnisse für den geschichteten Balken - 1D - ergeben sich aus der Reduktion der 2D-Gleichungen. Für den geschichteten Balken sind zwei Beispiele enthalten, wobei für den zweiteiligen Balken eine Kontrolle der Programmresultate mit bekannten internationalen Forschungsarbeiten durchgeführt wird. Ebenso werden für die 2D-Problematik Beispiele gerechnet. Auch hier ist es primär notwendig, die Richtigkeit des Modelles bzw. der Programmresultate zu kontrollieren. Weiters wird für eine zweischichtige Platte die Nachgiebigkeit in der Verbundfuge variiert. Abschließend wird mit dem Programm ABAQUS eine Holzzyinderschale untersucht.

### Ziel der Arbeit

---

Primäres Ziel der Arbeit ist es, den Bereich der flächigen Strukturen im Holzbau aufzubereiten. Spricht man von flächigen Strukturen aus Holz, so hat man es meist mit einer bestimmten Anzahl von Einzelschichten ES zu tun, welche miteinander starr oder nachgiebig verbunden den flächenhaften Schichtverbund SV ergeben.

Betrachtet man den starren Verbund zwischen den Einzelschichten ES, so soll diese Arbeit eine Modellvorstellung anbieten - eine Analogie zu **Faser-Kunststoff-Verbunden** - um damit mit vorhandenen FE-Programmen geschichtete Strukturen beliebiger Form berechnen zu können. Diese Analogiebetrachtung und Abklärung der Richtigkeit dieser Modellvorstellung für flächige Strukturen aus Holz ist deshalb von Wichtigkeit, da die meisten leistungsfähigen FE-Programme mit Elementtypen ausgestattet sind, die einen Schichtaufbau - für **FKV** - erlauben.

Andererseits hat man es mit nachgiebig verbundenen, geschichteten, flächigen Holzstrukturen zu tun. Vor allem bei großflächigen Strukturen - z.B. geschichtete Schalenträgerwerke - kann es aus transporttechnischen Gründen problematisch werden, einen starren Verbund - Fertigung im Werk durch Verleimung - auszubilden. Bei großflächigen Holzstrukturen hat man es dann mit nachgiebig verbundenen Einzelschichten ES zu tun. Ziel dieser Arbeit ist es, die Nachgiebigkeit der Verbundfuge durch ein mechanisches Modell zu erfassen und in ein Berechnungsprogramm zu kleiden. In dieser Arbeit soll das elastische Verhalten der geschichteten, ebenen Holzstruktur mit nachgiebiger Verbundfuge behandelt werden.

---

# 4. Anisotropie von Holz und Faser-Kunststoff- Verbunden

---

## **Die Anisotropie des Werkstoffes Holz**

---

### **Die Anisotropie im Mikrobereich des Holzes**

Für viele Anwendungsbereiche von Holz und Holzwerkstoffen ist es meines Erachtens wichtig, den Werkstoff Holz in seinem strukturellen Aufbau zu verstehen und vor allem, welchen Aufgaben den einzelnen chemischen Bestandteilen des Holzes bei Beanspruchung zufällt. Ähnlich den vielen industriell gefertigten mehrphasigen Materialien, wie zum Beispiel den unidirektionalen Kunststoffen, haben einige Komponenten in der Holzzellwand die Aufgabe die Tragstruktur zu bilden. Man könnte diese Komponenten auch als Bewehrung bezeichnen. Wiederum andere Bestandteile haben die Aufgabe, diese 'Bewehrung' zu tragen, d.h. in die als Matrix bezeichnete Masse einzubetten.

Holz ist ein Verbundmaterial, bestehend aus den folgenden drei Hauptpolymeren: Zellulose, Hemizellulose und Lignin.

Die Sekundärwand besteht generell aus drei Einzelschichten. Es handelt sich dabei auch um den Bereich, in dem die Zellen produziert werden. Die dünnere Primärzellwand enthält all die Substanzen, die eine Biosynthese ermöglichen bzw. zwischen den drei erwähnten chemischen Hauptbestandteilen des Holzes - Zellulose, Hemizellulose und Lignin unterstützen können. Zellulose tritt in Form von langen Fasern auf. Sie bilden die tragende Struktur der Sekundärwand der Holzzellwand und sind eng und dicht gepackt in den verschiedenen orientierten Schichten zu finden. Die sekundäre Wand kann dem Aufbau entsprechend auch mit einem Schichtholz verglichen werden. Die Unterteilung der Sekundärzellwand erfolgt folgendermaßen. Die äußerste Schicht S1 stellt auch die Trennschicht zur Primärwand dar. Die Schichtorientierung ist nahezu rechtwinkelig zur Holzzellenlängsachse. Die mittlere Schichte S2 ist am stärksten ausgebildet und die Orientierung dieser Schicht verläuft annähernd parallel zur Holzzellenlängsachse. Die innerste Schichte S3 der Se-



kundärwand ist ebenfalls wie die Schichte S1 nahezu senkrecht zur Längsachse orientiert. Im Bild 4.1 ist der Aufbau der Schicht S2 der Sekundärzellwand dargestellt.

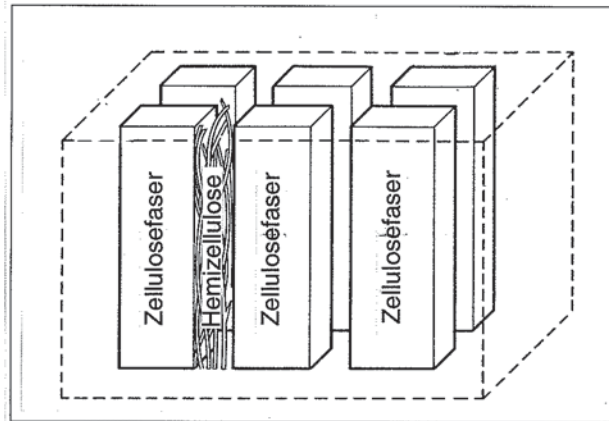


Bild 4.1

Darstellung der Zellulosefasern und der Hemizellulosefasern im Bereich der Schicht S2 der Holzzellwand

Die längsorientierten, kristallinen Zellulosefasern bilden die feste tragende Materialsubstanz in dieser Schichte. Zirka 42 % dieser kristallinen, wasserbeständigen Substanz sind in den Holzzellwänden zu finden. Kurze, weniger kristalline Hemizellulosefasern, die ebenfalls eine gewisse Orientierung aufweisen, bilden die fasrige Matrix zwischen der Haupttragstruktur der Zellulose-Mikrofasern. Diese Hemizellulosefasern bilden somit die polymere Matrix, dessen Aufgabe es ist, die Tragstruktur zu binden.

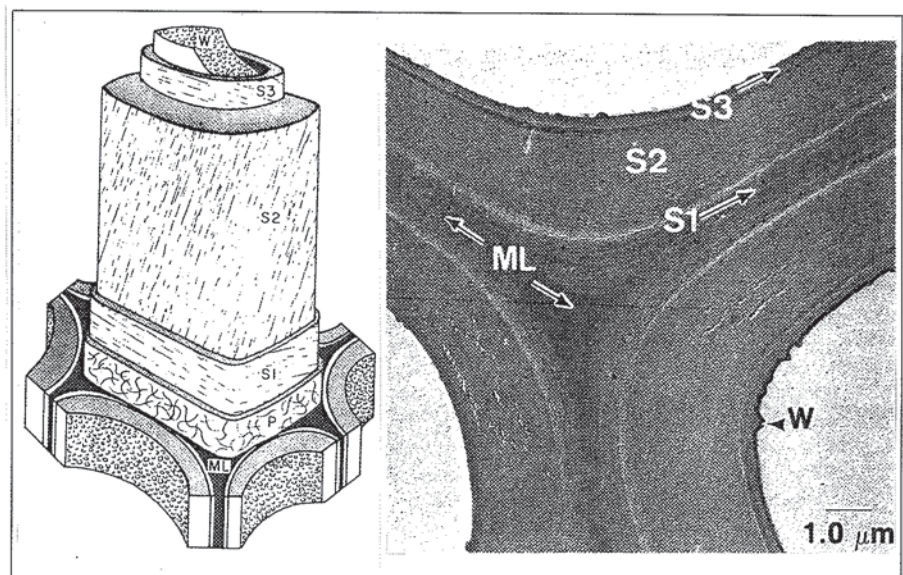


Bild 4.2

Darstellung des Aufbaues einer Holzzellwand und Querschnitt im Bereich der Mittelschicht ML

Betrachtet man ein Volumenelement einer Holzzellwand wie zum Beispiel im Bild 4.2 ersichtlich, so lässt sich dem Aufbau dieser Wand entsprechend diese als ein faseriger Verbundwerkstoff beschreiben. Da die Zellwand aus einer Anzahl von orientierten Schichten aufgebaut ist, spricht man auch von einem Laminat. Die Zellwand ist folgendermaßen aufgebaut: Sie besteht aus der Primärwand P, der Sekundärwand S (S1, S2, S3) und einer Mittellamelle ML. Mehrere Modellvorstellungen betreffend die mathematisch-mechanische Beschreibung der Holzzellwand, sind bis zum heutigen Tag bekannt. R.E. Mark (1967) betrachtete jede Zellwand-schicht als einen faserartigen Verbundwerkstoff, bestehend aus der tragenden Struktur der Fasern - Zellulose - und der Matrix - Hemizellulose und Lignin. Im Bild 4.3 ist dieses Modell dargestellt.

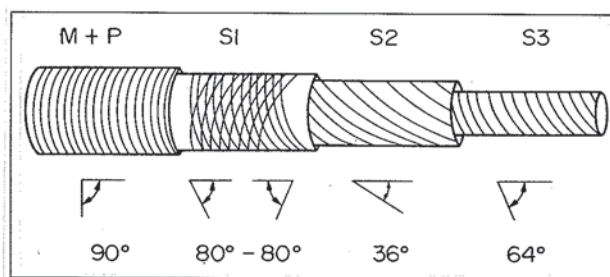


Bild 4.3

Modell nach R.E. Mark (1967) - Schichtaufbau der Holzzellwand

Dem Modell entsprechend berechnete er Elastizitätskennwerte für jede Schicht in Abhängigkeit der Schichtparameter. I.D. Cave (1969) ermittelte den Elastizitätsmodul der Faser in Längsachsenrichtung als Funktion der Schichtfaserwinkel. Die Voraussetzung für dieses Modell war die klassische Laminattheorie, d.h. ein symmetrischer Schichtaufbau und ein starrer Verbund zwischen den Schichten.

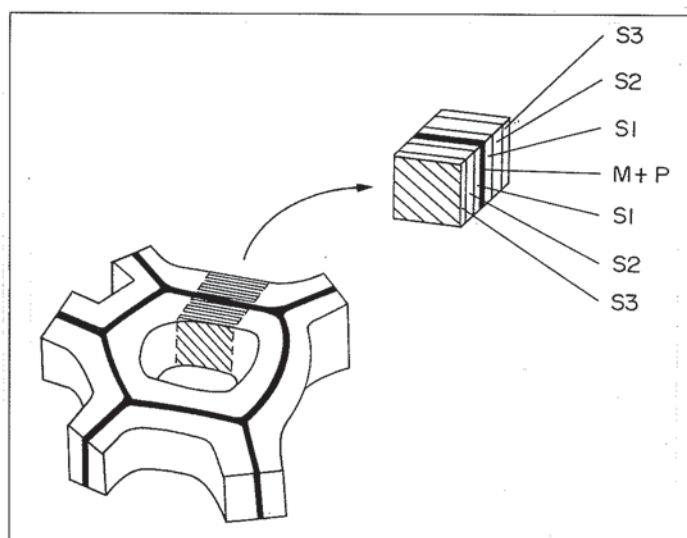


Bild 4.4

Segment aus der Holzzellwand nach A.P. Schniewind und J.D. Barrett (1969) - klassische Laminattheorie



A.P. Schniewind und J.D. Barrett (1969) entwickelten ebenfalls ein Modell für den Zellwandaufbau, wie im Bild 4.4 ersichtlich, basierend auf der Idee der klassischen Laminattheorie. Die Holzzelle wurde als eine dünnwandige Röhre betrachtet, beansprucht durch eine Last in Richtung der Zellachse. Die Zellwand wurde in flache, infinitesimale, rechtwinkelige Segmente zerlegt. Jedes Segment war schichtenweise aufgebaut, wobei jede Schichte orthotropes Materialverhalten aufwies. Die Neigung der Materialhauptachsen eines Segmentes entsprach den Zellulosefaserrichtungen der Einzelschichten S1, S2, S3 sowie M und P im Faserverband. R.C. Tang (1972) verwendete ein 3D-Modell zur Darstellung der Holzfasern. Die gesamte Holzfaser wurde als geschichteter Zylinder modelliert, wobei jeder Einzelschichte S1, S2, S3, M und P der Zellwand eine zylindrische Anisotropie zugewiesen wurde. J.D. Barrett und A.P. Schniewind (1973) ermittelten mit Hilfe einer FE Analyse die Spannungen in einer Holzzellwand.

Eine weitere Matrix ist das amorphe, polymere Lignin. Diese polymere Matrix ist hauptsächlich in der Mittelschicht zwischen zwei Holzfasern vorhanden. Lignin dient somit der Verbindung der einzelnen Holzfasern. Obwohl auch in der Sekundärschicht zum Teil Lignin als Matrix enthalten ist, ist doch der größte Teil des Lignins im Mittelschichtbereich des Holzfaserverbandes anzutreffen.

Die Primärzellwand enthält beliebig orientierte und verteilte Mikrofasern und ist zu vergleichen mit einer Wirrfaserschicht bei Kunststoffen. Die Primärwand wird durch eine einzige Schicht gebildet. Sie enthält nur wenig Zellulose, welche in einem losen Gewebe zusammengefaßt ist.

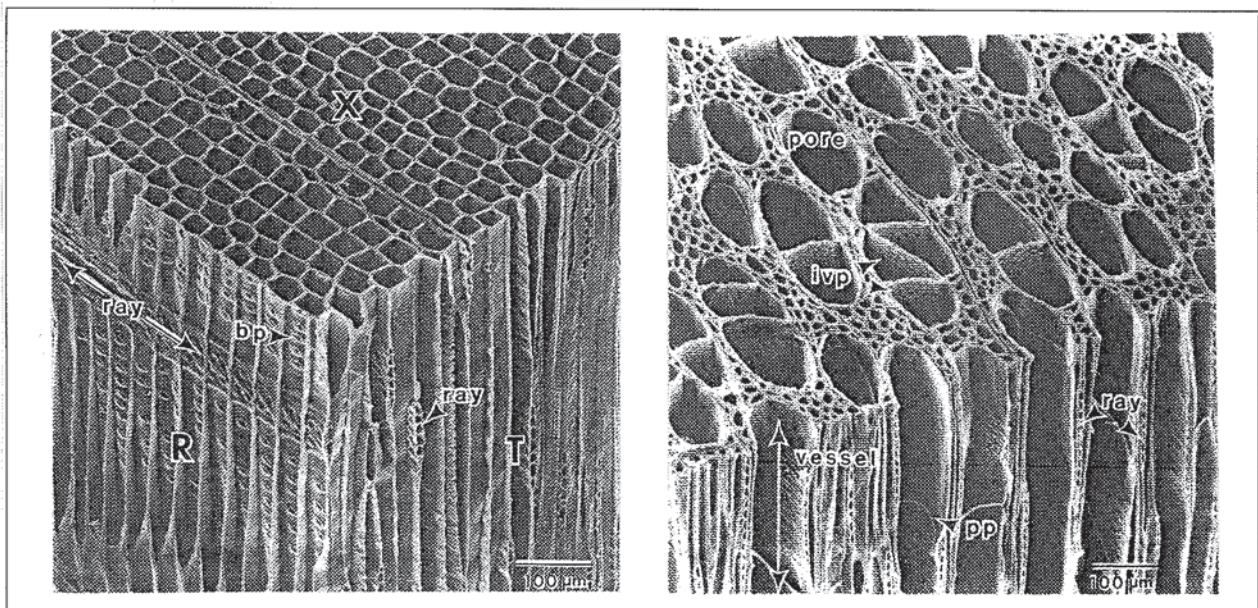


Bild 4.5

Elektronenmikroskopische Aufnahme von Nadelholz und Hartholz  
(Quelle: Veröffentlichung von W.A. Côté)

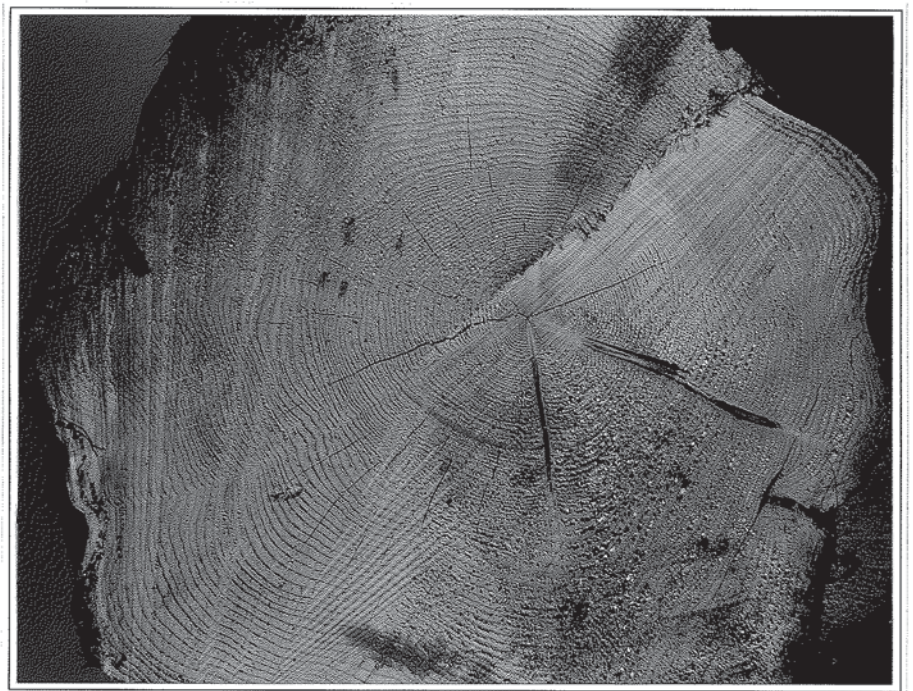


Bereits in der Mikrostruktur des Holzes hat man es also mit anisotropem Materialverhalten zu tun. Der Effekt der Anisotropie setzt sich im weiteren nicht nur im makroskopischen Bereich fort, sondern ist natürlich äußerst bedeutsam für den Bereich der Weiter- und Neuentwicklung von Holzwerkstoffen. Bild 4.5 zeigt zwei elektronenmikroskopische Aufnahmen, in denen der makroskopische Faserverbund deutlich erkennbar ist.

### Die Anisotropie im Makroreich des Holzes

Holz ist ein Material, das sich ständig erneuert. Schon bei der Betrachtung des mikrostrukturellen Aufbaues ist dies klar erkennbar. Sowohl im mikroskopischen als auch im makroskopischen Bereich kann man von einem Verbundmaterial sprechen.

Bereits innerhalb einer Holzart, ja sogar innerhalb eines Stammes in Quer- und Längsrichtung können erhebliche Streuungen im strukturellen Aufbau und demzufolge in den Werkstoffeigenschaften auftreten. Mit dem Bild 4.6 kann man sich diese Variabilität in den Eigenschaften leicht erklären.

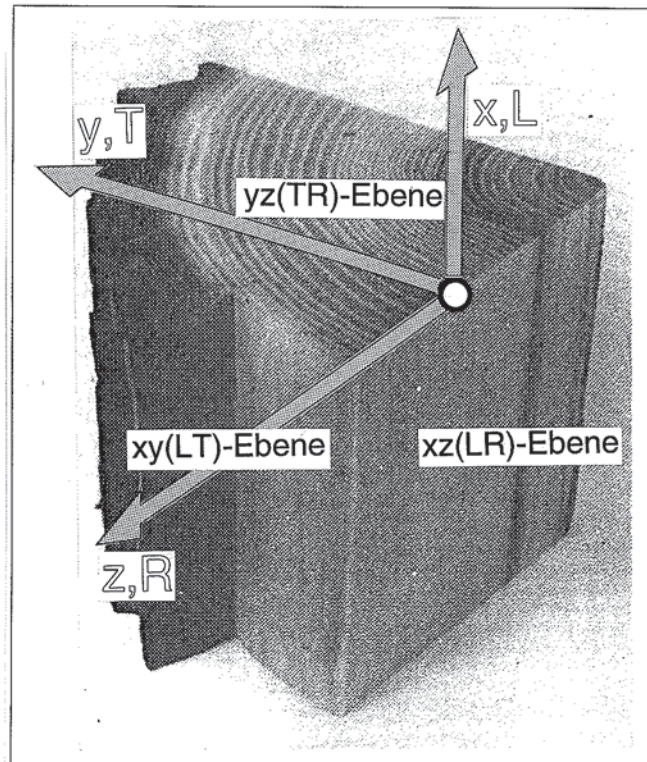


---

**Bild 4.6**

Stammquerschnitt

Betrachtet man eine Brettlamelle als Ausschnitt aus einem Stamm, so lässt sich Holz mechanisch betrachtet als ein inhomogenes, anisotropes Material beschreiben. Unter Vernachlässigung der Inhomogenität verbleibt die auf Grund der kreisförmigen Anordnung der Holzfasern in Form der Jahrringe zylindrische Anisotropie des Holzes das wesentliche Kriterium. Bild 4.7 zeigt einen Ausschnitt aus einem Stamm, die Hauptebenen und die Materialhauptachsen.



**Bild 4.7**

Stammausschnitt und Bezeichnung der Hauptebenen und der Hauptachsen  
(Quelle: Veröffentlichung von W.A. Côté)

Vernachlässigt man die Krümmung der Jahrringe, so kann Holz als ein orthotropes Material betrachtet werden. Diese Betrachtung des Werkstoffes trägt wesentlich dazu bei, den Werkstoff in seiner Komplexität zu verstehen. Vor allem für das Verstehen des Verhaltens von flächigen Strukturen aus Holz ist dieses Wissen unumgänglich. Allerdings ist die Forschungsaktivität, die die Bestimmung der Elastizitätskonstanten für den orthotropen Werkstoff Holz zum Inhalt hat, relativ gering. Im Falle der orthotropen Elastizität ist die folgende Nachgiebigkeitsmatrix für ein 3D-Element von Bedeutung. Für Holz sind demnach 9 unabhängige Elastizitätskonstanten zu berücksichtigen. Die Nachgiebigkeitsmatrix ist dann gültig, wenn das Bezugskordinatensystem mit den Materialhauptachsensystem ident ist. Wenn nicht, so sind die mit null besetzten Stellen der Matrix von null verschieden. Man hat es mit einer transformierten Matrix zu tun. Das heißt, es zeigt sich ein Zusammenhang zwischen Normalspannung und Schub. Normalspannungen bewirken Schubverzerrungen in der betrachteten Ebene und umgekehrt, Schubspannungen bewirken Dehnungen. In einem weiteren Kapitel wird noch näher auf die mechanischen Grundlagen eingegangen.



$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{\nu_{xy}}{E_{yy}} & \frac{\nu_{xz}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{yx}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & \frac{\nu_{yz}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{zx}}{E_{xx}} & \frac{\nu_{zy}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (G 4.1)$$

Bei den Werkstoffkonstanten handelt es sich um die drei E-Moduli  $E_{xx} = E_L$ ,  $E_{yy} = E_T$  und  $E_{zz} = E_R$ . Es sind dies die Young's-Moduli in allen Hauptsymmetrieachsen. Weiters sind dies die drei Schub-Moduli  $G_{xz} = G_{LR}$ ,  $G_{xy} = G_{LT}$  und  $G_{yz} = G_{TR}$  in den Hauptsymmetrieebenen und die Poisson-Ziffern  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{LR}$ ,  $\nu_{TR}$  sowie  $\nu_{TL}$ ,  $\nu_{RL}$  und  $\nu_{RT}$ .

J.R. Goodman und J. Bodig (1970) [41] führten eine Versuchsserie durch, um diese Kenngrößen für vier Holzarten - Engelmann spruce, Douglas fir, Red-oak und Aspen - zu ermitteln. Nachfolgend soll auf den Versuchsaufbau, die Probenentnahme und den Versuchsablauf eingegangen werden, um zu zeigen, wie schwierig und zeitaufwendig es ist, für den Werkstoff Holz versuchstechnisch abgesicherte 3D-Elastizitätskennwerte zu ermitteln. Für jede Holzart standen drei Stammabschnitte aus verschiedenen Bäumen der jeweiligen Holzart zur Verfügung. Der Stammdurchmesser für drei dieser Holzarten war  $\geq 710$  mm und für Aspen  $\geq 460$  mm. Die Stammabschnitte hatten eine Länge von 2440 mm. Diese Abschnitte wurden vierteteilt mit Einzellängen von 610 mm. Von jedem dieser Einzelteile wurde eine 51 mm starke Scheibe abgeschnitten. Diese dienten als Versuchskörper für die RT-Torsionsversuche zur Ermittlung des Schubmodules in dieser Ebene. Aus den Einzelstammquerschnitten wurden für die Druckversuche 559 mm lange stabförmige Versuchskörper mit bestimmtem Querschnitt und in bestimmter Lage im Stammquerschnitt - in 15°-Jahringintervallen - herausgeschnitten. Aus diesen Holzelementen wurden letztlich die Probekörper für den Druckversuch zur Ermittlung der E-Moduli und der Poisson-Ziffern und den Torsionsversuch für die Bestimmung der elastischen Schubmoduli in der LR-Ebene und der LT-Ebene gewonnen. Auch hier wurden in Intervallen von 15° zur Faserrichtung die Probekörper herausgeschnitten. Somit war es möglich, nicht nur den Winkel der Jahrringe in einem Probekörper zu variieren, sondern gleichzeitig auch eine Variabilität in der Faserorientierung zu erhalten. Damit war eine räumliche Orientierung der Fasern gegeben. Die Abmessungen der Probekörper betragen für den Druckversuch 44.5 mm / 44.5 mm / 127 mm und für die Ermittlung der Schubmoduli waren quadratische Platten mit den Abmessungen 305 mm / 305 mm mit einer Dicke von 12.7 mm vorgesehen. Von jedem Baum wurden 49 Druckproben entnommen, wobei nicht

nur 7 verschiedene Jahrringwinkel berücksichtigt wurden, sondern gleichzeitig auch 7 verschiedene Faserwinkel. Somit kam man, bei 12 für diesen Versuchslauf gewählten Stammabschnitten, auf 588 Druckprüfungen. Im Bild 4.8 ist dargestellt, aus welchen Bereichen des Stammes die Versuchskörper entnommen wurden.

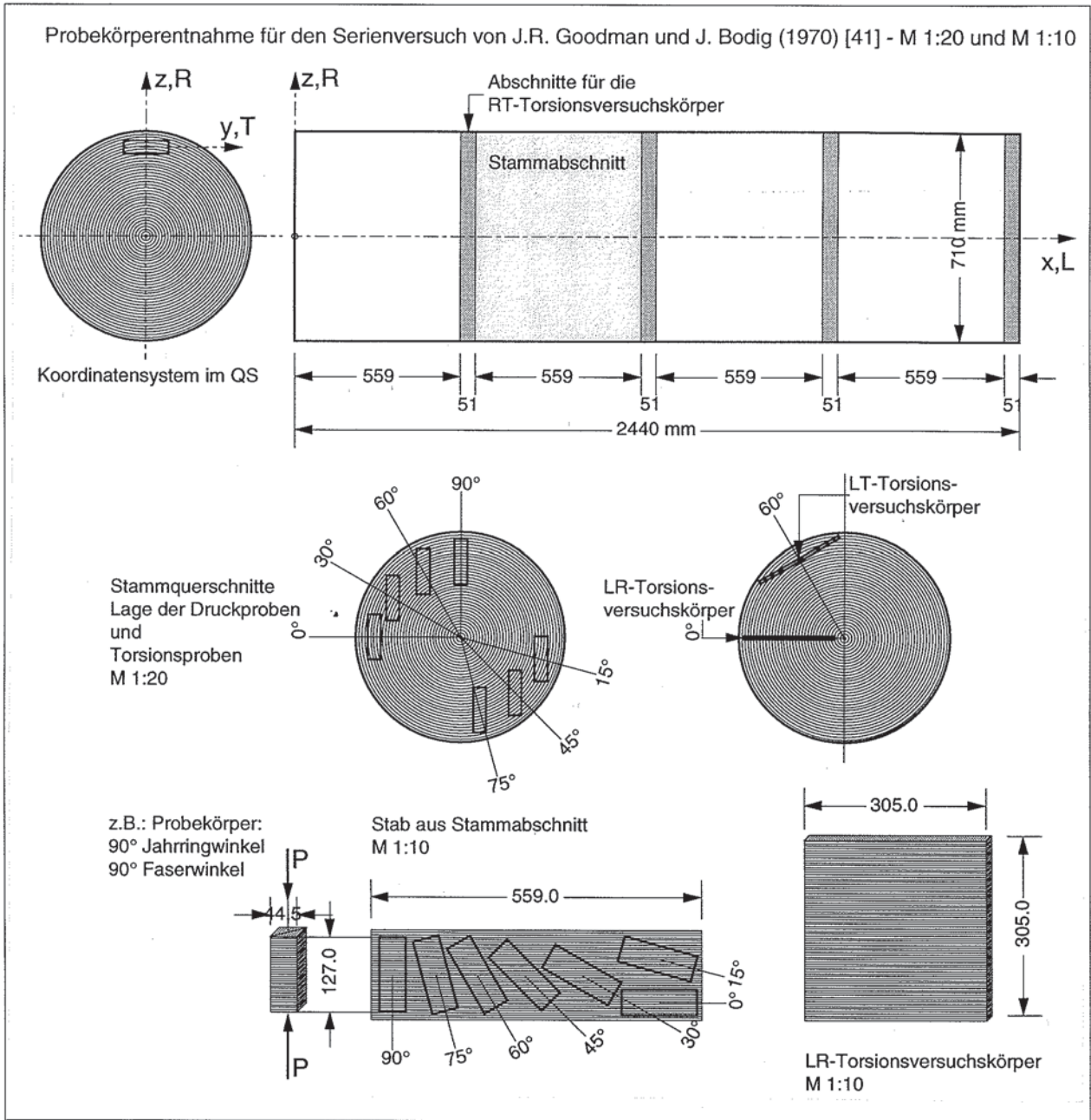


Bild 4.8

Lage der Versuchskörper im Stammabschnitt

In den Tabellen 4.1 bis 4.8 sind die charakteristischen Werte der Elastizitätsparameter für diese Holzarten ersichtlich.



## Die Anisotropie des Werkstoffes Holz

**Tabelle 4.1**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Engelmann spruce (E1 bis E3)  
E-Moduli und Schubmoduli in den drei Ebenen

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$E_L$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_R$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_T$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TR}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TL}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LR}$ in N/mm <sup>2</sup>
E 1	38	6324	779	359	69	786	855
E 2	30	6048	1303	352	76	876	959
E 3	31	5607	352	379	55	703	614

**Tabelle 4.2**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Engelmann spruce (E1 bis E3)  
Poisson-Zahlen  $\nu$

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{TR}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RT}$
E 1	38	0.474	0.489	0.197	----	----	----
E 2	30	0.494	0.481	0.197	----	----	----
E 3	31	0.349	0.541	0.265	----	----	----

**Tabelle 4.3**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Douglas fir (D1 bis D3)  
E-Moduli und Schubmoduli in den drei Ebenen

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$E_L$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_R$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_T$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TR}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TL}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LR}$ in N/mm <sup>2</sup>
D 1	39	18622	945	931	110	804	745
D 2	25	16829	848	841	110	855	697
D 3	28	12346	890	807	110	876	745

**Tabelle 4.4**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Douglas fir (D1 bis D3)  
Poisson-Zahlen  $\nu$

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{TR}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RT}$
D 1	39	0.174	0.469	0.425	----	----	----
D 2	25	0.411	0.542	0.515	----	----	----
D 3	28	0.271	0.501	0.728	----	----	----



#### 4. Anisotropie von Holz und Faser-Kunststoff-Verbunden

**Tabelle 4.5**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Red-oak (R1 bis R3)  
E-Moduli und Schubmoduli in den drei Ebenen

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$E_L$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_R$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_T$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TR}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TL}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LR}$ in N/mm <sup>2</sup>
R 1	7	15311	1179	614	317	683	821
R 2	7	14967	1497	828	400	690	966
R 3	6	12760	1290	621	304	766	938

**Tabelle 4.6**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Red-oak (R1 bis R3)  
Poisson-Zahlen  $\nu$

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{TR}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RT}$
R 1	7	0.390	0.567	0.184	----	----	----
R 2	7	0.223	0.458	0.311	----	----	----
R 3	6	0.274	0.410	0.282	----	----	----

**Tabelle 4.7**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Aspen (A1 bis A3)  
E-Moduli und Schubmoduli in den drei Ebenen

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$E_L$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_R$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_T$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TR}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TL}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LR}$ in N/mm <sup>2</sup>
A 1	18	7863	738	262	83	448	600
A 2	11	9587	710	283	97	435	676
A 3	18	8828	724	248	104	428	579

**Tabelle 4.8**

Elastische Werkstoffkenngrößen für die Holzart Aspen (A1 bis A3)  
Poisson-Zahlen  $\nu$

Holzart	Jahrringe pro inch (25.4 mm)	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{TR}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RT}$
A 1	18	0.458	0.202	0.452	----	----	----
A 2	11	0.487	0.537	0.628	----	----	----
A 3	18	0.523	0.384	0.409	----	----	----



Zusätzlich zu den Druckversuchen wurden von J.R. Goodman und J. Bodig (1970), um die Schubsteifigkeiten und die damit verbundenen Schubmoduli zu bestimmen, Versuche an den bereits erwähnten Platten 305 mm / 305 mm durchgeführt. Damit war es möglich, nach bestimmten Berechnungsformeln der ASTM-Richtlinien die Schubmoduli für die TR-, TL- und die LR-Ebene zu ermitteln. Der genaue Versuchsablauf ist der ASTM-Richtlinie D805-63 (1969) bzw. den Arbeiten von J.R. Goodman und J. Bodig (1970) zu entnehmen.

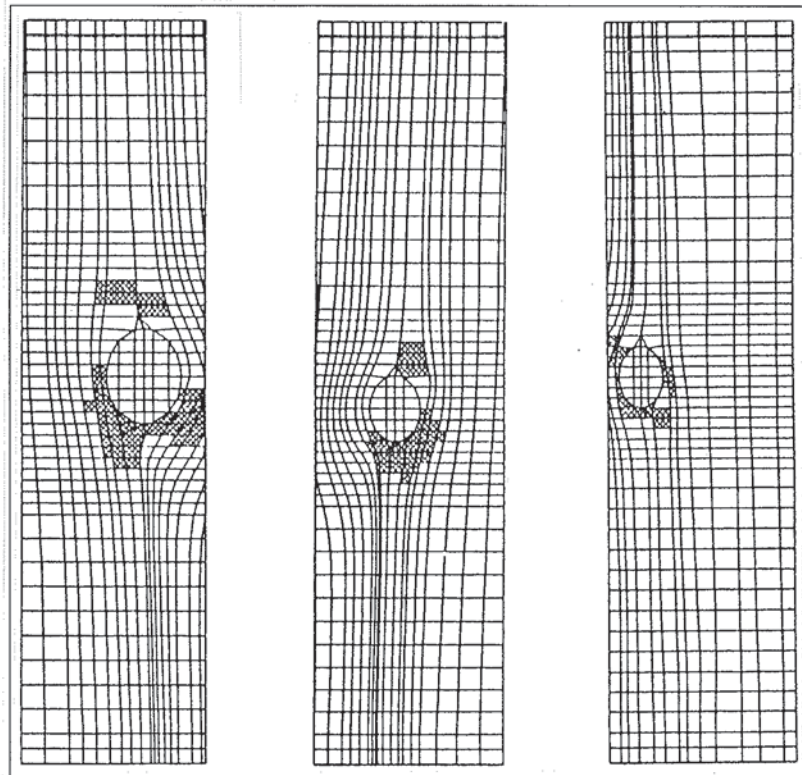
Ein sehr schwierig zu erfassendes Problem ist die Jahrringkrümmung und die zum Teil räumlich orientierten Fasern. Vor allem bei Proben bzw. Brettlamellen aus Stämmen mit geringen Durchmesser ist die Jahrringkrümmung von Bedeutung. Schon bei geringen Abweichungen von der Hauptorientierung ( $0^\circ$ -Faserwinkel) ergeben sich enorme Änderungen der Elastizitätskennwerte, vor allem der E-Moduli und der Schubmoduli. Diesen Effekt sollte ein Ingenieur, der mit dem Werkstoff Holz arbeitet, unbedingt kennen. Aus den vorhin genannten Versuchen hatte sich klar gezeigt, daß eine Vielzahl von offenen Problemen existiert. Vor allem die Erfassung und Formulierung des Materialverhaltens bei Berücksichtigung einer beliebigen räumlichen Faserorientierung. Hier ist unbedingt erforderlich, umfassende Forschungsarbeit zu leisten, um diese Inhomogenitäten des Werkstoffes Holz und die daraus resultierenden Effekte besser zu verstehen.

Gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen Überlegungen und den aus den Versuchen ermittelten Werten konnte lediglich für die Beanspruchungen in den Materialhauptrichtungen erreicht werden. Große Abweichungen wurden für generelle Belastungssituationen festgestellt. Das heißt, daß die Betrachtung von Holz als orthotropes Material nicht allgemeingültig anwendbar ist, vor allem deshalb nicht, da der Einfluß der Schubmoduli und der Poissonzahlen bei allgemeinen Belastungen erheblich ist.

Mit der Verwendung der FE-Methode und der Beschreibung des Werkstoffes Holz mittels anisotroper 3D-Elemente müßte es möglich sein, bei einer genügenden Anzahl von Elementen, die Komplexität des strukturellen Aufbaues von Holz zu modellieren. An dieser Stelle möchte ich auf jüngere Arbeiten von S.M. Cramer und W.B. Fohrell (1990) sowie auf Arbeiten von N. Franco und P.J. Pellicane (1993) hinweisen, die sich in ihren Arbeiten mit den Inhomogenitäten des Werkstoffes Holz auseinandersetzen.

S.M. Cramer und W.B. Fohrell (1990) [36] hatten in einer ihrer Arbeiten das Bruchverhalten einer Holzlamelle auf Zug unter Zugrundelegung einer Computersimulation untersucht. Die Modellierung von Holz erfolgt, wie bereits oben erwähnt, grundsätzlich als orthotropes Material, in der Erkenntnis der enormen Unterschiede der Steifigkeits- und Festigkeitswerte zwischen den Hauptmaterialrichtungen. Eine erhebliche Schwierigkeit tritt durch die natürliche Beschaffenheit von Holz auf. Das Auftreten von Frühholz- und Spätholzhärringen verbunden mit einer von Natur aus vorhandenen Dichtevarianz bedeutet, daß die Elastizitätskonstanten nicht nur von der Faserorientierung allein abhängen, sondern auch eine Funktion vom jeweilig betrachteten Ort, zum Beispiel innerhalb einer Brettlamelle, sind. Weitere Diskontinuitäten stellen Asteinwüchse dar. Trotz dieser Komplexität sind Forschungsarbeiten von A. Pugel (1980) bekannt, der versucht hat, die Steifigkeitskennwerte für Asteinwüchse zu ermitteln. Daraus konnte er feststellen, daß diese Werte geringer sind als für das unmittelbar angrenzende 'Normalholz'. Betrachtet

man nun eine Holzlamelle, so wird man feststellen, daß einerseits das festgelegte geometrische Koordinatensystem als Bezugssystem mit dem materialspezifischen Hauptrichtungen zumeist nicht ident ist - auf Grund der Jahrringkrümmung - und andererseits vor allem im Bereich von Diskontinuitäten die Fasern eine beliebig räumliche Orientierung aufweisen. Diesem Umstand kann man nur dann Rechnung tragen, wenn es gelingt, die Lage der Fasern sowohl im Bereich der Oberfläche als auch in den faserabtauchenden Zonen meßtechnisch zu erfassen und die gewonnenen Daten in ein Modell einfließen zu lassen. Arbeiten in diesem Bereich sind bekannt von A. Dabholkar (1980) und G.E. Phillips (1981). A. Dabholkar (1980) entwickelte ein FE-Modell, worin ausschließlich der Faserverlauf an der Brettlamellenoberfläche der LT-Ebene und einfache Astknoten mit einem angenommenen symmetrischen Fasermuster rund um den Knoten Berücksichtigung fand. Die abtauchenden Richtungskomponenten der Fasern wurden nicht berücksichtigt. S.M. Cramer und J.R. Goodman (1983, 1986) sowie J.G. Zandbergs und F.W. Smith (1988) verwendeten dieses Modell in Verbindung mit einer Bruchhypothese für den Werkstoff Holz, um mit Hilfe von FE-Berechnungen den Bruchvorgang einer Brettlamelle zu simulieren. Das von S.M. Cramer und W.B. Fohrell (1990) [36] für die Simulation des Bruchvorganges verwendete Modell der Faserorientierung berücksichtigt die im Bereich von Astwüchsen räumliche Lage der Fasern. Nach Messung der Faserwinkel und Erstellung von Faserwinkelplänen für beide Oberflächen der Brettlamelle, welche zugleich als Eingabe für das 2D-FE-Modell dienen, erfolgt die Idealisierung und Reduktion dieser Daten in die Brettlamellenmittelfläche.



**Bild 4.9**

FE-Netze, generiert für die Zugprobekörper unter Berücksichtigung von Astwüchsen und abtauchenden Fasern im Bereich dieser Äste



Im Bild 4.9 sind drei Versuchslamellen mit erfolgter Netzgenerierung für die Mittelfläche dargestellt. In diesen FE-Netzen sind nicht nur die idealisierten Knoten berücksichtigt, sondern auch die um diesen Knoten abtauchenden Fasern - schraffierte Bereiche mit Abtauchwinkel  $\geq 15^\circ$  - berücksichtigt. Die Beschreibung des Werkstoffes Holz erfolgte auch hier über die Theorie für linear elastisches orthotropes Material. Ausgehend von der 3D-Nachgiebigkeitsmatrix erfolgt die Reduktion in die LT-Ebene, um dem ebenen Spannungszustand zu genügen. Die elastischen Materialkennwerte sind sowohl für das 'normale' Holz als auch für die Diskontinuitäten - Äste - erforderlich. Die Abmessungen der Zugversuchsproben betrug 6.35 mm / 88.9 mm / 1000 mm. Bild 4.10 zeigt die Bruchbilder eines Probekörpers und das Bruchbild aus der Simulation.

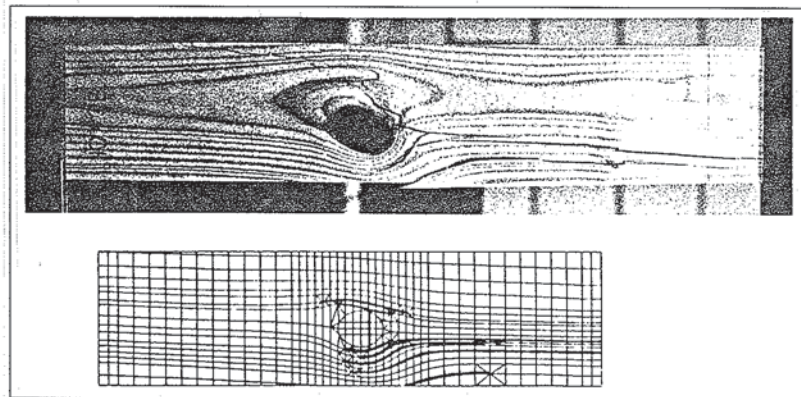


Bild 4.10

Bruchbilder im Vergleich - Zugprobekörper und Simulation

N. Franco und P.J. Pellicane (1993) [39] führten ebenfalls FE-Berechnungen durch, um die Festigkeit und den Bruchzustand von Rundholzmasten zu ermitteln. Für die Nachgiebigkeitsmatrix der 3D-FE-Analyse wurden die 9 unabhängigen elastischen Werkstoffkenngrößen benötigt. Einzig  $E_L$  wurde davon auf versuchstechnischem Wege an einem Abschnitt des Masten ermittelt. Die übrigen fünf Moduli ( $E_R$ ,  $E_T$ ,  $G_{LR}$ ,  $G_{RT}$ ,  $G_{LT}$ ) wurden rechnerisch mit  $E_L$  als Bezugswert über die von J. Bodig und J.R. Goodman (1973) vorgeschlagenen Bestimmungsgleichungen ermittelt. Knoten - Äste - stellen Diskontinuitäten im Material dar und wurden in der Form berücksichtigt, daß die Elementsteifigkeiten mit der Abminderung des  $E_L$ -Moduls reduziert wurden. Im Bereich der Knoten wurde das Abtauchen der Fasern und die damit verbundene räumliche Faserorientierung berücksichtigt.

S. Aicher (1990) [32] hatte in einer seiner Arbeiten über das Verhalten eines durch Klebung geschaffenen Verbundsystems zwischen Brettschichtholz und Bau-Furniersperrholz-Platten bezüglich klimatischer Veränderungen auf dieses System ebenfalls FE-Analysen durchgeführt, worin ein linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt wurde. Für diese Berechnungen wurden die vorhandenen Elastizitätskennwerte der DIN 1052 entnommen, der Schubmodul in der Hirnholzebene und die Querkontraktionszahlen stammten aus Arbeiten von H. Hörig (1935), E. Krabbe (1960) und F.H. Neuhaus (1981). Die Gültigkeit dieser Kennwerte liegt bei einem Holzfeuchtebereich von  $u = 9\%$  bis  $13\%$ . Für die im Normalfall unterschiedlichen Querdehnzahlen - z.B.  $v_{RT} \neq v_{TR}$  - wurden Mittelwerte - z.B.  $v_{RT} = v_{TR} = (v_{RT} + v_{TR})/2$  - verwendet. In den nachfolgenden Tabellen 4.9 und 4.10 sind die für die FE-Berechnung verwendeten Materialkennwerte dargestellt.

#### 4. Anisotropie von Holz und Faser-Kunststoff-Verbunden

**Tabelle 4.9**

Elastische Werkstoffkenngrößen für BSH-Fichte, -Tanne, -Kiefer, -Lärche, -Douglasie, -Southern Pine und Western Hemlock - E-Moduli und Schubmoduli lt. DIN 1052 und E. Krabbe sowie F.H. Neuhaus ( $G_{TR}$  - Schubmodul Hirnholzebene)

Holzart	-----	$E_L$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_R = E_{\perp}$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_T = E_{\parallel}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TR}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TL}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LR}$ in N/mm <sup>2</sup>
Fi/Ta/Ki/Lä	-----	11000	300	300	(40)	500	500

**Tabelle 4.10**

Elastische Werkstoffkenngrößen für BSH-Fichte, -Tanne, -Kiefer, -Lärche, -Douglasie, -Southern Pine und Western Hemlock - Poisson-Zahlen  $\nu$  nach H. Hörig, E. Krabbe und F.H. Neuhaus

Holzart	-----	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{TR}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RT}$
Fi/Ta/Ki/Lä	-----	0.450	0.450	0.380	0.010	0.010	0.380

A.P. Schniewind (1968, 1972, 1981) [14] hat sich in zahlreichen Arbeiten mit der Anisotropie des Holzes auseinandergesetzt. Auf Grund des natürlichen Wachstums und der Situierung der drei Materialhaupttrichtungen (L, T, R) läßt sich Holz als ein Material mit zylindrischer Anisotropie bezeichnen. Vernachlässigt man die natürlich vorhandene Jahrringkrümmung, so kann man Holz als ein bereichsweise homogenes, orthotropes Material bezeichnen. Dies ist deshalb auch möglich, da im Vergleich zum  $E_L$ -Modul die beiden übrigen E-Moduli  $E_R$  und  $E_T$  erheblich - ca. 1:20 bis 1:40 bei Nadelholz - niedriger sind. Obwohl auch zwischen  $E_T$  und  $E_R$  eine Differenz vorhanden ist - ca. 1:1.5 bis 2.0 - kann dieser Unterschied im Vergleich zum sehr viel größeren  $E_L$ -Modul vernachlässigt werden, wodurch dann die Annahme eines orthotropen Materials berechtigt ist. In der Tabelle 4.11 und 4.12 von R.F.S. Hearmon (1948) sind Elastizitätskonstanten für vier Holzarten enthalten.

**Tabelle 4.11**

Elastische Werkstoffkennwerte für die Holzarten Balsa, Birch, Scots pine und Sitka spruce - E-Moduli und Schubmoduli nach R.F.S. Hearmon

Holzart	Dichte in kg/m <sup>3</sup>	$E_L$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_R$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_T$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{TR}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LT}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LR}$ in N/mm <sup>2</sup>
Balsa	100	2440	114	38	14	85	124
Birch	620	16300	1110	620	190	910	1180
Scots pine	550	16300	1100	570	66	680	1160
Sitka spruce	390	11600	900	500	39	720	750



**Tabelle 4.12**

Elastische Werkstoffkennwerte für die Holzarten Balsa, Birch, Scots pine und Sitka spruce - Poisson-Zahlen  $\nu$  nach R.F.S. Hearmon

Holzart	Dichte in kg/m <sup>3</sup>	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{TR}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RT}$
Balsa	100	0.230	0.490	0.240	0.020	0.010	0.660
Birch	620	0.490	0.430	0.380	0.030	0.020	0.780
Scots pine	550	0.420	0.510	0.310	0.040	0.020	0.680
Sitka spruce	390	0.370	0.470	0.250	0.030	0.020	0.430

Weitere Materialkennwerte für den anisotropen Werkstoff Holz für verschiedene Holzarten wurden von R. Keylwerth (1951), D.Noack und E. Schwab (1973) ermittelt. In der folgenden Tabelle 4.13 sind für einige Holzarten eine Reihe von Kennwerten zusammengefaßt.

**Tabelle 4.13**

Elastische Werkstoffkennwerte für die Holzarten Douglasie, Fichte, Kiefer, Buche und Eiche - E-Moduli und Schubmoduli nach R. Keylwerth, D. Noack, E. Schwab und DIN 68364

Holzart	Dichte in kg/m <sup>3</sup>	$E_L$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_R$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_T$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{RT}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LT}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{LR}$ in N/mm <sup>2</sup>
Douglasie	540	12000	900	700	80	900	800
Fichte	470	10000	800	450	40	650	600
Kiefer	520	11000	1000	500	70	680	-----
Buche	690	14000	2280	1160	470	1080	1640
Eiche	670	13000	1580	920	400	800	1150

### Die Anisotropie der Holzwerkstoffe

Holzwerkstoffe entstehen durch Vergütungsmaßnahmen, die darauf abzielen, die technologischen Eigenschaften des natürlichen Werkstoffes Holz durch mechanische, chemische oder eine Kombination aus beiden Verfahren, zu verbessern. In einem, vom Verfasser dieser Arbeit, abgeänderten Form des Diagrammes nach H. Kolb und A. Epple [3] im Bild 4.11 ist die grundlegende Gliederung der Holzwerkstoffe bzw. der vergüteten Hölzer dargestellt. Hierin wird in Vollholz, Lagenholz, Spanholz und Faserholz unterschieden. Nachfolgend werden die Spanhölzer und die Lagenhölzer in ihrer grundlegenden Form betrachtet, damit ein erklärender Zusammenhang mit dem Hauptteil dieser Arbeit erreicht werden kann.



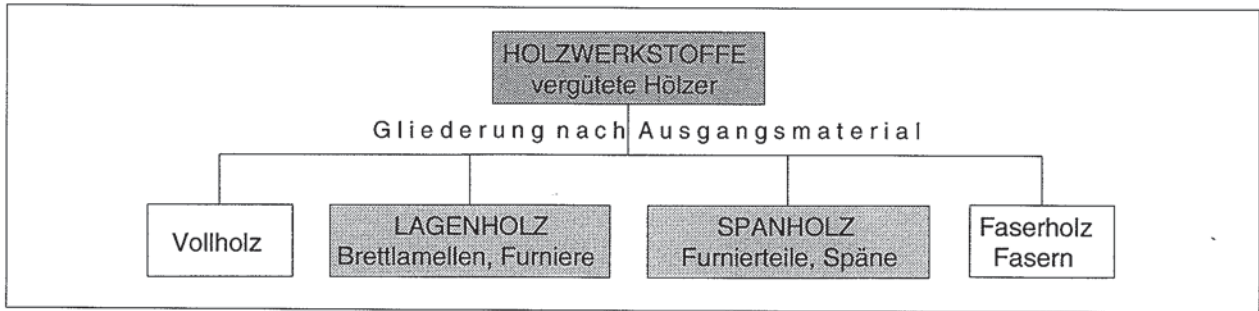


Bild 4.11

Grundlegende Gliederung der Holzwerkstoffe bzw. der vergüteten Hölzer

### Spanholz

Es handelt sich dabei um Holzwerkstoffe, die aus Spänen oder Furnierteilen zu einem Bauelement geformt werden. Nach der Art der Herstellung unterscheidet man zwischen Flachpressplatten und Strangpressplatten. Im Bild 4.12 ist eine weitere Gliederung der Spanhölzer dargestellt.

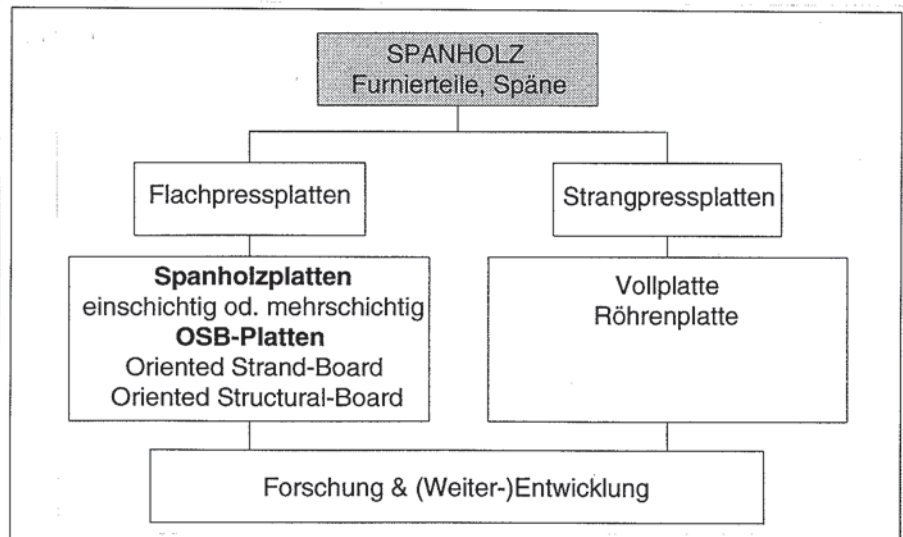


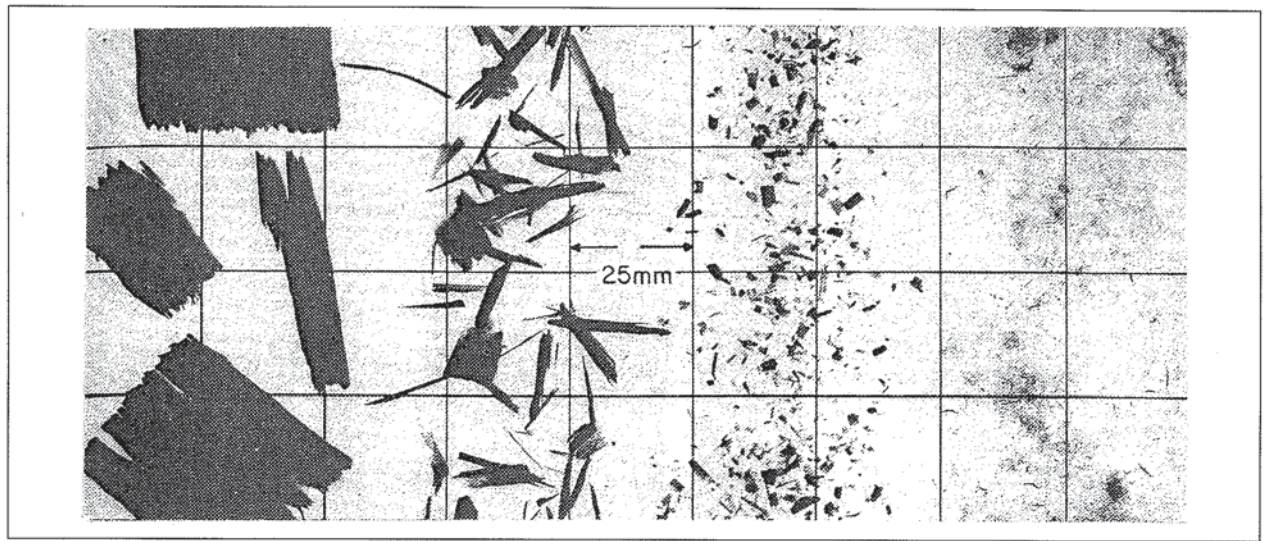
Bild 4.12

Gliederung der Spanhölzer

Zumeist hat man es im Baubereich mit Flachpressplatten zu tun, deren Fasern vorzugsweise parallel zur Plattenebene liegen. Als verbindendes Element zwischen den Holzpartikeln dient meist ein Kunstharzleim. Die Herstellung erfolgt in Plattenform, wobei aber auch andere Formen wie zum Beispiel I-Träger oder gefaltete oder gekrümmte Elemente möglich sind. Einige für ein Baumaterial wünschenswerte Charakteristiken sind hier von Bedeutung, wie zum Beispiel die Verfügbarkeit in relativ großen Einheiten, die gleichmäßige Oberflächenbeschaffenheit und die doch einheitlichen Werkstoffkenngrößen. Ein großer Teil der Spanplattenfabrikate sind für die Herstellung einer Primärtragstruktur ausgeschlossen, da sowohl die Festigkeits- als auch die Steifigkeitswerte zumeist weitaus geringer sind als bei Vollholz oder Lagenholz. Eine Entwicklung in diesem Bereich der Holzwerkstoffe stellen die aus Furnierteilchen - Späne - bestimmter Größe und Faserausrichtung hergestellten Plattenelemente dar, welche auch geeignet sind, als Baumaterial für

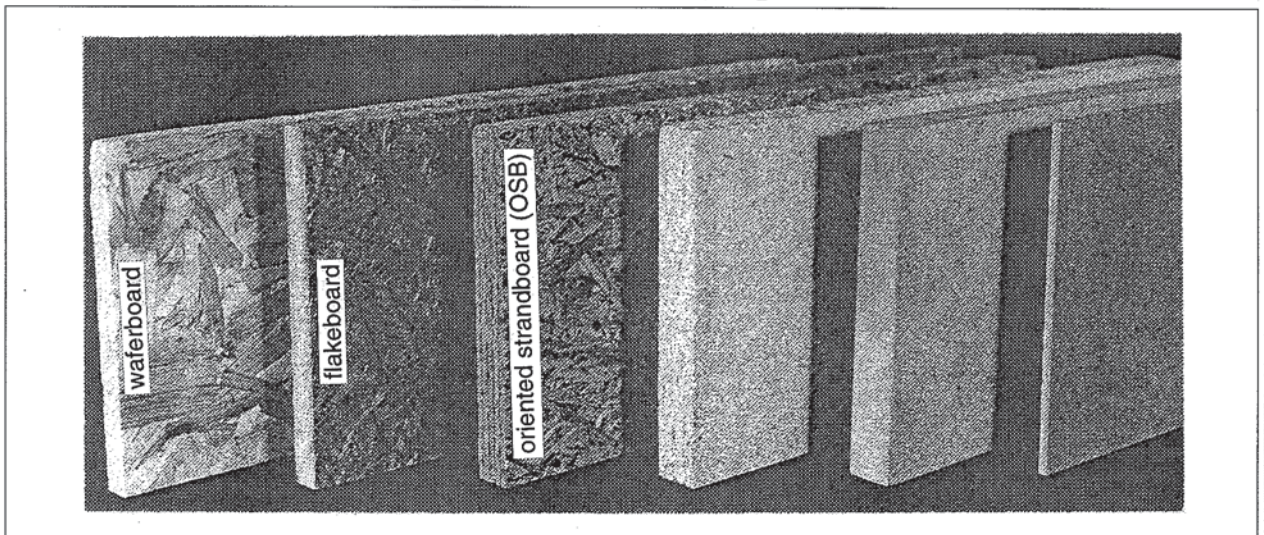


viele Anwendungsbereiche im Holzbau in Bezug auf Gebrauchstauglichkeit und Zuverlässigkeit des Materials zu entsprechen. Eine Vielzahl von Faktoren beeinflussen den Herstellungsprozeß von Holzwerkstoffen. Erst wenn man alle diese Faktoren erkennt und ihren Einfluß versteht, können die gewünschten Werkstoffkennwerte 'produziert' werden, ähnlich wie bei der Herstellung faserverstärkter Kunststoffe. Forschungsarbeiten in diesem Bereich führen nicht nur zur Verbesserung der vorhandenen Holzwerkstoffe, sondern ergeben auch Weiterentwicklungen und Kombinationen - Faser-Verbund-Werkstoffe - mit anderen Werkstoffen, wie zum Beispiel die Kombination mit Kohle- oder Glasfasern. Man spricht hier auch von gerichteten Werkstoffkenngrößen. In den Bildern 4.13 und 4.14 sind einerseits die für die Herstellung von Spanplatten erforderlichen Ausgangsmaterialien ersichtlich und andererseits die daraus resultierenden Holzwerkstoffe.



**Bild 4.13**

Ausgangprodukte für die Herstellung von Holzwerkstoffen



**Bild 4.14**

Holzwerkstoffe - Spanholzplatten und Faserholzplatten  
(Bild 4.13 und 4.14 Quelle: Veröffentlichung von T.M. Maloney)



### Lagenholz

Zu den Lagenhölzern gehören alle aus Furnieren und Stäben zusammengeleimten plattenförmigen Elemente, welche im Baubereich zur Verwendung kommen. Eine weitere Untergliederung der Lagenhölzer erfolgt in Schichtholz und Sperrholz. Im Bild 4.15 ist eine weitere Gliederung der Lagenhölzer dargestellt.

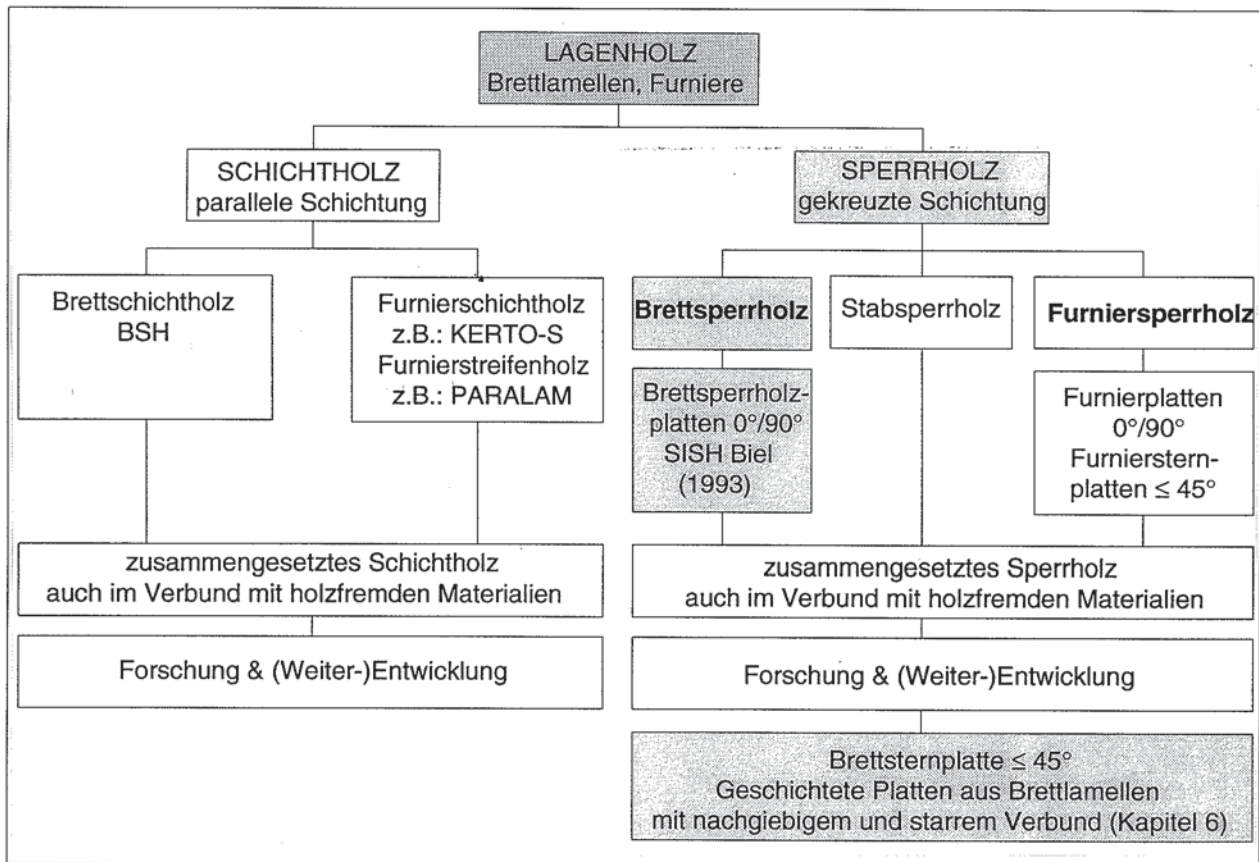
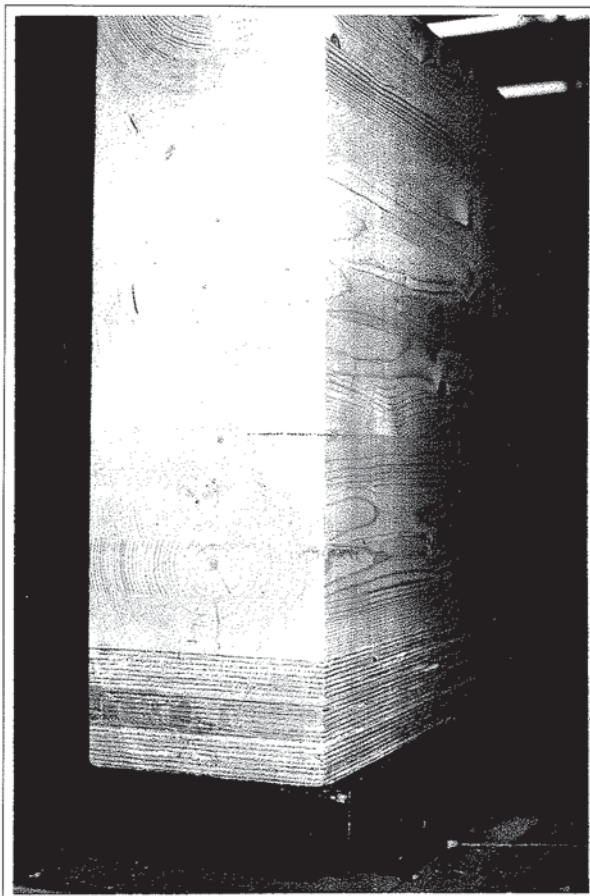


Bild 4.15

Gliederung der Lagenhölzer

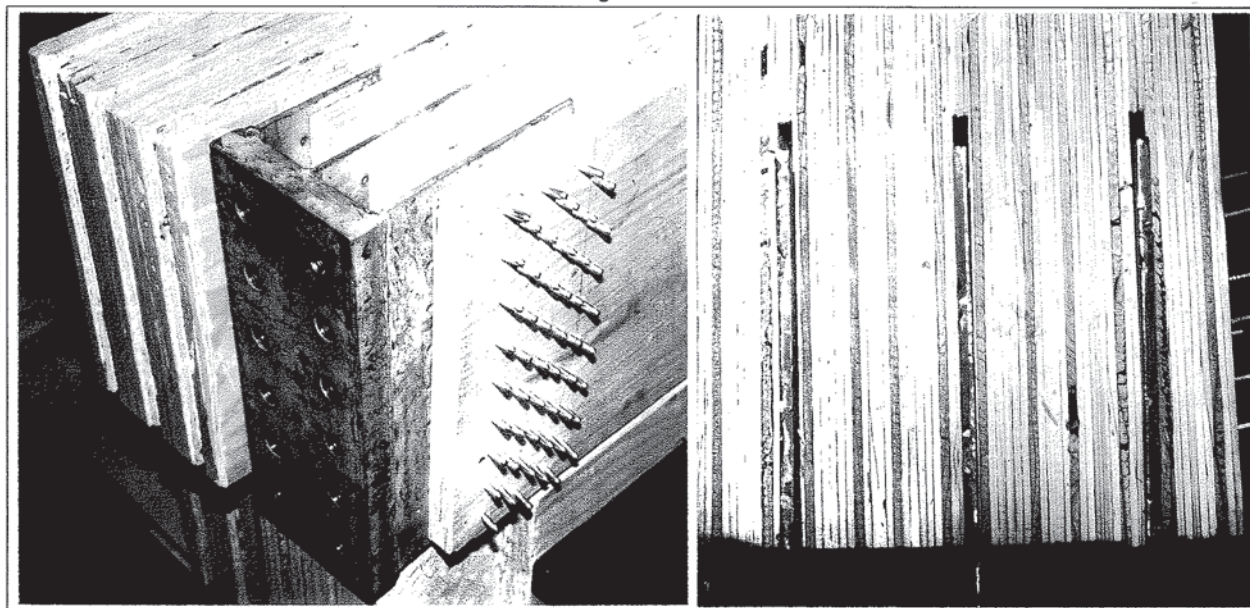
#### Schichtholz

Schichtholz kann in Abhängigkeit von der Schichtstärke unterteilt werden in Brettschichtholz und Furnierschichtholz. Beide sind dem natürlich gewachsenen Holz sehr ähnlich, da es nur eine Faserhauorientierung gibt. Die Brett lamellen bzw. die Furnierschichten werden gleichgerichtet aufeinandergeleimt, sodaß die Lage aller Fasern längsorientiert ist. Durch das Aufschneiden des Holzes in Brett lamellen bzw. Furniere mit bestimmter Dicke  $t$  erreicht man einen sehr hohen Homogenisierungsgrad.



**Bild 4.16**

BSH-Biegeträger mit KERTO-Verstärkungslamellen im Zugbereich  
Versuchsdurchführung an der ETH-Zürich - Prof. E. Gehri



**Bild 4.17**

KERTO-Zugstab in Kombination mit der \*BSB\*-Verbindungstechnik  
Versuchsdurchführung an der ETH-Zürich - Prof. E. Gehri



Ein Beispiel für Furnierschichtholz ist das aus Finnland kommende KERTOPII-S. KERTO-Furnierschichtholz wird aus Fichtenholz hergestellt, wobei die Furnierdicke 3 mm beträgt. KERTO-S wird in Form von Plattenelementen mit Stärken von 27 mm bis 75 mm angeboten. Die Plattenabmessungen betragen 1800 mm / max. 23000 mm. Der Anwendungsbereich dieses Holzwerkstoffes bezieht sich auf stabförmige und flächenhafte - Platten und Scheiben - Bauteile. Eine weitere Anwendung ergibt sich aus dem hohen Homogenisierungsgrad dieses Werkstoffes für Verstärkungsmaßnahmen an der Zugzone biegebeanspruchter BSH-Bauteile.

Versuche an der ETH-Zürich - Prof. E. Gehri (1992) - zeigten ganz klar diesen Homogenisierungseffekt und die daraus resultierenden Vorteile im Gegensatz zum 'normalen' BSH. KERTO-Zuglamellen - 39 mm / 160 mm - lieferten eine mittlere Zugfestigkeit von ca. 47.0 - 48.0 N/mm<sup>2</sup>. Versuche an einem BSH-Biegebalken mit einem QS von 150 mm / 500 mm mit einer Verstärkungszone - 3 \* 27 mm = 81 mm - im Zugbereich des Querschnittes ergaben Biegebruchwerte von  $\sigma_{B,Bruch} = 52.0$  N/mm<sup>2</sup> und 55.8 N/mm<sup>2</sup>. Die Möglichkeit anstatt Fichte andere Holzarten - Tanne, Buche, usw. - zu verwenden, wäre möglich. In den nachfolgenden Bildern 4.16 und 4.17 sind zwei mögliche Anwendungsbeispiele, einerseits als Verstärkungsmaßnahme und andererseits als Zugstab in Kombination mit der \*BSB\*-Verbindungstechnik dargestellt.

Eine andere Möglichkeit einer Verstärkungsmaßnahme besteht durch das von der nordamerikanischen Firma Trus Joist MacMillan hergestellte Furnierstreifenholz PARALAM. Auch bei diesem Werkstoff wird ein erhöhter Homogenisierungsgrad durch das Aufschneiden von Holz in Furnierstreifen mit 12 mm Breite erreicht. Das nachfolgende Bild 4.18 zeigt diesen Werkstoff ebenfalls in Verbindung mit \*BSB\*.

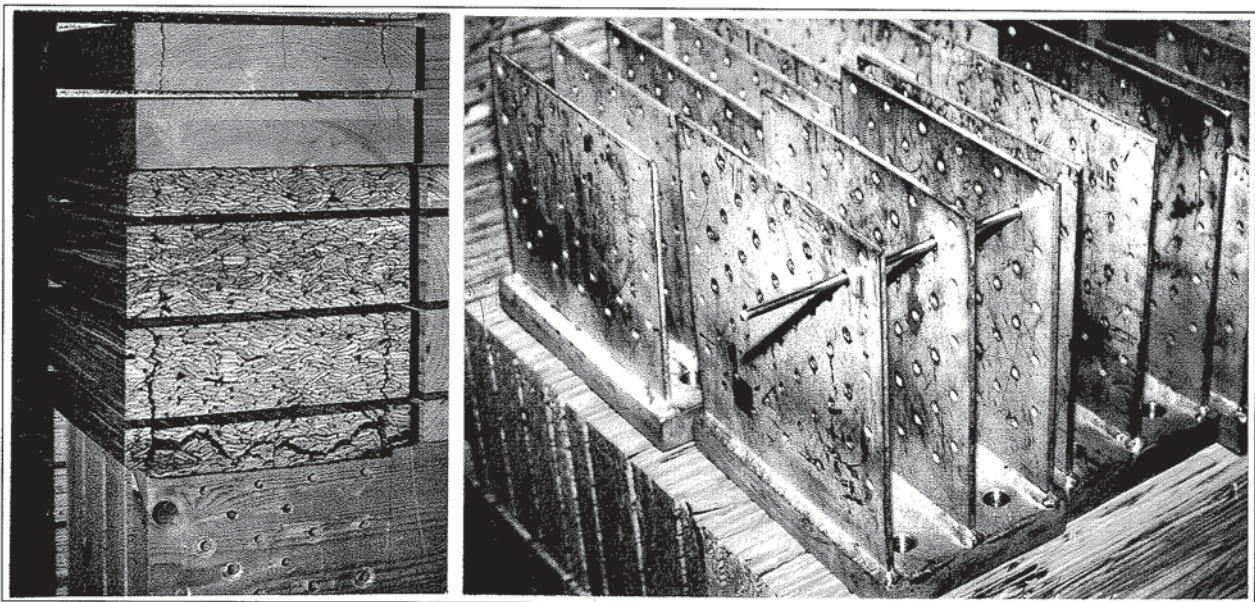


Bild 4.18

PARALAM-Zugstab in Kombination mit der \*BSB\*-Verbindungstechnik  
Versuchsdurchführung an der ETH-Zürich - Prof. E. Gehri



Ein Vergleich der zulässigen Spannungen der beiden oben erwähnten Holzwerkstoffe KERTO-S - Fichte - und PARALAM - Douglas Fir oder Southern Yellow Pine - ist in der Tabelle 4.14 ersichtlich. Die zulässigen Spannungen sind den Zulassungen entnommen.

Tabelle 4.14

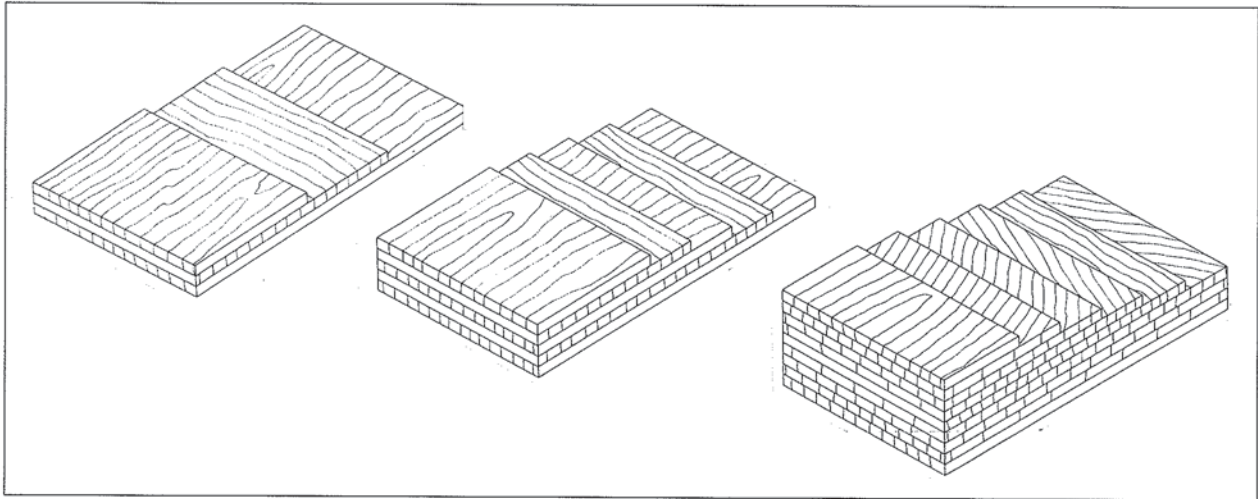
Vergleich der beiden Holzwerkstoffe KERTO-S (für  $h \leq 300$  mm) und PARALAM (für  $h = 305$  mm) hinsichtlich ihrer zulässigen Spannungen

	E-Modull in N/mm <sup>2</sup>	zul. $\sigma_{B,  }$ in N/mm <sup>2</sup>	zul. $\sigma_{Z,  }$ in N/mm <sup>2</sup>	zul. $\sigma_{D,  }$ in N/mm <sup>2</sup>	zul. $\sigma_{D,\perp}$ in N/mm <sup>2</sup>	zul. $\tau_{(SCHUB)}$ in N/mm <sup>2</sup>	zul. $\tau_{(ABSCH.)}$ in N/mm <sup>2</sup>
KERTO-S	13000	20.0	16.0	16.0	3.0	2.0 (yx-E.)	2.0 (yx-E.)
PARALAM	14500	20.0	18.0	20.0	4.6	2.8	2.8

### Sperrholz

In diesen Bereich sind alle plattenförmigen Holzwerkstoffe einzuordnen, wobei die einzelnen Schichten kreuzweise miteinander verleimt sein müssen. Wesentlich ist hier, daß ein symmetrischer Aufbau zur Mittellage in Bezug auf Faserverlauf, Holzart und Schichtdicke erfolgt. Man unterscheidet unter dem Begriff Sperrholz im wesentlichen zwischen der Furnierplatte und der Stabsperrholzplatte, wobei im konstruktiven Ingenieurholzbau hauptsächlich die Furnierplatte zum Einsatz kommt und deshalb auch im weiteren nur noch die Furnierplatte bzw. Forschungs- und Entwicklungsprojekte in diesem Bereich erwähnt werden.

Furniersperrholzplatten bestehen aus mindestens drei kreuzweise miteinander verleimten Furnierschichten. Um einen symmetrischen Plattenaufbau hinsichtlich Faserorientierung, Holzart und Schichtdicke zu gewährleisten, ist meist eine ungerade Anzahl von Furnieren notwendig. Eine gerade Anzahl ist nur dann vorgesehen, wenn die beiden innersten Schichten dieselbe Charakteristik aufweisen. Der Variabilität im Aufbau einer Furnierschichtplatte sind kaum Grenzen gesetzt, vorausgesetzt man hält sich an die vorhin erwähnten Grundsätze des Aufbaus. Dimensionslose Parameter - sogenannte Aufbaufaktoren - ermöglichen die einfache rechnerische Erfassung hinsichtlich der Festigkeits- und Steifigkeitswerte. Die Wahl der Holzart spielt natürlich eine wesentliche Rolle bei der Ermittlung der resultierenden Platteneigenschaften. Grundsätzlich können Furniere aller Holzarten für die Plattenherstellung herangezogen werden, allerdings haben sich im Baubereich vor allem die Buche - DIN-Bezeichnung Bau-Furniersperrholz aus Buche, kurz BFU-BU - durchgesetzt. Weitere gängige Holzarten sind die Birke, die Eiche, die Kiefer und das für die Herstellung der KERTO-Q-Platten verwendete Fichtenholz. Eine weitere Möglichkeit einer sternförmigen Furnieranordnung ergibt das sogenannte Sternholz. Die Furnierlagen sind dabei so angeordnet, daß die benachbarten Furnierfaserlängsrichtungen zueinander einen Winkel von 22.5°, 30.0° oder 45.0° einschließen. Im Bild 4.19 sind einige Aufbaumöglichkeiten für Sperrholzplatten dargestellt.

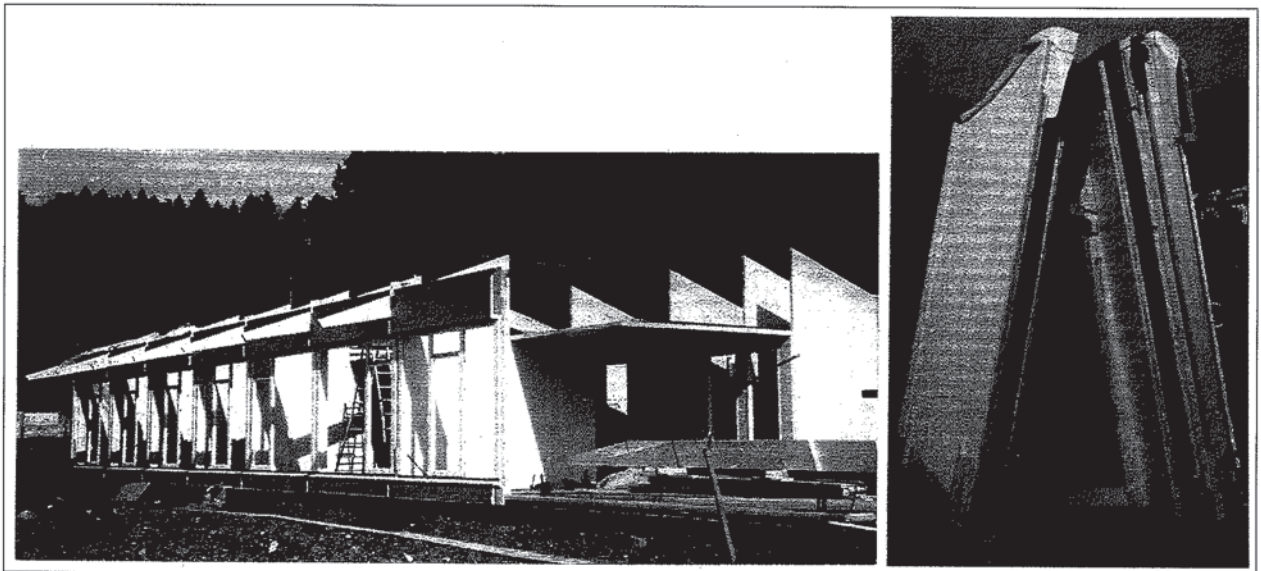


**Bild 4.19**

Dreischichtig, fünfschicht und sternförmig aufgebaute Platte

Eine weitere Möglichkeit, Sperrholzplatten bzw. geschichtete Strukturen im allgemeinen rechnerisch zu erfassen, ist die der Beschreibung des mechanischen Verhaltens jeder einzelnen Schichte und der Koppelung dieser Schichten zu einem Ganzen. Bei Sperrholzplatten handelt es sich dabei um eine starre Koppelung bzw. einem starren Verbund, der durch die Verleimung der einzelnen Furniere gegeben ist. Das Verhalten des starren Verbundes läßt sich vor allem bei Faser-Verbundwerkstoffen - Kunststoffen - im nachfolgenden Abschnitt sowie im Kapitel dieser Arbeit anschaulich zeigen. Die Materialverwandtschaft läßt somit zu, wesentliche Grundkonzepte aus der Kunststofftechnik zu übernehmen, um das Verhalten geschichteter Strukturen aus Holz mit starrem Verbund zu beschreiben. Die Richtigkeit dieser Annahme zeigen auch die zahlreichen FE-Berechnungsbeispiele die mit dem Programm ABAQUS Version 5.2 zum Thema dieser Arbeit durchgeführt wurden. Frühe Arbeiten im Bereich der Berechnung von Sperrholzbauteilen - starrer Verbund - mit der Methode der Finiten Elemente stellen zum Beispiel die von R.W. Clough (1956, 1965), S.B. Dong (1962) und von J. McGlenn und B.J. Hartz (1968) [93] dar. J. McGlenn und B.J. Hartz (1968) [93] verglichen die Ergebnisse ihrer FE-Berechnungen mit den Versuchsergebnissen einer mittig durch eine Einzellast beanspruchten rundum gelenkig gelagerten quadratischen Platte.

Ableitbar aus der Systematik des Aufbaues einer Sperrholzplatte sind auch Entwicklungen im Bereich großflächiger Strukturen wie zum Beispiel Wand- und Deckenelemente aus Brettlamellen möglich. Diese Platten- bzw. Scheibenelemente können ebenfalls mehrschichtig aufgebaut sein. Ein Beispiel dafür ist das erst kürzlich in der Schweiz vorgestellte Bausystem aus Massivholzplatten. Die Platte, welche an der Forschungsabteilung der Ingenieur- und Technikerschule Biel in Zusammenarbeit mit P. Schuler (1993) entwickelt wurde, wird aus Fichten- oder Tannenseitenbrettern hergestellt. Die maximalen Abmessungen dieser Plattenelemente liegen bei 2170 mm / 7200 mm und die maximale Stärke bei 140 mm. Die Platten sind ein-, drei- oder fünfschichtig vorgesehen. Architekt R. Guyer (1993) hat dieses Bausystem für den Bau eines kostengünstigen Einfamilienwohnhauses verwendet. Im Bild 4.20 ist dieses Bausystem dargestellt. Betrachtet man dieses Bausystem, so erkennt man, daß es sich dabei wie bei Sperrhölzern, durch die Verleimung der einzelnen Schichten miteinander, um einen starren Verbund handelt.



**Bild 4.20**

Sperrholzplatten aus Seitenbrettern - starrer Verbund  
(Quelle: Veröffentlichung von C. Zapf)

Eine andere Entwicklung würde eine nachgiebige Verbindung mittels mechanischer Verbindungstechnik der einzelnen Schichten oder besser der einzelnen Brettlamellen darstellen. Beide Varianten, einerseits der starre Verbund und andererseits vor allem der nachgiebige Verbund flächiger, geschichteter Strukturen sind Thema des Hauptteiles dieser Arbeit. Es wird hier versucht, ausgehend von der Einzelschichte, das Problem des Verbundes von flächigen, geschichteten Strukturen an einem Modell mathematisch zu formulieren.



### Die Anisotropie von Faser-Kunststoff-Verbunden

---

#### Allgemeine Betrachtungen zur Anisotropie von Faser-Kunststoff-Verbunden und die Materialverwandtschaft zum Holz und den Holzwerkstoffen

Eine wesentliche Charakteristik faserverstärkter Werkstoffe ist die Anisotropie bezüglich der Steifigkeit und Festigkeit dieser Materialien. Die Anisotropie stellt allerdings keinen Nachteil dar, sondern ist eher als Entwurfsprinzip aufzufassen, um bestimmte und gewünschte Eigenschaften in das Material selbst und in den geometrischen Aufbau eines Bauteiles einzubringen. Durch dieses Prinzip ist es möglich, mit den vorhandenen Verstärkungsfasern - hauptsächlich Glasfasern (GF), Kohlefasern (CF) und Aramidfasern (AF) - diese anisotropen Eigenschaften gezielt einzusetzen. Je nach Bedarf bestimmt der Konstrukteur selbst die Eigenschaften des entstehenden Werkstoffes. Dies geschieht in der Weise, daß Faser und Matrix sowie deren Dicke und Anordnung im Laminat bzw. im Schichtenverbund der Beanspruchung angepaßt wird. Die Kennwerte von Faser-Verbund-Werkstoffen sind demzufolge von der Faser-Matrix-Kombination abhängig. Hinzu kommen noch der Fasergehalt - im Normalfall 20% bis 70% Faseranteil - die Schichtenanzahl, die Schichtdicke und die Faserorientierung. Besonders zwei der vier bekannten Werkstoffparadoxe spielen beim positiven Verhalten von Verbundwerkstoffen eine wesentliche Rolle. Es sind dies die folgenden zwei Paradoxe:

- A.A. Griffith: 'Ein Werkstoff in Faserform hat eine vielfach größere Festigkeit als dasselbe Material in anderer Form, und je dünner die Faser, um so größer ist die Festigkeit.'
- G. Slayter: 'In einem Composite-Material kann die Verbundstruktur als Ganzes Spannungen absorbieren, die die schwächere Komponente zerbrechen würde, während von der 'stärksten' Komponente ein viel höherer Prozentsatz der theoretischen Festigkeit realisiert werden kann, als wenn sie allein beansprucht würde'.

Zu diesem Paradoxon von G. Slayter paßt zudem auch der von D.W. van Krevelen (1984) [54] stammende Ausspruch: 'Das Ganze ist mehr als die Summe der Teile'.

Der Aufbau eines Schichtenverbundes erfolgt in sogenannten Einzelschichten. Diese wiederum stellen den Faser-Matrix-Verbund dar und werden bei einer Berechnung als homogene anisotrope Grundelemente vorausgesetzt. Ein symmetrisch aufgebauter Schichtenverbund stellt einen Sonderfall eines Schichtenverbundes dar und wird 'Laminat' bezeichnet. K. Moser (1992) [11] hat dies in seinem Buch über Faser-Kunststoff-Verbunde ausführlich beschrieben. Hierin sind für geschichtete Verbunde eine Vielzahl von Möglichkeiten des Aufbaues mit Einzelschichten (ES) gegeben, so zum Beispiel:

- Parallelfaser-Kunststoff-Verbunde: Es handelt sich dabei um parallelfaserverstärkte Einzelschichten (P-ES), auch rovingverstärkte bzw. unidirektional verstärkte Einzelschichten (UD-ES) genannt, verschiedener Orientierung mit einem Faservolumenanteil von 45% bis 70%. Zu dieser Gruppe zählen auch die



Verbunde mit gewebeverstärkten Einzelschichten (G-ES), auch multidirektional oder bidirektional verstärkte Einzelschichten genannt, und die Mischverbunde mit P-ES und G-ES.

- Wirrfaser-Kunststoff-Verbunde: Man hat es hier um wirrfaserverstärkte Einzelschichten (W-ES), auch mattenverstärkte Einzelschichten genannt, zu tun. Zumeist sind es allerdings Mischverbunde, aufgebaut aus W-ES und G-ES.

Im nachfolgenden Bild 4.21 aus einer Veröffentlichung von A. Weber und W. Wilhelm (1989) [63] sind faserverstärkte Verbundwerkstoffe systematisch mit unterschiedlichem Einzelschichtaufbau dargestellt.

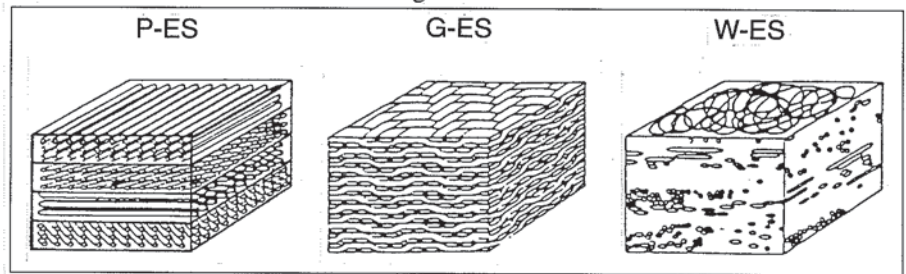


Bild 4.21

parallelfaserverstärkte Einzelschichten (P-ES) - Verstärkung durch Rovings  
gewebeverstärkte Einzelschichten (G-ES) - Verstärkung durch Gewebe  
wirrfaserverstärkte Einzelschichten (W-ES) - Verstärkung durch Matten

### Die beiden Hauptkomponenten der Faser-Kunststoff-Verbunde

#### Der isotrope Matrixwerkstoff

Die heute üblichen und eingesetzten Kunststoffmatrices sind die beiden Gruppen der Duromere und der Thermoplaste. Wichtige Eigenschaften, die eine Matrix aufweisen muß, sind, da die Matrix die Aufgabe der Spannungsübertragung von Faser zu Faser hat, das plastische Verformungsverhalten, gewisse Dämpfungseigenschaften bei eventuell auftretenden lokalen Brüchen und gute Haftungseigenschaften an den Fasern. Welche Matrix für eine bestimmte Anwendung am geeignetsten ist, hängt von Faktoren wie der Bauteilgröße, dem Herstellverfahren, der Wahl der Faserprodukte und der Einwirkungsarten ab.

Duromere Kunststoffe sind vernetzbare und im ausgehärteten Zustand unlösliche Kunststoffe. Die ursprüngliche Konsistenz dieser Harze ist entweder zähflüssig, aufschmelzbar oder pulverförmig. Man unterscheidet drei Typen hinsichtlich des Reaktionsablaufes: Polymerisation, Polyaddition und Polykondensation. Diese Reaktionsharze verhalten sich nach dem stufen- oder kettenförmigen chemischen Ablauf viskoelastisch. Vergleicht man die Steifigkeit dieser Matrices so beträgt diese nur etwa 1% bis 5% der Steifigkeit der Faserwerkstoffe. Die Matrixfestigkeit nur etwa 5% der Faserfestigkeit. Beispiele sind die Ungesättigten Polyesterharze (UP-Harze) und die Epoxidharze (EP-Harze). In der nachfolgenden Tabelle 4.15 sind für die beiden genannten Harze Werkstoffkennwerte angegeben.

**Tabelle 4.15**

Werkstoffkennwerte für UP-Harze und EP-Harze (20°C)  
nach K. Moser (1992) [11]

Matrix	Dichte in g/cm <sup>3</sup>	E-Modul in N/mm <sup>2</sup>	Zugfestigkeit N/mm <sup>2</sup>	Bruchdehnung ‰	Übergangstemp. °C
UP-Harze	1.20 - 1.30	3000 - 4200	40 - 70	15 - 40	70 - 120
EP-Harze	1.10 - 1.14	3000 - 6000	30 - 100	10 - 60	50 - 300

Thermoplastische Kunststoffe finden ihre Anwendung als sogenannte technische Kunststoffe für Hochleistungsbauteile. Beispiele dieser Kunststoffe sind etwa die Polyamide (PA), das Polypropylen (PP) und die hochwärmebeständigen Polymide (PI). In der Tabelle 4.16 sind für die genannten Kunststoffe Werkstoffkennwerte angegeben.

**Tabelle 4.16**

Werkstoffkennwerte für PA, PP und PI - Richtwerte  
nach K. Moser (1992) [11]

Matrix	Dichte in g/cm <sup>3</sup>	E-Modul in N/mm <sup>2</sup>	Zugfestigkeit N/mm <sup>2</sup>	Bruchdehnung ‰	Übergangstemp. °C
Polyamid (PA 66)	1.14	3300	82	-----	110 - 180
Polypropylen (PP)	0.90	1000 - 1500	25 - 250	-----	100 - 120
Polymide (PI)	1.42	2000 - 3000	70 - 150	-----	250 - 320

#### Die isotropen und anisotropen Faserwerkstoffe

Bei den Faser-Verbund-Werkstoffen sind die Faserwerkstoffe die eigentlichen Träger der mechanischen Eigenschaften. Die verschiedenartigen Faserwerkstoffe können vereinfachend und anschaulich auch als 'Bewehrung' bzw. 'Verstärkung' gesehen werden, wobei die folgende Gliederung nach K. Moser (1992) [11] möglich ist. Es sind dies die am häufigsten verwendeten Fasermaterialien:

- Glasfasern (GF)

In der nachfolgenden Tabelle 4.17 sind Werkstoffkennwerte für zwei Glasfaserarten enthalten. Es sind dies Kennwerte für Fasern aus E-Glas und S-Glas. E-Glas stellt heute die Standardglasfaser dar, wobei diese aus dem Bereich der Elektrotechnik kommt. S-Glas ist eine speziell entwickelte Faser mit hoher Festigkeit.



Tabelle 4.17

Werkstoffkenngrößen für E-Glas und S-Glas nach K. Moser (1992) [11], D.W. van Krevelen (1984) [54], P. McMullen (1984) [55] und K.-H. Sprenger (1988) [61]

Faserart	Dichte $\rho$ in g/cm <sup>3</sup>	Zugfestigk. in N/mm <sup>2</sup>	E-Modul in N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{z,Bruch}/\rho$ in km	$E/\rho$ in km	Ø Faser in mm	Bruchd. ‰
GF <sub>E</sub>	2.50 - 2.60	2000 - 3400	70000 bis 73000	80 - 130	ca. 2800	0.010	30
GF <sub>S</sub>	2.50	3000 - 4600	85000 bis 87000	120 - 185	ca. 3400	0.010	46

- Kohlefasern (CF)

In der nachfolgenden Tabelle 4.18 sind Werkstoffkennwerte für zwei Kohlefasern enthalten. Es sind dies HM-Kohlefasern - hochmoduliger Fasertyp - und HT-Kohlefasern - hochfester Fasertyp.

Tabelle 4.18

Werkstoffkenngrößen für HM- (A) und HT-Kohlefasern (B) nach K. Moser, D.W. van Krevelen, P. McMullen und K.-H. Sprenger

Faserart	Dichte $\rho$ in g/cm <sup>3</sup>	Zugfestigk. in N/mm <sup>2</sup>	E-Modul in N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{z,Bruch}/\rho$ in km	$E/\rho$ in km	Ø Faser in mm	Bruchd. ‰
CF-HM-(A)	1.80 - 2.00	1400 - 3200	300000 bis 550000	70 - 180	15000 bis 30550	0.009	5 - 10
CF-HT-(B)	1.70	2500 - 3500	210000 bis 250000	145 - 205	12350 bis 14700	0.009	5 - 10

- Aramidfasern (AF)

Neben der hohen Festigkeitswerte ist die geringe Dichte dieses Fasertyps von Bedeutung. In der nachfolgenden Tabelle 4.19 sind Werkstoffkennwerte für HM- und HT-Aramidfasern angegeben.

Tabelle 4.19

Werkstoffkennwerte für HM- und HT-Aramidfasern nach D.W. van Krevelen (1984) [54]

Faserart	Dichte $\rho$ in g/cm <sup>3</sup>	Zugfestigk. in N/mm <sup>2</sup>	E-Modul in N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{z,Bruch}/\rho$ in km	$E/\rho$ in km	Ø Faser in mm	Bruchd. ‰
AF-HM	1.45	2800	125000 bis 127000	193 - 197	8620 - 8760	----	----
AF-HT	1.44	3600	100000	250	6940	----	----

Wesentliche Kriterien bei der Wahl des geeigneten Verstärkungsmaterials sind die spezifische Festigkeit  $\sigma_{z,Bruch}/\rho$  und die spezifische Steifigkeit  $E/\rho$ .



**Analogien zwischen Holz sowie Holzwerkstoffen und Faser-Kunststoff-Verbunden**

Betrachtet man die Aufgabenbereiche der einzelnen Komponenten der Faser-Kunststoff-Verbunde und des Werkstoffes Holz, so erkennt man, daß diese ident sein müssen. Bei beiden Werkstoffen dienen die Matrixwerkstoffe dazu, die 'Bewehrung' bzw. 'Verstärkung' zu tragen, d.h. in einer bestimmten Form zu halten. Bei Faser-Kunststoff-Verbunden sind die Matrices die bereits erwähnten Kunststoffgruppen der Duomere und Thermoplaste. Beim Werkstoff Holz ist dies die in Form einer Wirrfaserstruktur vorhandene Hemizellulose sowie das Lignin.

Als Verstärkungsfasern kommen bei Faser-Kunststoff-Verbunden vor allem Glasfasern, Kohlefasern und Aramidfasern - 45% bis 70% Faservolumenanteil - zur Anwendung. Beim Werkstoff Holz sind dies im Mikrobereich der Holzfaserzellwand die Cellulosefasern - 42% Faservolumenanteil - gebunden durch die Hemizellulosewirrfaserstruktur und teilweise durch das Lignin. Nachfolgend sind in der Tabelle 4.20 die Werkstoffkenngrößen für Zellulose- und Holzfasern dargelegt. Die Hauptaufgabe des Lignins ist es, den Verbund zwischen den einzelnen Holzfasern herzustellen.

**Tabelle 4.20**

Werkstoffkenngrößen für HT-Cellulose nach D.W. van Krevelen (1984) [54] und Wood fibre nach P. McMullen (1984) [55]

Faserart	Dichte $\rho$ in g/cm <sup>3</sup>	Zugfestigk. in N/mm <sup>2</sup>	E-Modul in N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{z.Bruch}/\rho$ in km	E/ $\rho$	Ø Faser in mm	Bruchd. ‰
HT-Cellulose	1.50	750	25000	50	1667	-----	-----
Wood fibre	1.50	896	75000	60	5000	-----	-----

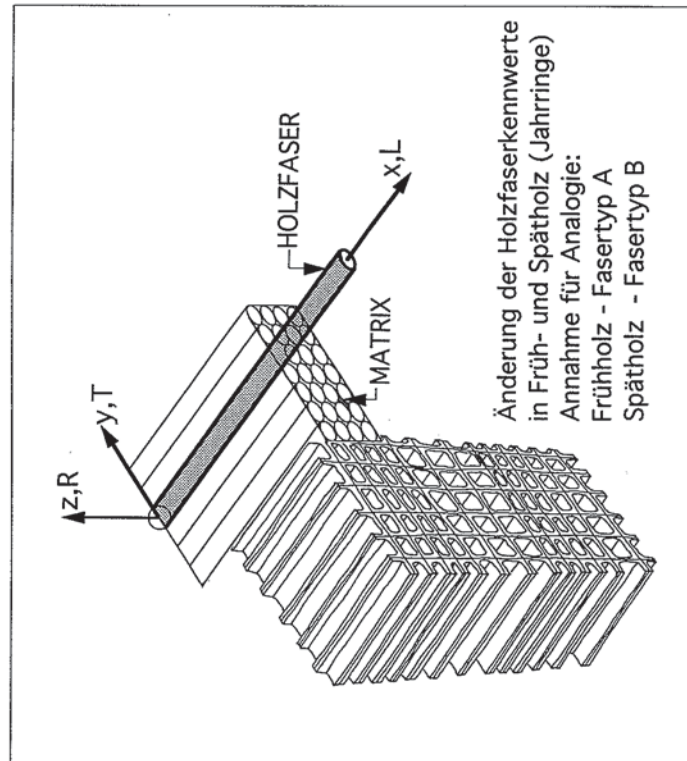
Im Bild 4.22 und Bild 4.23 ist die Materialverwandtschaft zwischen Holz bzw. Holzwerkstoffen und Faser-Verbund-Werkstoffen dargestellt.

Aus den Analogiebetrachtungen der Bilder 4.22 und 4.23 lassen sich bestimmte Schlußfolgerungen ziehen. Betrachtet man eine aus Brettlamellen geschichtet aufgebaute Platte - Brettsperrholz - so ist, je nach Verbundgrad zwischen den Einzelschichten, eine bestimmte Gliederung möglich. Es sind dies die beiden Extreme einerseits des starren Verbundes und andererseits die ohne Verbund geschichtet aufgebaute flächige Holzkonstruktion. Dazwischen liegt der sogenannte nachgiebige Verbund, d.h. die Einzelschichten ES der geschichteten Holzstruktur sind mechanisch mit zum Beispiel stiftförmigen Verbindungsmitteln verbunden. Im Bild 4.24 ist eine geschichtete ebene Holzstruktur, gebildet mit Brettlamellen in fünf Einzelschichten ES, dargestellt.

# ANALOGIE ZWISCHEN HOLZ SOWIE HOLZWERKSTOFFEN UND FASER-KUNSTSTOFF-VERBUNDEN

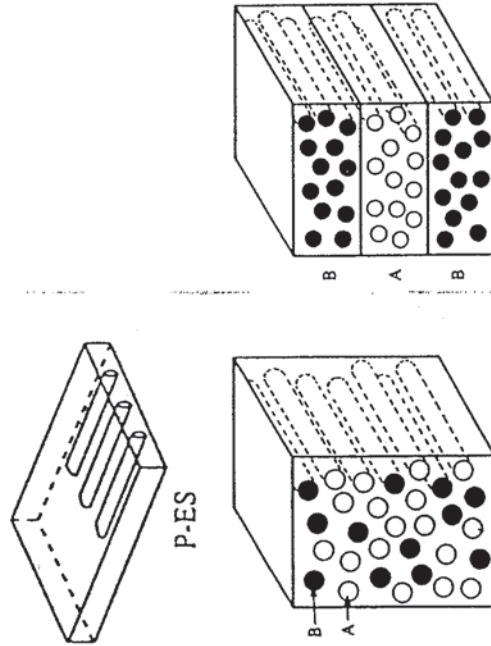
MAKROBEREICH

HOLZFASER - LIGNIN (MATRIX) - VERBUND



FASER - KUNSTSTOFF (MATRIX) - VERBUND

- parallelfaserverstärkte Einzelschicht P-ES
- Fasermaterial: CF, GF od. AF in Form von Rovings



unidirektionale Fasern oder Faserbündeln (Rovings)  
Hybridquerschnitte mit Fasertyp A und Fasertyp B

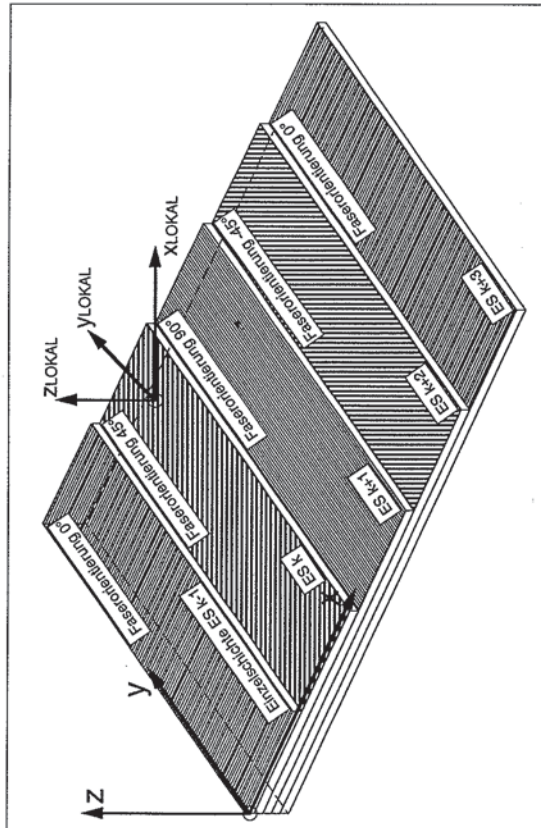
Bild 4.22

Analogiebetrauchtungen für den Werkstoff Holz - Makrobereich

# ANALOGIE ZWISCHEN HOLZ SOWIE HOLZWERKSTOFFEN UND FASER-KUNSTSTOFF-VERBUNDEN

MAKROBEREICH

Schichtanzahl: fünfschichtiges Furniersperrholz - Lagenholz  
 Faserorientierung: 0°/45°/90°/-45°/0°  
 Fasern: Holzfasern in Form von Furnieren  
 Matrix: Lignin (Verbund zwischen den Holzfasern)  
 Starrer Verbund zwischen den Einzelschichten ES durch Verleimung  
 Annahme von homogenen, anisotropen Einzelschichten



Schichtanzahl: fünfschichtiges Faser-Kunststoff-Verbundbauteil  
 Faserorientierung: 0°/45°/90°/-45°/0°  
 Fasern: Glasfasern (GF), Kohlefasern (CF), Aramidfasern (AF) - unidirektional  
 Matrix: Duromere, Thermoplaste  
 Starrer Verbund zwischen den Einzelschichten ES - klassische Laminattheorie  
 Annahme von homogenen, anisotropen Einzelschichten

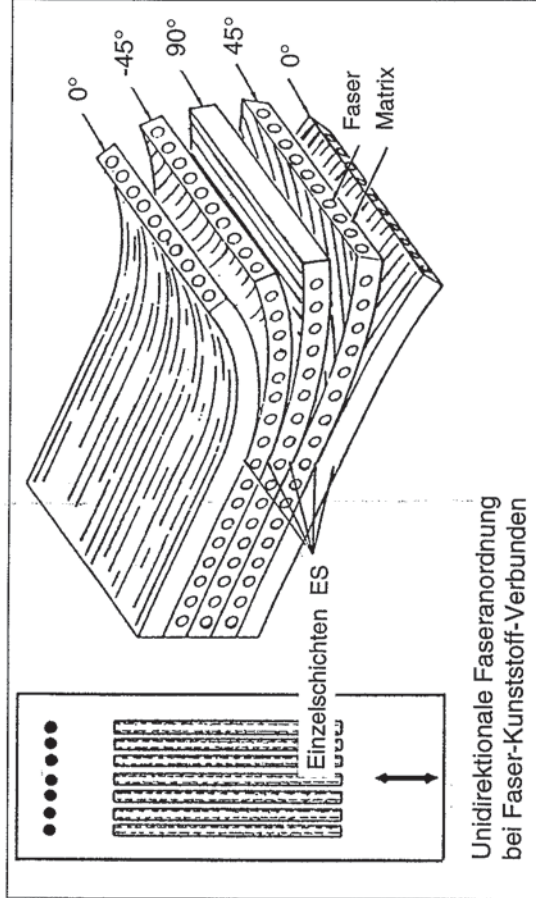
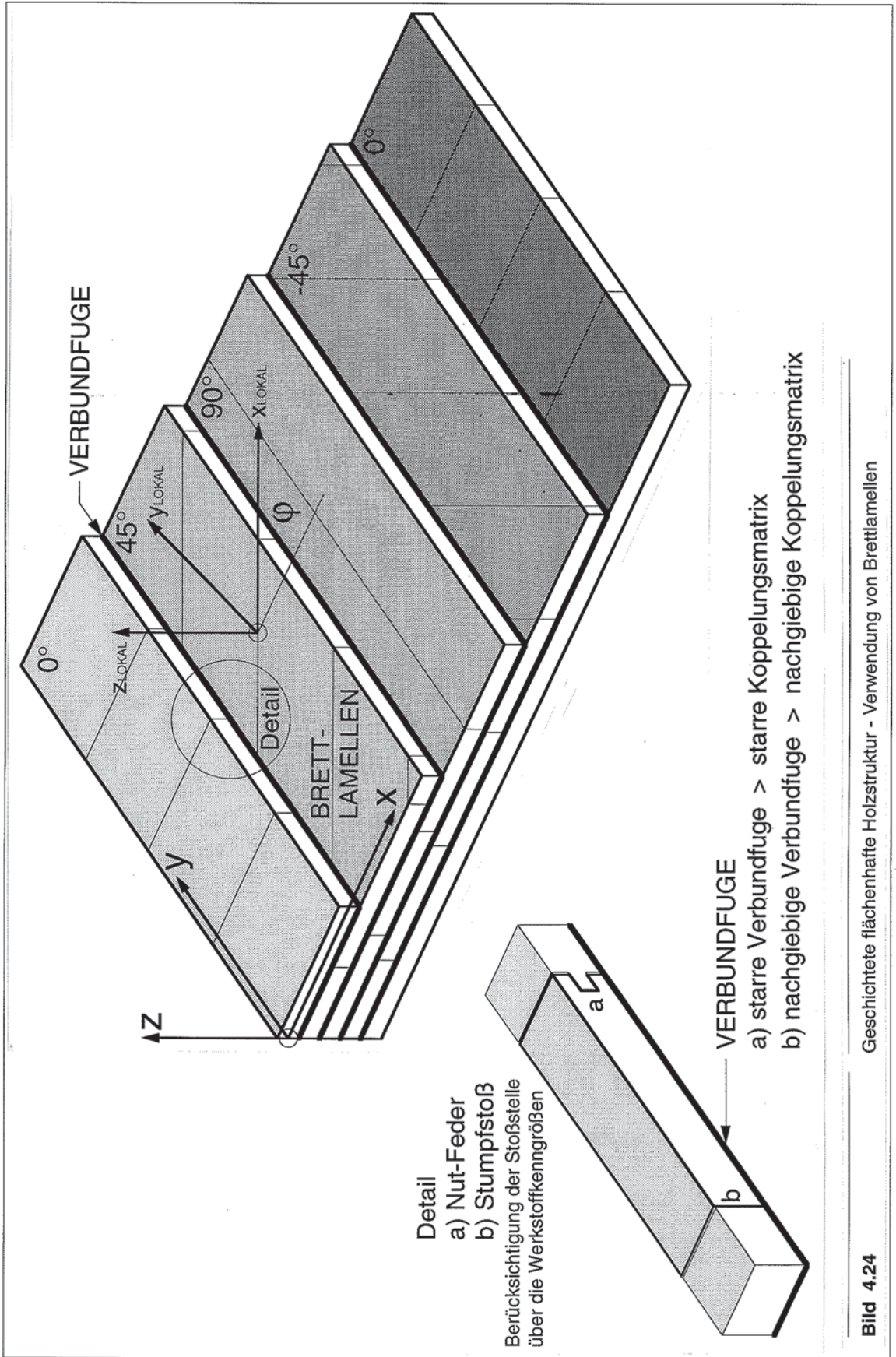


Bild 4.23

Analogiebetrachtungen für geschichtete Holzwerkstoffe - Makrobereich





Geschichtete flächenhafte Holzstruktur - Verwendung von Brettlamellen

Bild 4.24



---

# 5. Kraft- Verschiebungsverhalten einer Stiftverbindung - Modellierung

---

## **Stiftförmige, nachgiebige Verbindungstechnik**

---

### **Einflußfaktoren auf das Tragverhalten eines stiftförmigen Verbindungsmittels - Beeinflussungsgruppen**

- Holz
- Stift - z.B. Nagel oder Holzschrauben
- Verbindungscharakteristik
- Belastungsart

Innerhalb der oben erwähnten Gruppen sind eine Vielzahl von Parametern wirksam, welche nachfolgend kurz angesprochen werden. Weiters ist zu erwähnen, daß sich nicht nur innerhalb einer Gruppe, sondern auch über die jeweilige Gruppe hinaus diese Parameter gegenseitig beeinflussen werden.

### **Beeinflussungsgruppe Holz**

Nachfolgend sind einige, das Holz betreffende Parameter angeführt, die eine stiftförmige Verbindung beeinflussen.

- Holzart  
Es ist von Bedeutung welche Holzart - Weichholz oder Hartholz - verwendet wird.
- Rohdichte  $\rho_k$  des Holzes  
Diese ist für die gesamte Verbindungscharakteristik von Bedeutung. Vor allem ist zu beachten, daß sowohl innerhalb einer Holzart als auch in einer Holzlamelle Dichteunterschiede auftreten werden.
- Holzfeuchtegehalt - Ausgleichsfeuchtigkeit  
Der Feuchtegehalt des Holzes ist abhängig von der Nutzung des Bauwerkes und vom Umgebungsklima. Vor allem ist es von Bedeutung ob das betrachtete Bau-



teil außen oder innen liegt und ob es sich um ein geschlossenes oder offenes Bauwerk handelt.

- Spätholzanteil - Frühholzanteil  
Diese sind abhängig vom Standort des Baumes, den Klimaeinflüssen und demzufolge von den Wachstumsperioden.
- Ausschnitt aus dem Stamm - Holzentnahme vom Stamm  
Es spielt eine Rolle, aus welchen Querschnittszonen das Holz stammt und aus welchen Zonen längs des Stammes das Holz entnommen wird.

### Beeinflussungsgruppe Stift

- Material  
Die Stahlgüte eines stiftförmigen, mechanischen Verbindungsmittels kann variiert werden. Es geschieht dies derart, daß die Fließgrenze der jeweiligen Stahlgüte Berücksichtigung findet. Im Modell von K.W. Johansen, A. Meyer (1957) [79] und T. Möller sowie in der ENV 1995-1 findet die Fließgrenze Eingang.
- Geometrie  
Bei stiftförmigen Verbindungsmitteln - Nägeln und Holzschrauben - spielt die Kopfform, der Kopfdurchmesser sowie die Stiftlänge und der Stiftdurchmesser eine wesentliche Rolle bei der Ermittlung der Traglast des Verbindungsmittels. Ebenso von Bedeutung ist die Querschnittsform des Verbindungsmittels.
- Oberflächenbeschaffenheit des Nagelschaftes  
Die Oberflächenbeschaffenheit beeinflusst den Auszieh Widerstand - Reibungsverhalten zwischen Holz und Stift - und damit natürlich das gesamte Tragverhalten der Verbindung.
- Maßhaltigkeit  
Die Maßhaltigkeit bezieht sich auf die oben erwähnten Stiftparameter - Stahlgütenabweichung, Geometrieabweichung und Abweichung in der Struktur der Oberflächenbeschaffenheit.

### Beeinflussungsgruppe Verbindungscharakteristik

- Verbindungstyp  
Hier unterscheidet man bei einer stiftförmigen Verbindungstechnik im wesentlichen zwischen einschnittigen, zweiseitigen und mehrseitigen Verbindungen.
- Stiftanzahl  
Die Anzahl der Stifte nebeneinander, die Anzahl der Stiftreihen sowie die Anzahl der Stifte hintereinander beeinflussen das Tragverhalten einer stiftförmigen Verbindung.
- Stiftanordnung - Nagelungsmuster  
Der Abstand der Stifte untereinander und von den Rändern.
- Reibungseffekte zwischen den Kontaktflächen
- Änderung der Belastungssituation sowie Änderung der Nutzung

### Beeinflussungsgruppe Belastungsart

- Lastdauer  
Die ENV 1995-1 unterscheidet zwischen dauernd, lang, mittel, kurz und sehr kurz wirkenden Beanspruchungen.
- Belastungstyp  
Hier unterscheidet man zwischen statischen und dynamischen Beanspruchungen sowie Dauerschwingbeanspruchungen und Wechsel- Schwellbeanspruchungen.
- Kombinierte Beanspruchungen  
Darunter versteht man die Beanspruchung eines stiftförmigen Verbindungsmittels in mehreren Richtungen. Weiters sind Interaktionen zwischen diesen Beanspruchungsrichtungen zu berücksichtigen.

### Kraft-Verschiebungsverhalten einer Stiftverbindung

Bei dem im Kapitel 4 und Kapitel 6 beschriebenen Aufbau einer geschichteten, flächenhaften Holzstruktur aus Brettlamellen mit unterschiedlicher Orientierung der Materialhauptachsen der Einzelschichten ES ergibt sich, um das Kraft-Verschiebungsverhalten der nachgiebigen Verbundfuge in beliebiger Richtung zu beschreiben, die Notwendigkeit, Interaktionsmodelle - Modell 1 und Modell 2 - in Abhängigkeit des Steifigkeitsverhältnisses parallel und senkrecht zur Faserrichtung zu bilden. Diese sollen letztlich Eingang in die 2D-Stoffgleichungen der Verbundfuge finden.

### Beanspruchung parallel zur Faser

Das nachfolgende Bild 5.1 zeigt die Beanspruchung parallel zur Faser - Beanspruchung  $F_{||}$  in Richtung der Fugenwiderstandskomponente  $C_{||}$  - und das dazu gehörende Last-Verschiebungs-Diagramm, hervorgehoben durch die zwei Tangenten an die entsprechende Kurve.

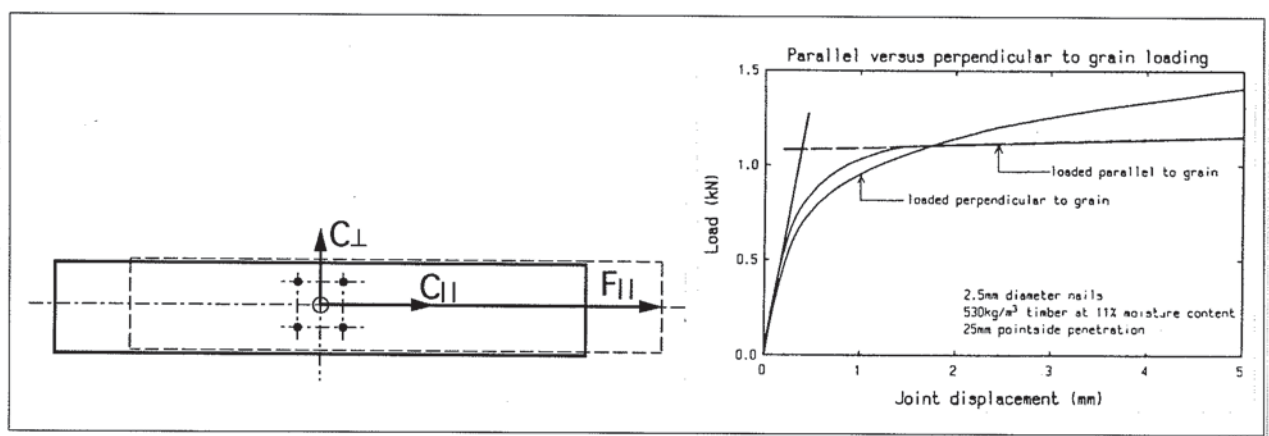
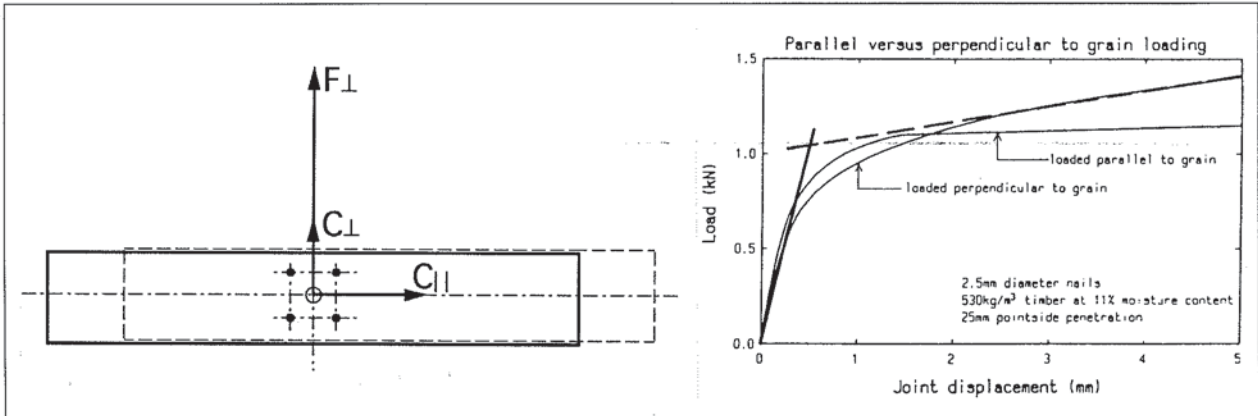


Bild 5.1

Beanspruchung parallel zur Faser - Diagramm lt. R.D. Hunt und A.H. Bryant (1990) [78]

**Beanspruchung senkrecht zur Faser**

Das nachfolgende Bild 5.2 zeigt die Beanspruchung senkrecht zur Faser - Beanspruchung  $F_{\perp}$  in Richtung der Fugenwiderstandskomponente  $C_{\perp}$  - und das dazu gehörende Last-Verschiebungs-Diagramm, hervorgehoben durch die zwei Tangenten an die entsprechende Kurve.

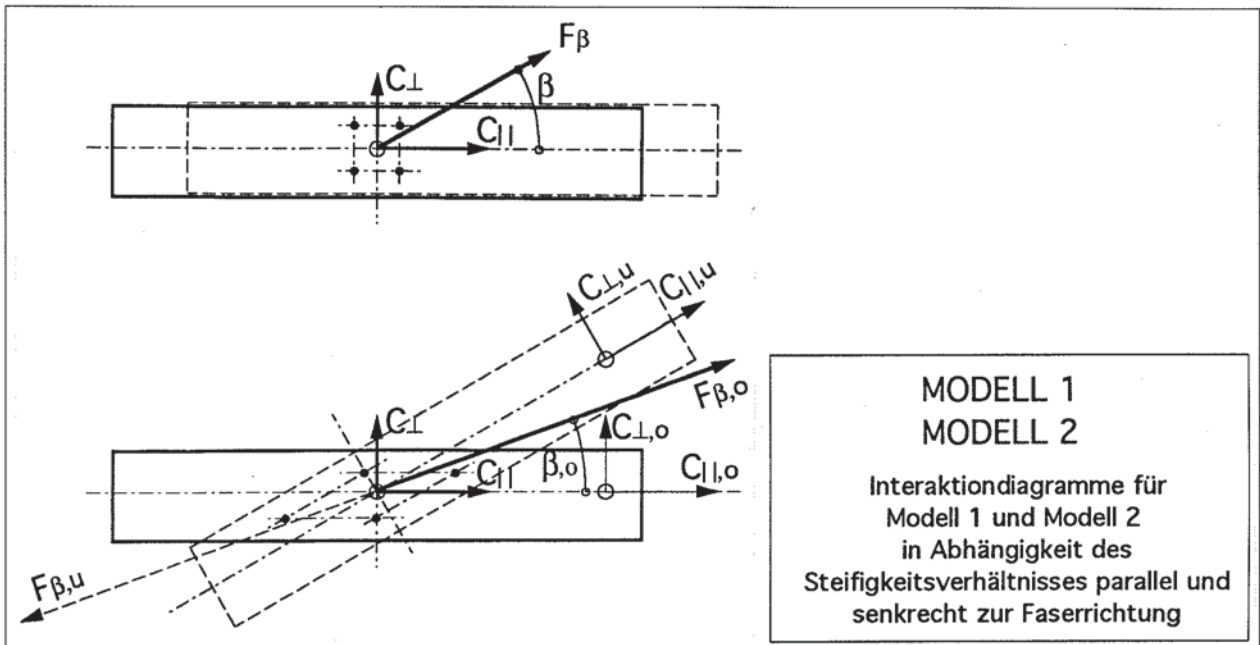


**Bild 5.2**

Beanspruchung senkrecht zur Faser - Diagramm lt. R.D. Hunt und A.H. Bryant (1990) [78]

**Beanspruchung schräg zur Faser**

Für die Beanspruchung schräg zur Faser werden zwei Modelle - Modell 1 und Modell 2 - näher betrachtet.



**Bild 5.3**

Beanspruchung schräg zur Faser - Interaktionsmodelle 1 und 2



Modell 1 und Modell 2 wird jeweils durch eine Interaktion zwischen den beiden Beanspruchungsrichtungen parallel und senkrecht zur Faser gebildet. Im Bild 5.3 ist die grundsätzliche Situation bei einer Beanspruchung schräg zur Faser dargestellt.

### Erläuterung der beiden Modelle 1 und 2

Die Problematik wird in den nachfolgenden Bildern 5.4 und 5.5 erläutert. Im Bild 5.4 sind zwei Lamellen - Lamelle oben = Einzelschichte ES oben und Lamelle unten = Einzelschichte ES unten - dargestellt. In der Kontaktfläche der beiden Lamellen ergibt sich bei einer beliebigen Beanspruchung des Bauteiles die Fugenkraft  $F$ . Aus der Gleichgewichtsbedingung ergibt sich  $F = F_{\beta,o} = F_{\beta,u}$ . Weiters ist zu vermerken, daß die Lamellenstärke  $t_o \neq t_u$  sein kann. In beiden Lamellen sind die Fugenwiderstandskomponenten  $C_{||,o}$ ,  $C_{\perp,o}$  sowie  $C_{||,u}$  und  $C_{\perp,u}$  ersichtlich.

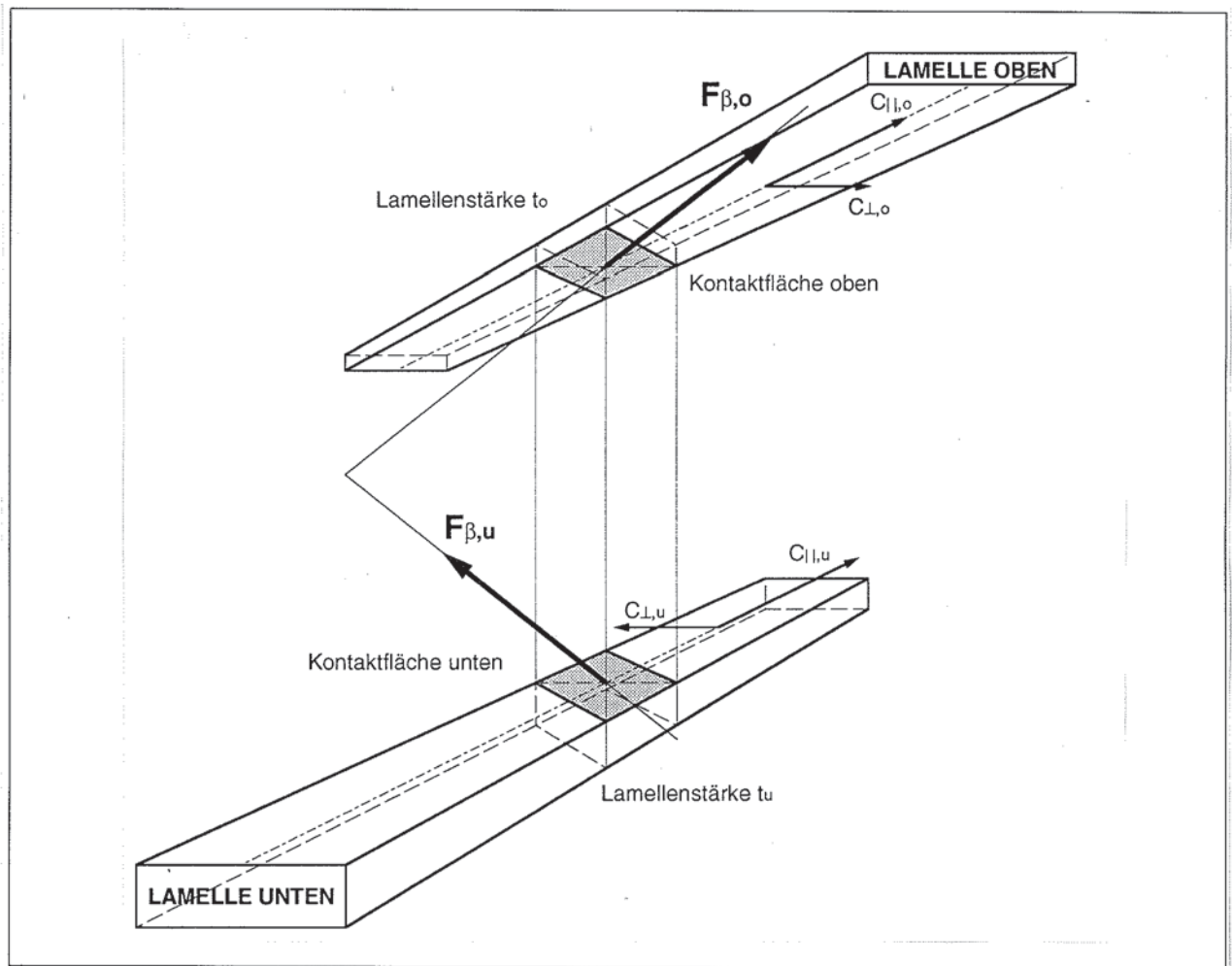


Bild 5.4

Kontaktfläche zwischen zwei Lamellen

Die Brettlamellen können, wie bereits erwähnt, nicht nur unterschiedliche Brettstärken, sondern auch unterschiedliche Werkstoffkenngrößen besitzen. Mit Bild 5.5 lassen sich die beiden Interpolationsmodelle erklären.

- Modell 1  
Für das Modell 1 ist die Krafrichtung  $\beta$  und die Verschiebungsrichtung  $\gamma$  gleich.
- Modell 2  
Für das Modell 2 ist die Krafrichtung  $\beta$  und die Verschiebungsrichtung  $\gamma$  verschieden.

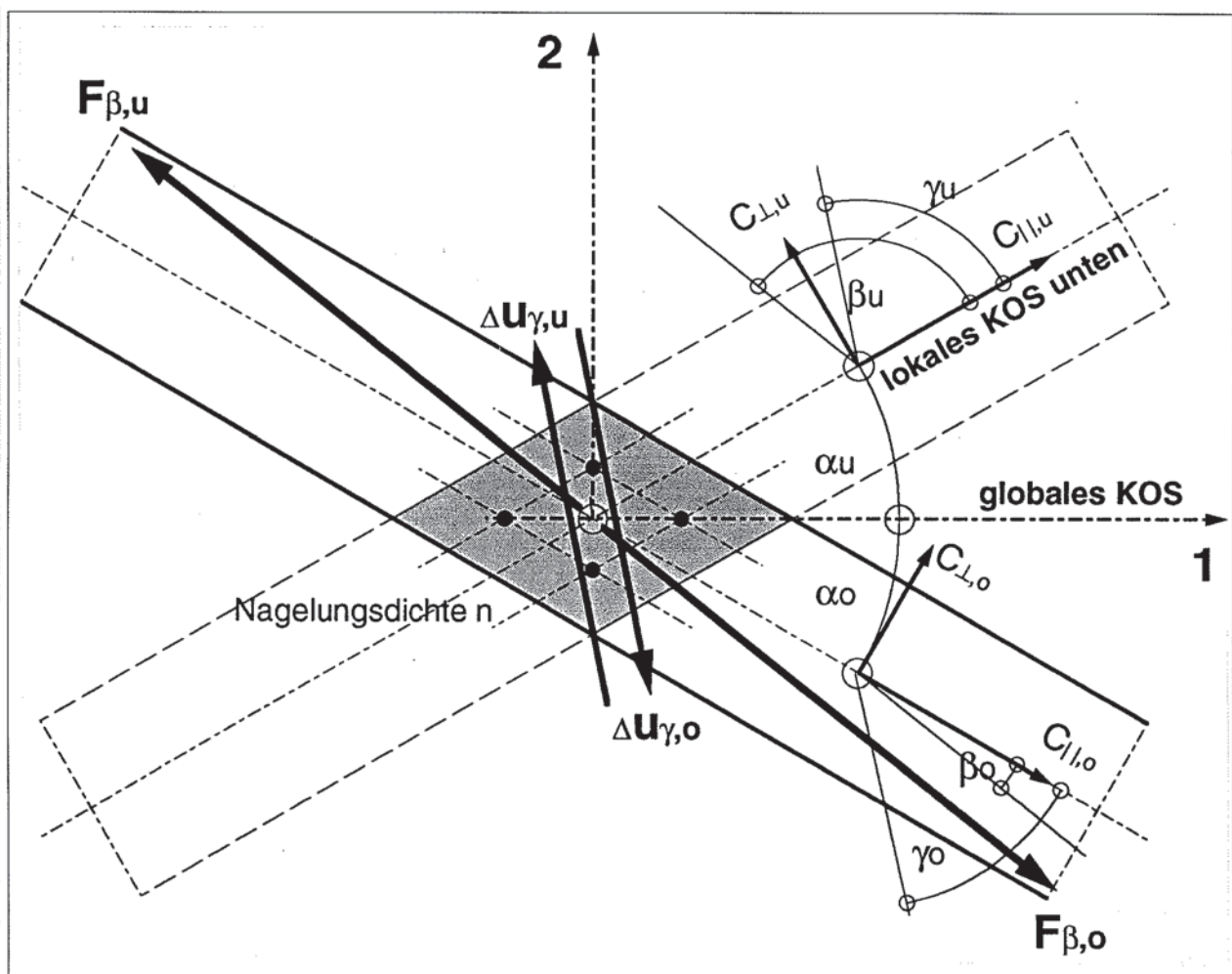


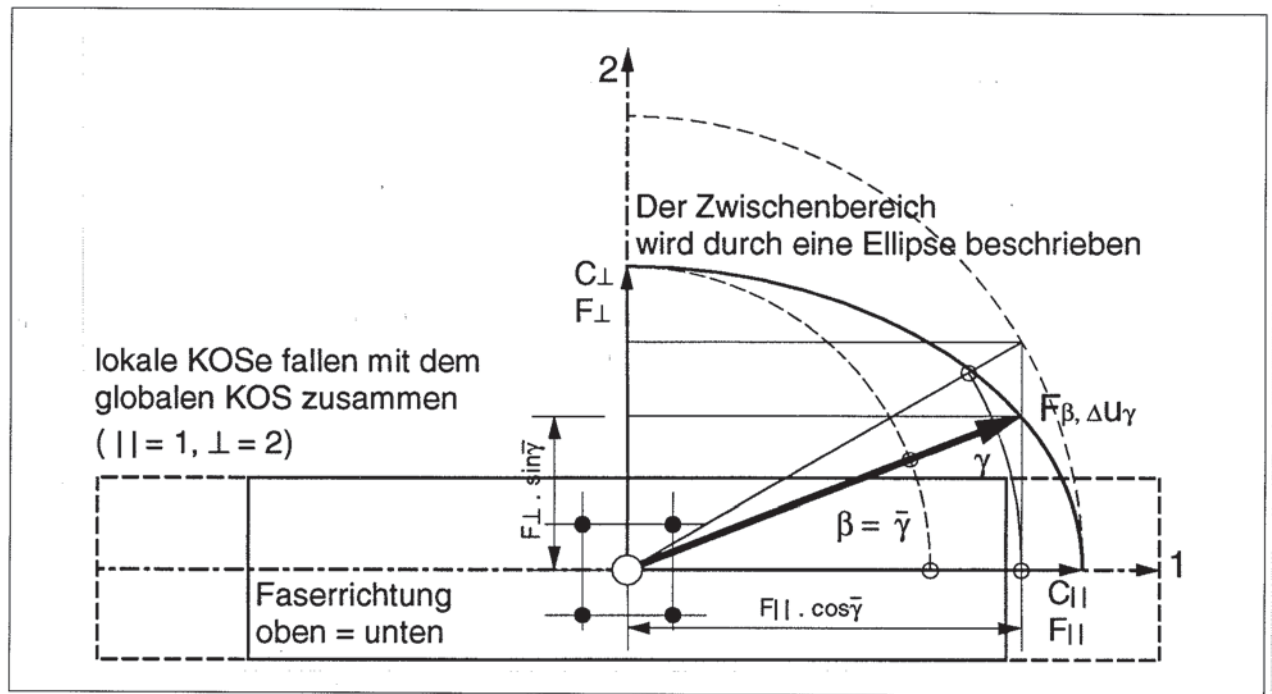
Bild 5.5

Kräfte  $F_{\beta,u}$  und  $F_{\beta,o}$  sowie Verschiebungen  $\Delta u_{\gamma,u}$  und  $\Delta u_{\gamma,o}$  in der Kontaktfläche zweier Lamellen

**Modellformulierung einer in der Ebene in einer beliebigen Richtung beanspruchten Stiftverbindung**

**MODELL 1**

Wie bereits erwähnt, ist für das Modell 1 die Krafrichtung  $\beta$  mit der Verschiebungsrichtung  $\gamma$  gleich. Im Bild 5.6 ist für das Modell 1 diese Situation dargestellt. Die Kraft  $F_{\beta}$  wirkt in Richtung der Verschiebung  $\Delta u_{\gamma}$ .  $\bar{\gamma}$  ist der für die weitere Berechnung erforderliche Ellipsenparameter.



**Bild 5.6**

Beanspruchung schräg zur Faser - Kraft wirkt in Richtung der Verschiebung

Es ergibt sich folgender Zusammenhang für die Kraftkomponenten  $F_{\beta, II}$  und  $F_{\beta, \perp}$ .

$$F_{\beta, II} = F_{II} \cdot \cos \bar{\gamma} \quad (G 5.1)$$

$$F_{\beta, \perp} = F_{\perp} \cdot \sin \bar{\gamma} \quad (G 5.2)$$

**Größe der Beanspruchung**

$$\left[ \frac{F_{\beta, II}}{F_{II}} \right]^2 + \left[ \frac{F_{\beta, \perp}}{F_{\perp}} \right]^2 = 1.0 \quad (G 5.3)$$

$$\frac{F_{\beta, \perp}}{F_{\beta, II}} = \frac{F_{\perp}}{F_{II}} \cdot \frac{\sin \bar{\gamma}}{\cos \bar{\gamma}} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad (G 5.4)$$



Damit ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$F_{\beta}^2 = \frac{F_{II}^2 \cdot (1.0 + \tan^2 \beta)}{1.0 + \frac{F_{II}^2}{F_{\perp}^2} \cdot \tan^2 \beta} \quad (\text{G 5.5})$$

$$C^2 = \frac{1.0}{\cos^2 \beta + \frac{\sin^2 \beta}{f^2}} \quad (\text{G 5.6})$$

Für die G 5.6 sind die folgenden Beziehungen maßgebend:

$$C_{\text{RES}} = \frac{F_{\beta}}{\Delta u_{\gamma}} \quad (\text{G 5.7})$$

$$C = \frac{C_{\text{RES}}}{C_{II}} = \frac{F_{\beta}}{F_{II}} \quad (\text{G 5.8})$$

$$f = \frac{F_{\perp}}{F_{II}} = \frac{C_{\perp}}{C_{II}} \quad (\text{G 5.9})$$

### **Richtung der Beanspruchung**

Für das Modell 1 ist die Krafrichtung  $\beta$  und die Verschiebungsrichtung  $\gamma$  gleich.

$$\gamma = \beta \quad \tan \gamma = \tan \beta \quad (\text{G 5.10})$$

Damit gilt:

$$F_{II} = C_{II} \cdot \Delta u_{II} \quad (\text{G 5.11})$$

$$F_{\beta} = C_{\text{RES}} \cdot \Delta u_{\gamma} \quad (\text{G 5.12})$$

### **MODELL 2**

Es ergibt sich folgender Zusammenhang für die Kraftkomponenten  $F_{\beta,II}$  und  $F_{\beta,\perp}$ .

$$F_{\beta,II} = C_{II} \cdot \Delta u_{\gamma} \cdot \cos \gamma \quad (\text{G 5.13})$$

$$F_{\beta,\perp} = C_{\perp} \cdot \Delta u_{\gamma} \cdot \sin \gamma \quad (\text{G 5.14})$$

**Größe der Beanspruchung**

$$F_{\beta} = \sqrt{F_{\beta,II}^2 + F_{\beta,\perp}^2} = \sqrt{C_{II}^2 \cdot \cos^2 \gamma + C_{\perp}^2 \cdot \sin^2 \gamma} \cdot \Delta u_{\gamma} \quad (\text{G 5.15})$$

Die resultierende Nachgiebigkeitskomponente  $C_{RES}$  sieht wie folgt aus:

$$C_{RES}^2 = \left[ \frac{F_{\beta}}{\Delta u_{\gamma}} \right]^2 = C_{II}^2 \cdot \cos^2 \gamma + C_{\perp}^2 \cdot \sin^2 \gamma \quad (\text{G 5.16})$$

$$\left[ \frac{C_{RES}}{C_{II}} \right]^2 = \cos^2 \gamma + \left[ \frac{C_{\perp}}{C_{II}} \right]^2 \cdot \sin^2 \gamma \quad (\text{G 5.17})$$

Damit ergibt sich folgender Zusammenhang für das Modell 2:

$$C^2 = \cos^2 \gamma + f^2 \cdot \sin^2 \gamma \quad (\text{G 5.18})$$

**Richtung der Beanspruchung**

Für das Modell 1 ist die Krafrichtung  $\beta$  und die Verschiebungsrichtung  $\gamma$  verschieden.

$$\gamma \neq \beta \quad \frac{F_{\beta,\perp}}{F_{\beta,II}} = \frac{C_{\perp}}{C_{II}} \cdot \tan \gamma = \tan \beta \quad (\text{G 5.19})$$

**Vergleich der beiden Interaktionsmodelle 1 und 2**

Modell 1:

$$C^2 = \frac{1.0}{\cos^2 \beta + \frac{\sin^2 \beta}{f^2}} \quad (\text{G 5.20})$$

Modell 2:

$$C^2 = \cos^2 \gamma + f^2 \cdot \sin^2 \gamma \quad (\text{G 5.21})$$

Vergleich der beiden Kraft-Verschiebungs-Modelle für eine Stiftverbindung bei einer Beanspruchung in der Ebene und in einer beliebigen Richtung zur Faser

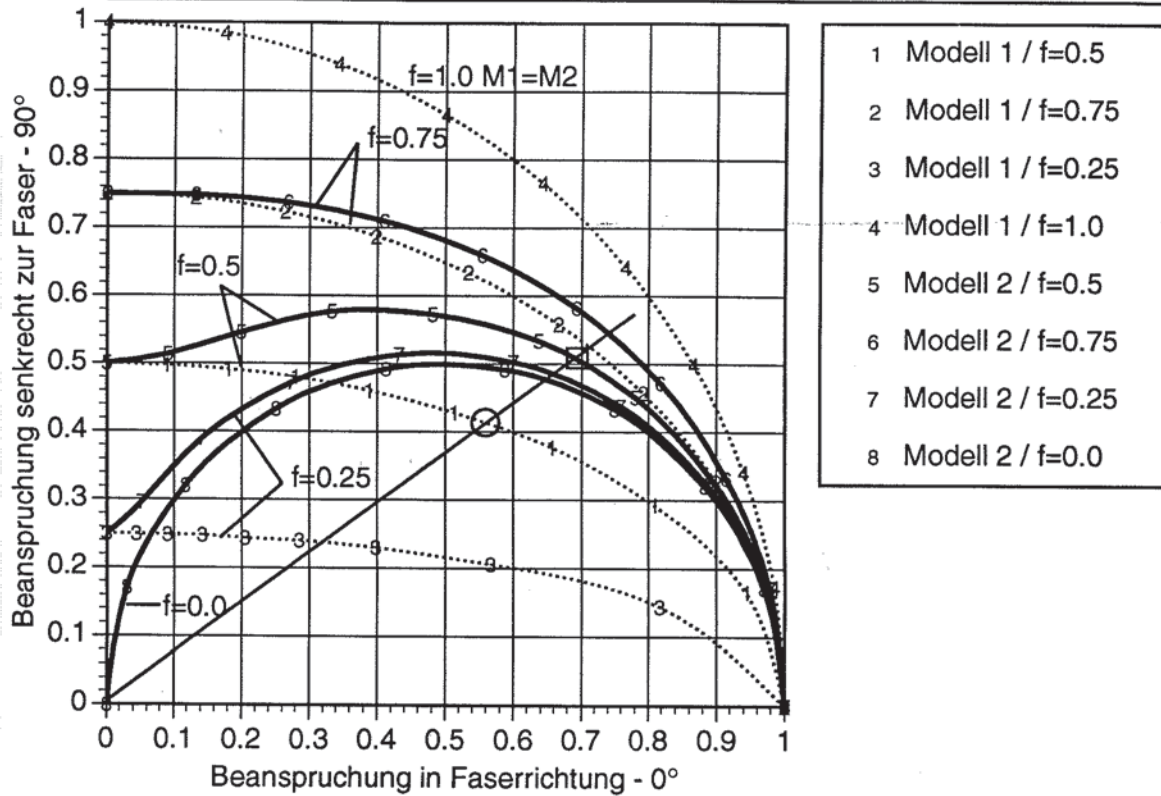


Bild 5.7

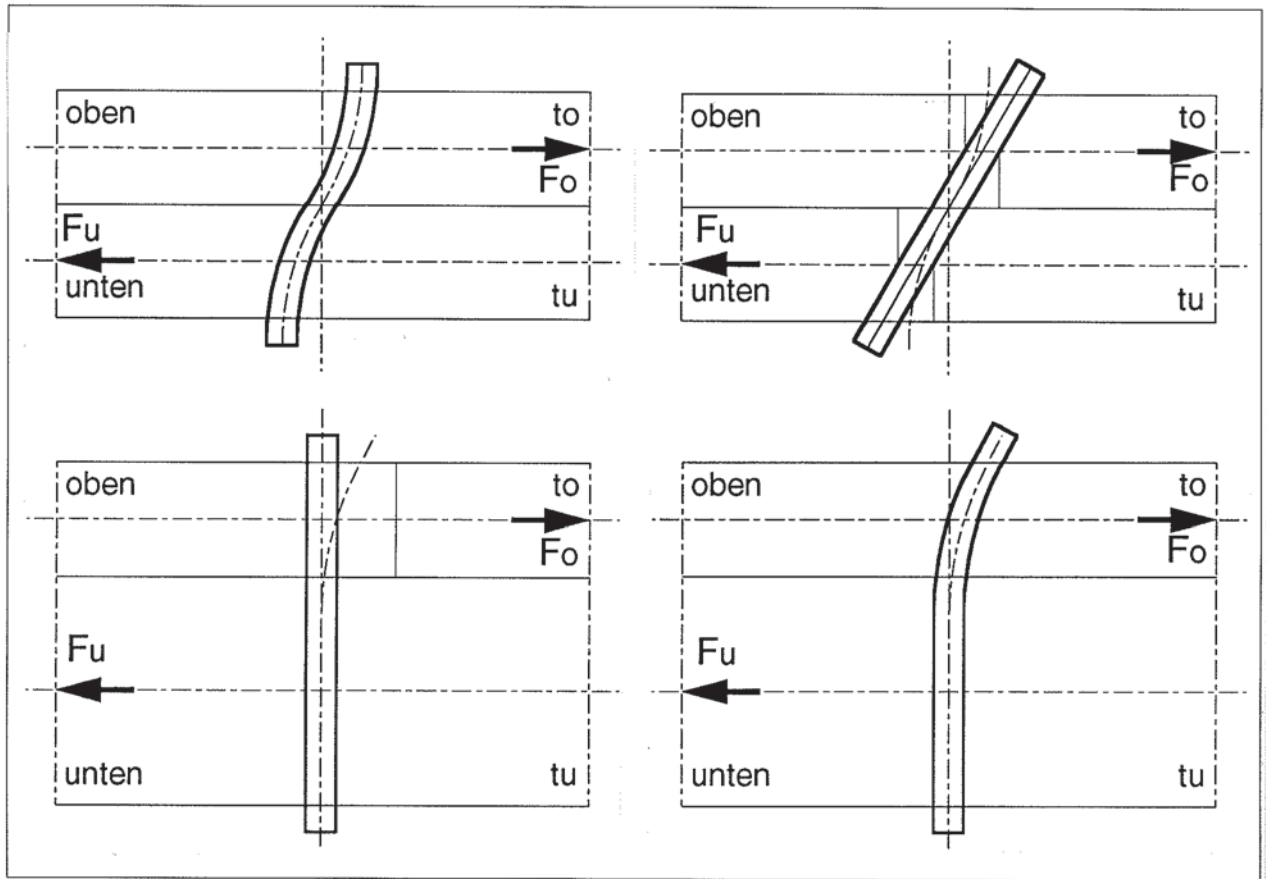
Vergleich der beiden Interaktionsmodelle 1 und 2



**Zusammenbau zum Gesamtsystem der Verbindung**

**Verformungszustände einer Holzverbindung**

Im Bild 5.8 sind einige elastische Verformungszustände von Stiftverbindungen dargestellt. Je nach Lamellenstärke  $t_o$  und  $t_u$ , sowie je nach Größenordnung der oben angeführten Parameterwerte ergeben sich bestimmte Verformungsstrukturen des jeweiligen Verbindungstyps.



**Bild 5.8**

Elastisches Verformungsverhalten verschiedener Verbindungstypen

**Schaumstoffmodell**

Es handelt sich dabei um ein Modell, das die jeweiligen Verformungen der miteinander mit Stiften verbundenen Lamellen wiedergeben soll. Den Verformungen der einzelnen Lamellen entsprechend, wird für die Verbundfuge ein mehr oder weniger steifer Schaumstoff angebracht gedacht, welcher durch die horizontale Beanspruchung  $F$  eine obere und untere elastische Verschiebung  $\Delta u_o$  und  $\Delta u_u$  erfährt. Ebenso ist es möglich, dieses Modell in Form einer Serienschaltung darzustellen. Die verschieden steifen Schaumstoffe werden durch in Serie geschaltete Federn mit entsprechender Steifigkeit modelliert. Im Bild 5.9 ist dieser Zusammenhang dargestellt.

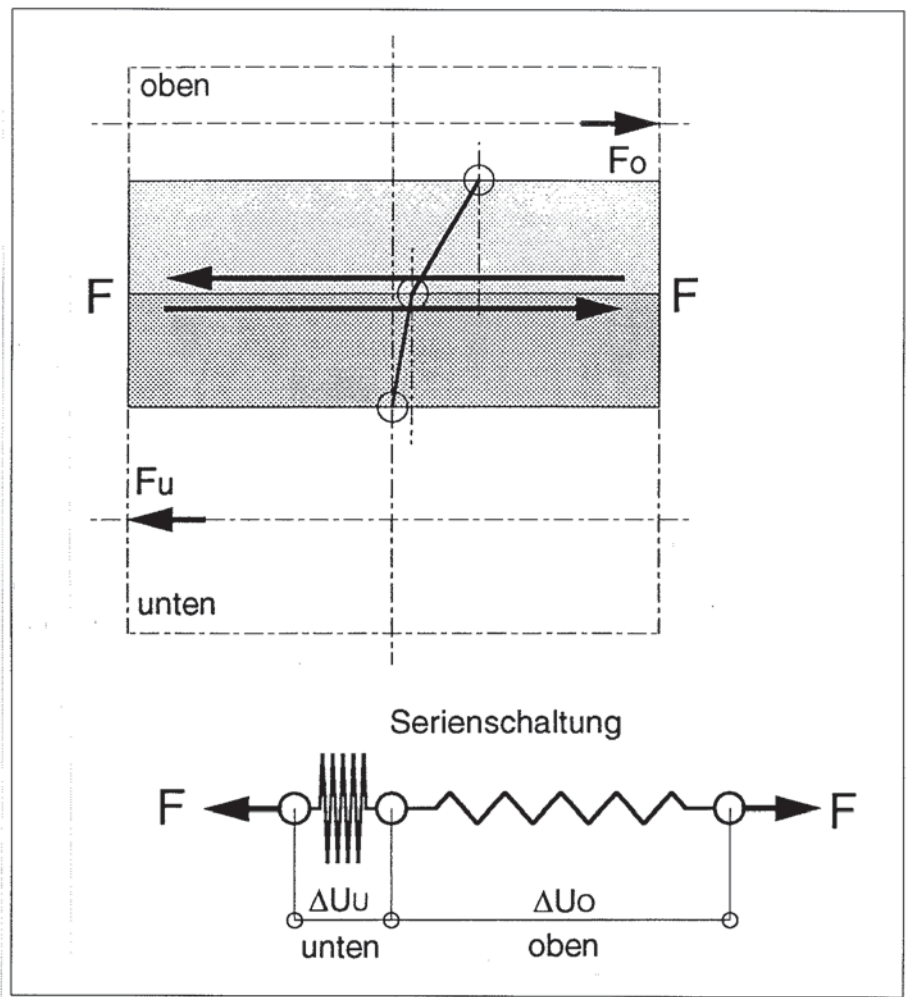


Bild 5.9

Schaumstoffmodell - Serienschaltung

Es ergeben sich daraus die folgenden Bedingungen:

Kompatibilitätsbedingung:

$$\Delta u = \Delta u_u + \Delta u_o \quad (\text{G 5.22})$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$F = F_u = F_o \quad (\text{G 5.23})$$

Zusammenbau zum Gesamtsystem der Verbindung für das Modell 2

Nachfolgend wird für das Modell 2 der Verbund zu einem Gesamtsystem dargelegt. Im Bild 5.10 ist die allgemeine Lage zweier Brettlamellen für zwei Einzelschichten ES ersichtlich.

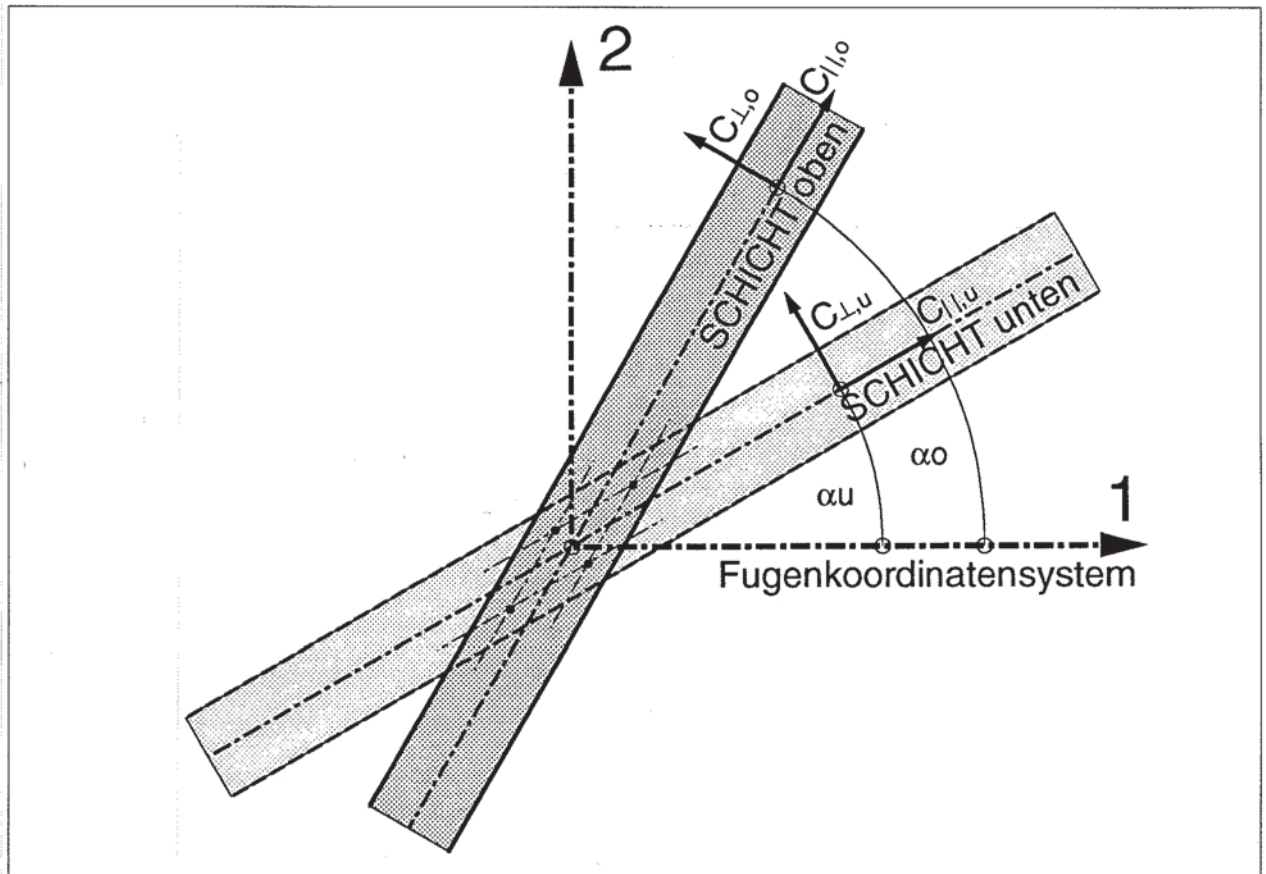


Bild 5.10

Lage zweier Brettlamellen im globalem Koordinatensystem

Für das lokale Koordinatensystem gilt:

$$\{F_{o,L}\} = [C_{o,L}] \cdot \{\Delta u_{o,L}\} \quad (G 5.24)$$

$$\{F_{u,L}\} = [C_{u,L}] \cdot \{\Delta u_{u,L}\} \quad (G 5.25)$$

$$[C_{o,L}] = \begin{bmatrix} C_{II,o} & 0 \\ 0 & C_{\perp,o} \end{bmatrix} \quad (G 5.26)$$

$$[C_{u,L}] = \begin{bmatrix} C_{II,u} & 0 \\ 0 & C_{\perp,u} \end{bmatrix} \quad (G 5.27)$$



Transformationsbeziehungen:

$$[t_o] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_o & \sin \alpha_o \\ -\sin \alpha_o & \cos \alpha_o \end{bmatrix} \quad (\text{G 5.28})$$

$$[t_u] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_u & \sin \alpha_u \\ -\sin \alpha_u & \cos \alpha_u \end{bmatrix} \quad (\text{G 5.29})$$

Für das globale Koordinatensystem gilt:

$$\{F_{o,G}\} = [C_{o,G}] \cdot \{\Delta u_{o,G}\} \quad (\text{G 5.30})$$

$$\{F_{u,G}\} = [C_{u,G}] \cdot \{\Delta u_{u,G}\} \quad (\text{G 5.31})$$

$$[C_{o,G}] = [t_o^T] \cdot [C_{o,L}] \cdot [t_o] \quad (\text{G 5.32})$$

$$[C_{u,G}] = [t_u^T] \cdot [C_{u,L}] \cdot [t_u] \quad (\text{G 5.33})$$

Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingung

$$\{F_G\} = \{F_{u,G}\} = \{F_{o,G}\} \quad (\text{G 5.34})$$

$$\{\Delta u_G\} = \{\Delta u_{u,G}\} + \{\Delta u_{o,G}\} \quad (\text{G 5.35})$$

$$[C_{u,G}] \cdot \{\Delta u_{u,G}\} = [C_{o,G}] \cdot \{\Delta u_{o,G}\} \quad (\text{G 5.36})$$

Globale Verschiebungen oben und unten:

$$\{\Delta u_{u,G}\} = [[C_{u,G}] + [C_{o,G}]]^{-1} \cdot [C_{o,G}] \cdot \{\Delta u_G\} \quad (\text{G 5.37})$$

$$\{\Delta u_{o,G}\} = [[C_{u,G}] + [C_{o,G}]]^{-1} \cdot [C_{u,G}] \cdot \{\Delta u_G\} \quad (\text{G 5.38})$$

Globale Kräfte oben und unten - Resultat für Modell 2

$$\{F_{u,G}\} = [C_{u,G}] \cdot [[C_{u,G}] + [C_{o,G}]]^{-1} \cdot [C_{o,G}] \cdot \{\Delta u_G\} \quad (\text{G 5.39})$$

$$\{F_{o,G}\} = [C_{o,G}] \cdot [[C_{u,G}] + [C_{o,G}]]^{-1} \cdot [C_{u,G}] \cdot \{\Delta u_G\} \quad (\text{G 5.40})$$

$$\begin{aligned} [C_G] &= [C_{u,G}] \cdot [[C_{u,G}] + [C_{o,G}]]^{-1} \cdot [C_{o,G}] = \\ &= [C_{o,G}] \cdot [[C_{u,G}] + [C_{o,G}]]^{-1} \cdot [C_{u,G}] \end{aligned} \quad (\text{G 5.41})$$

$$\{F_G\} = [C_G] \cdot \{\Delta u_G\} \quad (\text{G 5.42})$$

---

# 6.

## Modellierung des starren und nachgiebigen Verbundes

---

### 2D - Modell einer geschichteten Holzstruktur

---

#### 3D - Allgemeines

Es wird versucht die grundlegenden Prinzipien der Theorie des anisotropen, elastischen Kontinuums darzulegen. Zu erwähnen sind hier die Arbeiten von S.G. Lekhnitskii (1981) [10], A.S. Wolmir (1962) [18], K. Moser (1992) [12] und H. Lehar (1985) [20]. Weitere diesbezügliche Arbeiten sind dem Literaturverzeichnis zu entnehmen. Die folgenden Voraussetzungen sind zu beachten, um die Gültigkeit der nachfolgenden Ausführungen zu gewährleisten.

- Das Volumenelement wird als starrer Körper - starres Kontinuum - betrachtet.
- Die Verformungs- und Dehnungskomponenten seien klein, der Zusammenhang zwischen Verformungen und Dehnungen - erste Ableitungen - sei linear.
- Es wird ein linear-elastisches Materialverhalten angenommen - generelles Hook'sches Gesetz -, d.h. die Dehnungskomponenten sind Linearfunktionen der Spannungskomponenten.

Zur Beschreibung des elastischen Kontinuums sind die sechs Spannungskomponenten  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  und  $\tau_{xy}$ , die sechs Dehnungskomponenten  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  und  $\gamma_{xy}$  sowie die drei Verformungskomponenten  $u, v$  und  $w$  erforderlich. Der Formulierung der erforderlichen Gleichungen wird ein rechtsdrehendes kartesisches Koordinatensystem zugrundegelegt.

Die Summe der zur Beschreibung des elastischen Kontinuums erforderlichen Feldgrößen beträgt also 15, d.h. daß zur Ermittlung dieser Größen 15 Gleichungen erforderlich werden. Diese Gleichungen setzen sich aus den kinematischen Gleichungen, den Gleichgewichtsgleichungen und den Stoffgleichungen zusammen.

### 3D - Kinematik

Grundlage der kinematischen Gleichungen ist der Zusammenhang zwischen den Dehnungen und Verschiebungen des Kontinuums. Im kartesischen Koordinatensystem läßt sich dieser Zusammenhang wie folgt darstellen.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{G 6.1})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{G 6.2})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{G 6.3})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{G 6.4})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{G 6.5})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{G 6.6})$$

Eine andere Möglichkeit der Darstellung ergibt sich durch die Einführung der linearen Operatormatrix [G] und der Formulierung eines Verformungsvektors {u}. Damit ist die folgende Matrizenschreibweise möglich.

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.7})$$

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.8})$$

$$\{\varepsilon\} = [G] \cdot \{u\} \quad (\text{G 6.9})$$



### 3D - Gleichgewicht

Die Gleichgewichtsgleichungen werden am infinitesimalen Volumenelement aufgestellt. Es ergibt sich das folgende System von Gleichgewichtsgleichungen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + p_x &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + p_y &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + p_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{G 6.10}$$

Eine andere Form der Darstellung ist durch die Verwendung der Operatormatrix [G] gegeben. Diese auf das obige Gleichungssystem angewendet, ergibt für die sechs unabhängigen Spannungskomponenten die folgende Darstellungsform in Matrixschreibweise.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \{p\} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}
 \tag{G 6.11}$$

$$[G^T] \cdot \{\sigma\} + \{p\} = 0
 \tag{G 6.12}$$

### 3D - Stoffgleichungen

Die vorgenannten Gleichungen sind gültig für jedes Kontinuum ohne Rücksicht auf die Materialkennwerte. Es werden im weiteren nur mehr Medien bzw. Körper in Betracht gezogen, bei denen die Dehnungskomponenten Linearkombinationen der Spannungskomponenten sind. Solange nur kleine Dehnungen angenommen werden, wird als Materialgesetz das generelle Hook'sche Gesetz für das Kontinuum gesetzt.

Materialien deren elastisches Verhalten nach dem generellen Hook'schen Gesetz beschreibbar ist, können einerseits homogen oder inhomogen sein, und andererseits isotrop oder anisotrop. Von einem homogenen Material spricht man dann, wenn das Elastizitätsverhalten an verschiedenen Punkten des Körpers dasselbe ist. Mit einem inhomogenen Materialverhalten hat man es dann zu tun, wenn an unterschiedlichen Punkten unterschiedliches Elastizitätsverhalten angetroffen wird. Bei einer kontinuierlichen Änderung einer Elastizitätskonstante von einem Punkt zum anderen spricht man von einem kontinuierlich inhomogenen Materialverhalten. Zum Unterschied dazu bezeichnet man eine schrittweise Änderung der Elastizitätskonstanten eines Materials als diskontinuierlich, inhomogenes Materialverhalten. Von einem

isotropen Material spricht man dann, wenn im Hinblick auf die elastischen Materialkennwerte, diese für einen betrachteten Punkt des Körpers für alle Richtungen durch diesen Punkt gleich sind. Ein Material ist anisotrop, wenn die Kennwerte für einen betrachteten Punkt für verschiedene Richtungen unterschiedlich sind. Generell kann gesagt werden, daß für den allgemeinen Fall der Anisotropie jede Spannungskomponente eine Linearkombination aller sechs Dehnungskomponenten ist.

An dieser Stelle sei zu erwähnen, daß Holz genau genommen mechanisch betrachtet ein diskontinuierlich, inhomogenes, anisotropes Materialverhalten aufweist. Näherungsweise kann bereichsweise von einem homogenen, anisotropen Material gesprochen werden. Im Weiteren wird nun näher auf dieses anisotrope Materialverhalten in Form der Stoffgleichungen eingegangen. Der allgemeinste Fall der Darstellung der Stoffgleichungen für das Kontinuum - Zusammenhang zwischen den Dehnungs- und den Spannungskomponenten über das Stoffgesetz - sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= Q_{11} \cdot \varepsilon_x + Q_{12} \cdot \varepsilon_y + Q_{13} \cdot \varepsilon_z + Q_{14} \cdot \gamma_{yz} + Q_{15} \cdot \gamma_{xz} + Q_{16} \cdot \gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= Q_{21} \cdot \varepsilon_x + Q_{22} \cdot \varepsilon_y + Q_{23} \cdot \varepsilon_z + Q_{24} \cdot \gamma_{yz} + Q_{25} \cdot \gamma_{xz} + Q_{26} \cdot \gamma_{xy} \\
 \sigma_z &= Q_{31} \cdot \varepsilon_x + Q_{32} \cdot \varepsilon_y + Q_{33} \cdot \varepsilon_z + Q_{34} \cdot \gamma_{yz} + Q_{35} \cdot \gamma_{xz} + Q_{36} \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{yz} &= Q_{41} \cdot \varepsilon_x + Q_{42} \cdot \varepsilon_y + Q_{43} \cdot \varepsilon_z + Q_{44} \cdot \gamma_{yz} + Q_{45} \cdot \gamma_{xz} + Q_{46} \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{xz} &= Q_{51} \cdot \varepsilon_x + Q_{52} \cdot \varepsilon_y + Q_{53} \cdot \varepsilon_z + Q_{54} \cdot \gamma_{yz} + Q_{55} \cdot \gamma_{xz} + Q_{56} \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{xy} &= Q_{61} \cdot \varepsilon_x + Q_{62} \cdot \varepsilon_y + Q_{63} \cdot \varepsilon_z + Q_{64} \cdot \gamma_{yz} + Q_{65} \cdot \gamma_{xz} + Q_{66} \cdot \gamma_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{G 6.13}$$

Die Darstellung in Matrizenform sieht folgendermaßen aus, wobei die Steifigkeitsmatrix [Q] für das Kontinuum definiert wird.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & & & & & \\ Q_{21} & Q_{22} & & & & \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & & & \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & & \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix}
 \tag{G 6.14}$$

$$\{\sigma\} = [Q] \cdot \{\varepsilon\}
 \tag{G 6.15}$$

Bei Ausnutzung der Symmetrie ergeben sich für die Beschreibung der Spannungs-Dehnungsbeziehung unter Berücksichtigung des Werkstoffverhaltens 21 unabhängige Werkstoffkonstanten. Durch Inversion der Steifigkeitsmatrix [Q] ergibt sich die Nachgiebigkeitsmatrix [C], womit sich die Dehnungskomponenten analog wie vorhin in Form einer Linearkombination aller sechs Spannungskomponenten darstellen lassen.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= C_{11} \cdot \sigma_x + C_{12} \cdot \sigma_y + C_{13} \cdot \sigma_z + C_{14} \cdot \tau_{yz} + C_{15} \cdot \tau_{xz} + C_{16} \cdot \tau_{xy} \\
 \varepsilon_y &= C_{21} \cdot \sigma_x + C_{22} \cdot \sigma_y + C_{23} \cdot \sigma_z + C_{24} \cdot \tau_{yz} + C_{25} \cdot \tau_{xz} + C_{26} \cdot \tau_{xy} \\
 \varepsilon_z &= C_{31} \cdot \sigma_x + C_{32} \cdot \sigma_y + C_{33} \cdot \sigma_z + C_{34} \cdot \tau_{yz} + C_{35} \cdot \tau_{xz} + C_{36} \cdot \tau_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= C_{41} \cdot \sigma_x + C_{42} \cdot \sigma_y + C_{43} \cdot \sigma_z + C_{44} \cdot \tau_{yz} + C_{45} \cdot \tau_{xz} + C_{46} \cdot \tau_{xy} \\
 \gamma_{xz} &= C_{51} \cdot \sigma_x + C_{52} \cdot \sigma_y + C_{53} \cdot \sigma_z + C_{54} \cdot \tau_{yz} + C_{55} \cdot \tau_{xz} + C_{56} \cdot \tau_{xy} \\
 \gamma_{xy} &= C_{61} \cdot \sigma_x + C_{62} \cdot \sigma_y + C_{63} \cdot \sigma_z + C_{64} \cdot \tau_{yz} + C_{65} \cdot \tau_{xz} + C_{66} \cdot \tau_{xy}
 \end{aligned} \tag{G 6.16}$$

Die Darstellung in Matrizenform sieht folgendermaßen aus, wobei die Nachgiebigkeitsmatrix [C] für das Kontinuum definiert wird.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ C_{21} & C_{22} & & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & & \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \tag{G 6.17}$$

$$\{\varepsilon\} = [C] \cdot \{\sigma\} \tag{G 6.18}$$

Nach A.L. Rabinovich lassen sich die obigen Nachgiebigkeitsterme in Form eines Systems der Ingenieurkonstanten darstellen.

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{\nu_{xy}}{E_{yy}} & \frac{\nu_{xz}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{x,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\nu_{yx}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & \frac{\nu_{yz}}{E_{zz}} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\nu_{zx}}{E_{xx}} & \frac{\nu_{zy}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{zz}} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{yz,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{yz,z}}{E_{zz}} & 1 & \frac{\mu_{yz,xz}}{G_{xz}} & \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xz,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{xz,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{xz,z}}{E_{zz}} & \frac{\mu_{xz,yz}}{G_{yz}} & 1 & \frac{\mu_{xz,xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xy,x}}{E_{xx}} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_{yy}} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_{zz}} & \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} & \frac{\mu_{xy,xz}}{G_{xz}} & 1 \end{bmatrix} \tag{G 6.19}$$

Die obige Form der Darstellung der Nachgiebigkeitsmatrix [C] läßt sich in vier Teile bezüglich der Ingenieurkonstanten gliedern. Mit  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$  und  $E_{zz}$  werden die Young's-Moduli in Richtung der Hauptachsen bezeichnet. Mit  $G_{yz}$ ,  $G_{xz}$  und  $G_{xy}$  werden die Schubmoduli bezeichnet, wobei die Indizierung auf eine Parallelität zu einer Koordinatenebene hinweist. Die Poisson-Zahlen  $\nu_{yz}$ ,  $\nu_{zy}$ ,  $\nu_{xz}$ ,  $\nu_{zx}$ ,  $\nu_{xy}$  und  $\nu_{yx}$





In diesem Fall der Symmetrie existieren drei Ebenen durch einen beliebigen Punkt mit folgenden Eigenschaften: die drei Symmetrieebenen stehen zueinander senkrecht, wobei sich die nachfolgende Darstellung der Steifigkeitsmatrix  $[Q]$  auf ein Koordinatensystem bezieht, dessen Achsen senkrecht auf die vorgenannten Ebenen stehen. Die Zahl der unabhängigen Werkstoffkonstanten reduziert sich auf 9 Konstanten. Man spricht auch von einem orthogonal anisotropen (kurz: orthotropen) Werkstoffverhalten.

Es ergibt sich folgende Form für die Steifigkeitsmatrix  $[Q]$ .

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & & & & & \\ Q_{21} & Q_{22} & & & & \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.21})$$

Der Werkstoff Holz läßt sich, wie bereits oben erwähnt, genaugenommen als diskontinuierlicher, inhomogener, anisotroper Werkstoff beschreiben. Unter Vernachlässigung der Inhomogenität kann man von einem anisotropen Werkstoff mit drei Symmetrieebenen, also von einem orthotropen Werkstoff sprechen. Die drei Ebenen können wie folgt definiert werden. Die erste Ebene, die yz-Ebene, ist die Ebene senkrecht zur Holzfaserrichtung. Die zweite Ebene (Tangentialebene), die xy-Ebene, ist parallel zu den Jahrringen, und die dritte Ebene (Radialebene), die xz-Ebene, ist senkrecht auf die beiden erstgenannten Ebenen. Damit ergeben sich für den Werkstoff Holz 9 unabhängige Elastizitätskonstanten. Im Weiteren wird nun näher auf das orthotrope Werkstoffverhalten eingegangen.

Es ergibt sich folgende Nachgiebigkeitsmatrix  $[C]$ .

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ C_{21} & C_{22} & & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.22})$$

Nachgiebigkeitsmatrix  $[C]$  dargestellt durch ein System von Ingenieurkonstanten:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{\nu_{xy}}{E_{yy}} & \frac{\nu_{xz}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{yx}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & \frac{\nu_{yz}}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{zx}}{E_{xx}} & \frac{\nu_{zy}}{E_{yy}} & \frac{1}{E_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.23})$$

Durch Inversion der Nachgiebigkeitsmatrix [C] ergibt sich die Steifigkeitsmatrix [Q]. Diese Matrix lässt sich durch ein System von Ingenieurkonstanten folgendermaßen darstellen.

Es ergibt sich die folgende Form der Steifigkeitsterme (z.B.  $Q_{11}$ ):

$$Q_{11} = \frac{E_{xx} \times (1 - \nu_{yz} \times \nu_{zy})}{(1 - \nu_{xy} \times \nu_{yx} - \nu_{xz} \times \nu_{zx} - \nu_{yz} \times \nu_{zy} - 2 \times \nu_{xz} \times \nu_{yx} \times \nu_{zy})} \quad (\text{G 6.24})$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{yz} \times \nu_{zy}}{E_{yy} \times E_{zz} \times \Sigma} & \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz} \times \nu_{zy}}{E_{yy} \times E_{zz} \times \Sigma} & \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy} \times \nu_{yz}}{E_{yy} \times E_{zz} \times \Sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{yx} + \nu_{zx} \times \nu_{yz}}{E_{xx} \times E_{zz} \times \Sigma} & \frac{1 - \nu_{xz} \times \nu_{zx}}{E_{xx} \times E_{zz} \times \Sigma} & \frac{\nu_{yz} + \nu_{xz} \times \nu_{yx}}{E_{xx} \times E_{zz} \times \Sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{zx} + \nu_{yx} \times \nu_{zy}}{E_{xx} \times E_{yy} \times \Sigma} & \frac{\nu_{zy} + \nu_{xy} \times \nu_{zx}}{E_{xx} \times E_{yy} \times \Sigma} & \frac{1 - \nu_{xy} \times \nu_{yx}}{E_{xx} \times E_{yy} \times \Sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.25})$$

In dieser Matrix steht das Summenzeichen für folgenden Ausdruck:

$$\Sigma = \frac{(1 - \nu_{xy} \times \nu_{yx} - \nu_{xz} \times \nu_{zx} - \nu_{yz} \times \nu_{zy} - 2 \times \nu_{xz} \times \nu_{yx} \times \nu_{zy})}{E_{xx} \times E_{yy} \times E_{zz}} \quad (\text{G 6.26})$$

### 3D - Transformation

Kennt man die Spannungs- und Dehnungskomponenten für ein Koordinatensystem  $x, y$  und  $z$  - z.B. globales System -, so ist es leicht möglich, über die Transformationsbeziehungen diese in ein anderes - z.B. lokales System - Koordinatensystem umzurechnen. Bei einer allgemeinen Verdrehung des Systems in einen neuen Zustand ergeben sich die nachfolgenden Beziehungen.

$$\begin{aligned}
 X_{\bar{x}} &= \sigma_x \times \cos(\bar{x},x) + \tau_{yx} \times \cos(\bar{x},y) + \tau_{zx} \times \cos(\bar{x},z) \\
 Y_{\bar{x}} &= \tau_{xy} \times \cos(\bar{x},x) + \sigma_y \times \cos(\bar{x},y) + \tau_{zy} \times \cos(\bar{x},z) \\
 Z_{\bar{x}} &= \tau_{xz} \times \cos(\bar{x},x) + \tau_{yz} \times \cos(\bar{x},y) + \sigma_z \times \cos(\bar{x},z) \\
 \\ 
 X_{\bar{y}} &= \sigma_x \times \cos(\bar{y},x) + \tau_{yx} \times \cos(\bar{y},y) + \tau_{zx} \times \cos(\bar{y},z) \\
 Y_{\bar{y}} &= \tau_{xy} \times \cos(\bar{y},x) + \sigma_y \times \cos(\bar{y},y) + \tau_{zy} \times \cos(\bar{y},z) \\
 Z_{\bar{y}} &= \tau_{xz} \times \cos(\bar{y},x) + \tau_{yz} \times \cos(\bar{y},y) + \sigma_z \times \cos(\bar{y},z) \\
 \\ 
 X_{\bar{z}} &= \sigma_x \times \cos(\bar{z},x) + \tau_{yx} \times \cos(\bar{z},y) + \tau_{zx} \times \cos(\bar{z},z) \\
 Y_{\bar{z}} &= \tau_{xy} \times \cos(\bar{z},x) + \sigma_y \times \cos(\bar{z},y) + \tau_{zy} \times \cos(\bar{z},z) \\
 Z_{\bar{z}} &= \tau_{xz} \times \cos(\bar{z},x) + \tau_{yz} \times \cos(\bar{z},y) + \sigma_z \times \cos(\bar{z},z)
 \end{aligned}
 \tag{G 6.27}$$

Damit ergeben sich z.B. die Spannungskomponenten in Richtung der Achsen des neuen Koordinatensystems folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\bar{x}} &= X_{\bar{x}} \times \cos(\bar{x},x) + Y_{\bar{x}} \times \cos(\bar{x},y) + Z_{\bar{x}} \times \cos(\bar{x},z) \\
 \tau_{\bar{x}\bar{y}} &= X_{\bar{x}} \times \cos(\bar{y},x) + Y_{\bar{x}} \times \cos(\bar{y},y) + Z_{\bar{x}} \times \cos(\bar{y},z) \\
 \tau_{\bar{x}\bar{z}} &= X_{\bar{x}} \times \cos(\bar{z},x) + Y_{\bar{x}} \times \cos(\bar{z},y) + Z_{\bar{x}} \times \cos(\bar{z},z) \\
 \\ 
 \sigma_{\bar{y}} &= X_{\bar{y}} \times \cos(\bar{y},x) + Y_{\bar{y}} \times \cos(\bar{y},y) + Z_{\bar{y}} \times \cos(\bar{y},z) \\
 \tau_{\bar{y}\bar{z}} &= X_{\bar{y}} \times \cos(\bar{z},x) + Y_{\bar{y}} \times \cos(\bar{z},y) + Z_{\bar{y}} \times \cos(\bar{z},z) \\
 \tau_{\bar{y}\bar{x}} &= X_{\bar{y}} \times \cos(\bar{x},x) + Y_{\bar{y}} \times \cos(\bar{x},y) + Z_{\bar{y}} \times \cos(\bar{x},z) \\
 \\ 
 \sigma_{\bar{z}} &= X_{\bar{z}} \times \cos(\bar{z},x) + Y_{\bar{z}} \times \cos(\bar{z},y) + Z_{\bar{z}} \times \cos(\bar{z},z) \\
 \tau_{\bar{z}\bar{x}} &= X_{\bar{z}} \times \cos(\bar{x},x) + Y_{\bar{z}} \times \cos(\bar{x},y) + Z_{\bar{z}} \times \cos(\bar{x},z) \\
 \tau_{\bar{z}\bar{y}} &= X_{\bar{z}} \times \cos(\bar{y},x) + Y_{\bar{z}} \times \cos(\bar{y},y) + Z_{\bar{z}} \times \cos(\bar{y},z)
 \end{aligned}
 \tag{G 6.28}$$

Die Spannungskomponenten im neuen z.B. lokalem Koordinatensystem lassen sich nun durch Einsetzen der Komponenten der G 6.27 in die G 6.28 darstellen. Damit erhält man letztlich die allgemeine Form der Transformationsmatrix [T].

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\bar{x}} &= \sigma_x \times l_{\bar{x}x}^2 + \sigma_y \times l_{\bar{x}y}^2 + \sigma_z \times l_{\bar{x}z}^2 + 2 \times \tau_{yz} \times l_{\bar{x}y} \times l_{\bar{x}z} + \\
 &\quad + 2 \times \tau_{xz} \times l_{\bar{x}x} \times l_{\bar{x}z} + 2 \times \tau_{xy} \times l_{\bar{x}x} \times l_{\bar{x}y} \\
 \sigma_{\bar{y}} &= \sigma_x \times l_{\bar{y}x}^2 + \sigma_y \times l_{\bar{y}y}^2 + \sigma_z \times l_{\bar{y}z}^2 + 2 \times \tau_{yz} \times l_{\bar{y}y} \times l_{\bar{y}z} + \\
 &\quad + 2 \times \tau_{xz} \times l_{\bar{y}x} \times l_{\bar{y}z} + 2 \times \tau_{xy} \times l_{\bar{y}x} \times l_{\bar{y}y} \\
 \sigma_{\bar{z}} &= \sigma_x \times l_{\bar{z}x}^2 + \sigma_y \times l_{\bar{z}y}^2 + \sigma_z \times l_{\bar{z}z}^2 + 2 \times \tau_{yz} \times l_{\bar{z}y} \times l_{\bar{z}z} + \\
 &\quad + 2 \times \tau_{xz} \times l_{\bar{z}x} \times l_{\bar{z}z} + 2 \times \tau_{xy} \times l_{\bar{z}x} \times l_{\bar{z}y}
 \end{aligned}
 \tag{G 6.29}$$

Es ergibt sich somit die allgemeine Form der Darstellung der Transformationsbeziehungen in Matrizenform.

$$[T] = \begin{bmatrix}
 l_{\bar{x}x}^2 & l_{\bar{x}y}^2 & l_{\bar{x}z}^2 & 2l_{\bar{x}y}l_{\bar{x}z} & 2l_{\bar{x}x}l_{\bar{x}z} & 2l_{\bar{x}x}l_{\bar{x}y} \\
 l_{\bar{y}x}^2 & l_{\bar{y}y}^2 & l_{\bar{y}z}^2 & 2l_{\bar{y}y}l_{\bar{y}z} & 2l_{\bar{y}x}l_{\bar{y}z} & 2l_{\bar{y}x}l_{\bar{y}y} \\
 l_{\bar{z}x}^2 & l_{\bar{z}y}^2 & l_{\bar{z}z}^2 & 2l_{\bar{z}y}l_{\bar{z}z} & 2l_{\bar{z}x}l_{\bar{z}z} & 2l_{\bar{z}x}l_{\bar{z}y} \\
 l_{\bar{y}x}l_{\bar{z}y} & l_{\bar{y}y}l_{\bar{z}y} & l_{\bar{y}z}l_{\bar{z}z} & (l_{\bar{y}z}l_{\bar{z}y} + l_{\bar{y}y}l_{\bar{z}z}) & (l_{\bar{y}z}l_{\bar{z}x} + l_{\bar{y}x}l_{\bar{z}z}) & (l_{\bar{y}y}l_{\bar{z}x} + l_{\bar{y}x}l_{\bar{z}y}) \\
 l_{\bar{z}x}l_{\bar{x}x} & l_{\bar{z}y}l_{\bar{x}y} & l_{\bar{z}z}l_{\bar{x}z} & (l_{\bar{z}y}l_{\bar{x}z} + l_{\bar{z}z}l_{\bar{x}y}) & (l_{\bar{z}x}l_{\bar{x}z} + l_{\bar{z}z}l_{\bar{x}x}) & (l_{\bar{z}y}l_{\bar{x}x} + l_{\bar{z}x}l_{\bar{x}y}) \\
 l_{\bar{x}x}l_{\bar{y}x} & l_{\bar{x}y}l_{\bar{y}y} & l_{\bar{x}z}l_{\bar{y}z} & (l_{\bar{x}z}l_{\bar{y}y} + l_{\bar{x}y}l_{\bar{y}z}) & (l_{\bar{x}z}l_{\bar{y}x} + l_{\bar{x}x}l_{\bar{y}z}) & (l_{\bar{x}x}l_{\bar{y}y} + l_{\bar{x}y}l_{\bar{y}x})
 \end{bmatrix}
 \tag{G 6.30}$$

Dabei sind die folgenden Abkürzungen maßgebend.

$$\begin{aligned}
 l_{\bar{x}x} &= \cos(\bar{x},x) & l_{\bar{x}y} &= \cos(\bar{x},y) & l_{\bar{x}z} &= \cos(\bar{x},z) \\
 l_{\bar{y}x} &= \cos(\bar{y},x) & l_{\bar{y}y} &= \cos(\bar{y},y) & l_{\bar{y}z} &= \cos(\bar{y},z) \\
 l_{\bar{z}x} &= \cos(\bar{z},x) & l_{\bar{z}y} &= \cos(\bar{z},y) & l_{\bar{z}z} &= \cos(\bar{z},z)
 \end{aligned}
 \tag{G 6.31}$$

Ein Spezialfall der Transformationsbeziehungen ist der, wenn es sich bei der Transformation ausschließlich um eine Rotation um die  $z = z$ -Achse handelt. Geht man von einer positiven Rotation um die  $z = z$ -Achse mit der Größe  $\varphi$  aus, so ergibt sich für den Spezialfall die nachfolgende Transformationsmatrix [T].

$$[T] = \begin{bmatrix}
 \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 0 & 0 & 0 & 2\cos\varphi\sin\varphi \\
 \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 0 & 0 & 0 & -2\cos\varphi\sin\varphi \\
 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\
 -\cos\varphi\sin\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)
 \end{bmatrix}
 \tag{G 6.32}$$



### 2D - Modellierung der Einzelschichte ES

Ausgehend vom anisotropen, elastischen Kontinuum, wird in diesem Teil der Arbeit das Verhalten der geschichteten, ebenen Holzstruktur behandelt. Zur Beschreibung des Schichtenverbundes ist es notwendig, das Verhalten der Einzelschichte ES zu kennen. Für die weitere Formulierung der Einzelschichte sind die folgenden Voraussetzungen gültig.

- Es handelt sich bei den Einzelschichten ES um dünne Schichten
- Die Dicke des Schichtenverbundes ist klein im Verhältnis zur Länge und Breite des Bauteiles.
- Für die Einzelschichten wird ein linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die Dehnungskomponenten sind somit Linearfunktionen der Spannungskomponenten. Materialien, deren elastisches Verhalten nach dem generellen Hook'schen Gesetz beschreibbar sind, können einerseits homogen oder inhomogen und andererseits isotrop oder anisotrop sein.
- Jede Schichte stellt in der Ebene einen orthotropen Werkstoff dar. Genaugenommen weist Holz mechanisch gesehen ein diskontinuierliches, inhomogenes, anisotropes Materialverhalten auf. Näherungsweise kann bereichsweise von einem homogenen, anisotropen Materialverhalten gesprochen werden.
- Es wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt, d.h. die transversale Normalspannung  $\sigma_z = 0$ .
- Die Verformungs- und Dehnungskomponenten sind klein, der Zusammenhang zwischen den Verformungen und Dehnungen - erste Ableitung - sei linear.
- Die transversalen Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$  und somit auch die Querschubdeformationen werden in Form eines erweiterten Verformungsansatzes - R.D. Mindlin und E. Reissner - berücksichtigt. Es handelt sich dabei um Ansatzfunktionen, worin die Schubverformungen linear - Ansatz 2 - berücksichtigt werden. Im Bild 6.(.) sind drei mögliche Verformungsansätze dargestellt.

## 6. Modellierung des starren und nachgiebigen Verbundes

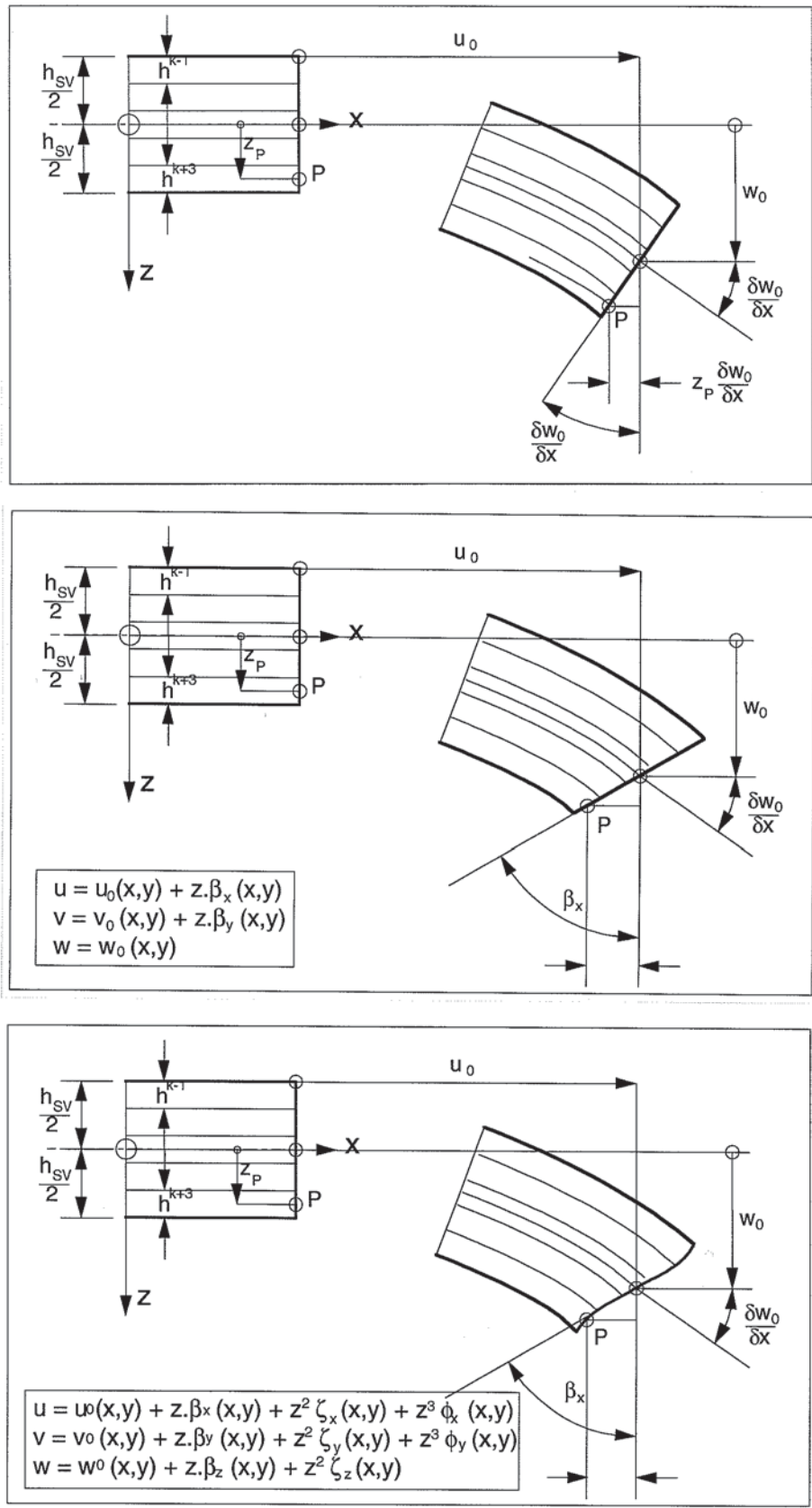


Bild 6.1

Modellierung der Einzelschichte - Verformungsansätze

### 2D - Kinematik der Einzelschichte ES

Grundlage für die Formulierung der kinematischen Gleichungen für die Einzelschichte ES ist der Zusammenhang zwischen den Dehnungen und Verformungen. Die Dehnungen des 3D-Kontinuums im kartesischen Koordinatensystem lassen sich in Matrixschreibweise wie folgt formulieren.

$$\{\varepsilon\}_{3D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{3D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.33})$$

Der obige Zusammenhang kann in folgender Kurzform angeschrieben werden, wobei die Matrix [G] die sogenannte Operatormatrix und der Vektor {u} die Verformungskomponenten beinhaltet.

$$\{\varepsilon\}_{3D} = [G] \cdot \{u\} \quad (\text{G 6.34})$$

Es gilt für die lineare Operatormatrix [G]

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.35})$$

und für den Verformungsvektor {u}

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.36})$$

Führt man den Verschiebungsansatz von R.D. Mindlin und E. Reissner ein, so ergeben sich die auf die Mittelfläche bezogenen Dehnungen. Diese sind nur noch Funktionen von  $x$  und  $y$ . Weiters wird über diesen Ansatz die Querschubdeformation berücksichtigt. Um der Nichtberücksichtigung der Querschnittsverwölbung zufolge der transversalen Schubbeanspruchung Rechnung zu tragen, wird es notwendig Schubkorrekturfaktoren einzuführen.

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} \beta_y \\ \beta_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.37})$$

Setzt man die Ansatzfunktion von R.D. Mindlin und E. Reissner in die G 6.33 ein, so ergeben sich die 3D-Dehnungskomponenten unter Berücksichtigung dieser Funktion wie folgt.

$$\{\varepsilon\}_{3D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{3D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_0 + z \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 0 \\ \beta_x/z \\ \beta_y/z \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}_0 \quad (\text{G 6.38})$$

In der obigen G 6.38 sind die Dehnungsanteile der transversalen Schubbeanspruchung enthalten. Für anisotropes Material, wie eben für Holz, wäre eine Vernachlässigung unrichtig, da durch die relativ geringen Schubmoduli  $G_{yz}$  und  $G_{xz}$  die Schubsteifigkeit ebenfalls gering ist und damit die Schubverformung nicht mehr vernachlässigt werden darf. Eine Vernachlässigung ist nur dann vertretbar, wenn die Dicke des Schichtenverbundes als klein vorausgesetzt werden kann. In der für Einzelschichten üblichen Form und Reihenfolge der Darstellung der Dehnungskomponenten ergibt sich der Dehnungsvektor  $\{\varepsilon\}_{3D}$  wie folgt.

$$\{\varepsilon\}_{3D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}_{3D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}_0 + z \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \beta_y/z \\ \beta_x/z \end{bmatrix}_0 \quad (\text{G 6.39})$$



Die obige G 6.7 kann in der folgenden Kurzform angeschrieben werden, wobei der Vektor  $\{\varepsilon\}_0$  die Dehnungskomponenten bezogen auf die Mittelfläche der Einzelschicht und der Vektor  $\{\kappa\}_0$  die Krümmungs- und Verwindungskomponenten beinhaltet. Als Krümmung  $\kappa_x$  und  $\kappa_y$  der Einzelschicht wird die Änderung des Neigungswinkels  $\beta$  längs der jeweilig indizierten Achse verstanden. Als Verwindung  $\kappa_{xy}$  der Mittelfläche der Einzelschicht versteht man die Änderung des Tangentenneigungswinkels  $\beta_x$  bzw.  $\beta_y$  mit wachsendem  $y$  bzw.  $x$ .

$$\{\varepsilon\}_{3D} = \{\varepsilon\}_0 + z \cdot \{\kappa\}_0 \quad (\text{G 6.40})$$

Damit ergibt sich nun der Zusammenhang zwischen den Verformungs- und Dehnungskomponenten für die Einzelschicht ES.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_y \\ \beta_x \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.41})$$

Der obige Zusammenhang kann in der folgenden Kurzform angeschrieben werden, wobei die Matrix  $[B]$  die sogenannte B-Matrix und der Vektor  $\{U\}$  den Verformungsvektor einer Einzelschicht ES darstellt.

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U\} \quad (\text{G 6.42})$$

Es gilt für die sogenannte B-Matrix  $[B]$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.43})$$

und für den Verformungsvektor  $\{U\}$

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_y \\ \beta_x \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.44})$$

### 2D - Gleichgewicht der Einzelschichte ES

Die Gleichgewichtsgleichungen des 3D-Kontinuums im kartesischen Koordinatensystem sehen in der Differentialformulierung folgendermaßen aus. Für die Darstellung wird die transponierte Operatormatrix  $[G^T]$  und der Spannungsvektor  $\{\sigma\}_{3D}$  herangezogen.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{3D} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{G 6.45})$$

Der obige Zusammenhang kann in der folgenden Kurzform angeschrieben werden.

$$[G^T] \cdot \{\sigma\}_{3D} + \{p\} = 0 \quad (\text{G 6.46})$$

Verwendet man die Integralformulierung - Prinzip der virtuellen Arbeiten - so sieht die G 6.45 folgendermaßen aus.

$$-\int_V \sigma^T \cdot \delta \varepsilon \cdot dV + \int_V p^T \cdot \delta u \cdot dV = 0 \quad (\text{G 6.47})$$

Es sei hier vermerkt, daß die Volumenlasten  $p_x$ ,  $p_y$  und  $p_z$  in Form von Flächenlasten berücksichtigt werden. Ebenfalls berücksichtigt werden die Momentenbeanspruchungen  $m_x$  und  $m_y$ , welche auch als Flächenlasten in die Gleichgewichtsgleichungen einfließen. Diese Gleichungen lassen sich in zwei Gruppen gliedern. Einerseits sind dies die Bedingungen für die Scheibe und andererseits die Bedingungen für die Platte. Betrachtet man die Schnittlasten einer Einzelschichte ES im Bild 6.2 in dem ein Ausschnitt eines Verbundsystems dargestellt ist, so lassen sich die folgenden Gleichgewichtsgleichungen herleiten.

Zwei Gleichgewichtsgleichungen für den Scheibenanteil:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + p_x = 0 \quad (\text{G 6.48})$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0 \quad (\text{G 6.49})$$

Drei Gleichgewichtsgleichungen für den Plattenanteil:

$$\frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_x = 0 \quad (\text{G 6.50})$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + m_y = 0 \quad (\text{G 6.51})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z = 0 \quad (\text{G 6.52})$$

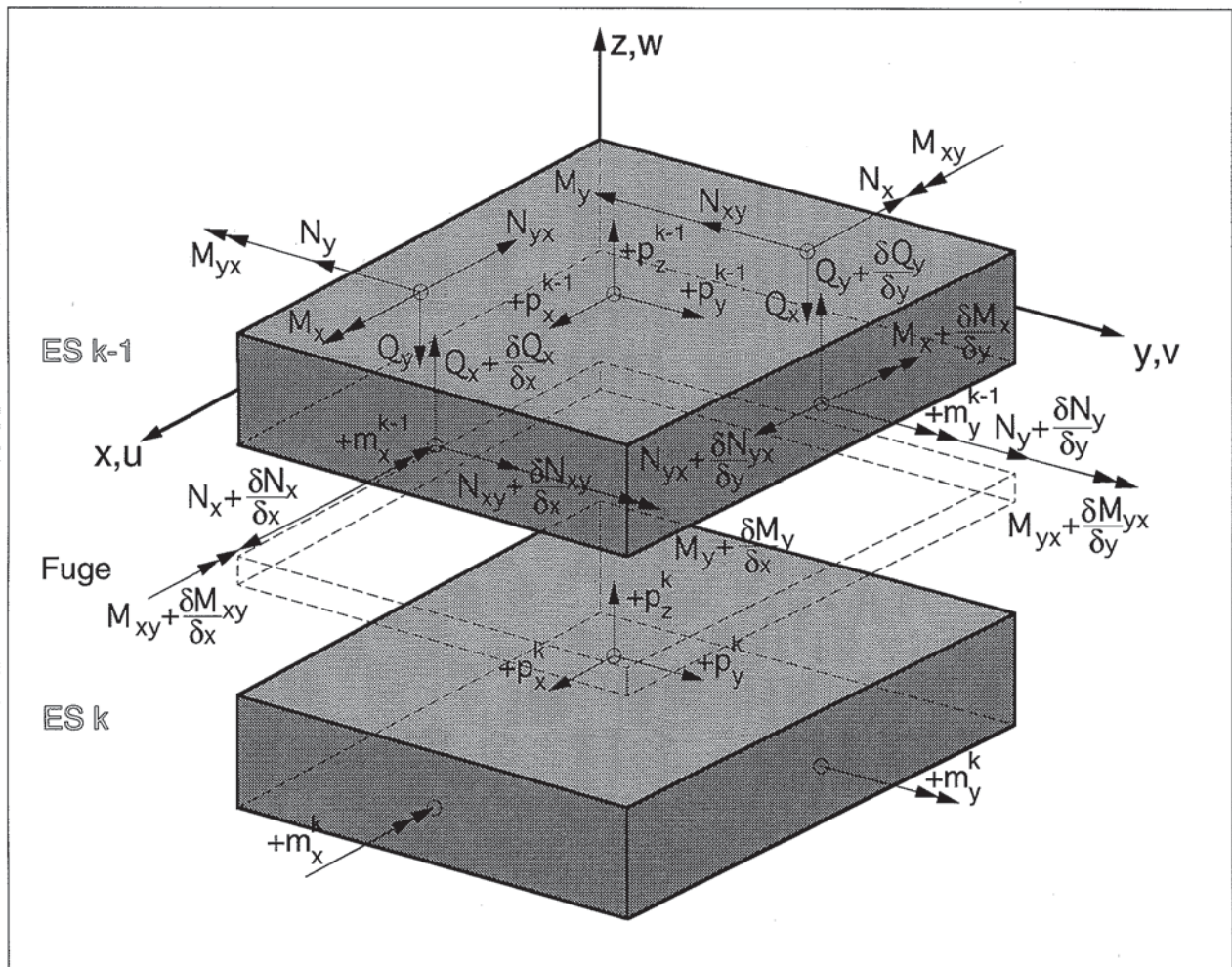


Bild 6.2

Einzelschichten k-1 und k - Darstellung der Schnittlasten und Beanspruchungen

Die Schnittlastkomponenten des Vektors  $\{S\}$  lassen sich über die Spannungskomponenten formulieren.

Schnittgrößen der Scheibe:



$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot dz \quad (\text{G 6.53})$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot dz \quad (\text{G 6.54})$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot dz \quad (\text{G 6.55})$$

Schnittgrößen der Platte:

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad (\text{G 6.56})$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz \quad (\text{G 6.57})$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (\text{G 6.58})$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \cdot dz \quad (\text{G 6.59})$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \cdot dz \quad (\text{G 6.60})$$

Der Zusammenhang zwischen den Schnittlasten und den Belastungskomponenten läßt sich mit der folgenden Gleichung zeigen.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_y \\ M_x \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ m_y \\ m_x \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{G 6.61})$$

Der obige Zusammenhang kann auch in der folgenden Kurzform angeschrieben werden, wobei die Matrix  $[\hat{B}^T]$  die transponierte B-Matrix darstellt und der Vektor  $\{S\}$  die Komponenten der Schnittlasten beinhaltet. Der Vektor  $\{p\}$  ist der Lastvektor für eine Einzelschicht ES.

$$[\hat{B}^T] \cdot \{S\} + \{p\} = 0 \quad (\text{G 6.62})$$

Es gilt für die Matrix  $[B^T]$

$$[\hat{B}^T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.63})$$

und für den Schnittlastenvektor  $\{S\}$  (G 6.64)

$$\{S\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_y \\ M_x \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.65})$$

### 2D - Stoffgleichungen der Einzelschichte ES

Ausgehend vom allgemeinsten Fall der Darstellung der 3D-Stoffgleichungen lassen sich diese im lokalen Koordinatensystem der Stoffachsen folgendermaßen anschreiben.

$$\{\sigma_L\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_L \quad (\text{G 6.66})$$

Existieren drei Symmetrieebenen für jeden beliebigen Punkt des Kontinuums, so lassen sich daraus die folgenden Eigenschaften herleiten. Die drei Symmetrieebenen stehen zueinander senkrecht, wobei sich die nachfolgende Darstellung der Matrix  $[Q_L]$  auf ein Koordinatensystem bezieht, dessen Achsen senkrecht auf die vorhandenen Ebenen stehen. Damit reduziert sich die Zahl der unabhängigen Werkstoffkonstanten auf 9. Man spricht dann von einem orthogonal anisotropen - orthotropen - Materialverhalten.

$$\{\sigma_L\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_L \quad (\text{G 6.67})$$

Dieser Zusammenhang kann in der folgenden Kurzform angeschrieben werden, wobei die Matrix  $[Q_L]$  die lokale Steifigkeitsmatrix darstellt und der Vektor  $\{\varepsilon_L\}$  die Dehnungskomponenten im lokalen System beinhaltet.

$$\{\sigma_L\} = [Q_L] \cdot \{\varepsilon_L\} \quad (\text{G 6.68})$$

Die G 6.68 gilt für das lokale Koordinatensystem der Stoffhauptachsen. Für beliebig orientierte Einzelschichten wird eine Transformation in ein globales Koordinatensystem notwendig, um aus den vorhandenen Einzelschichten unter Einbeziehung der Verbundfugen einen Schichtenverbund formulieren zu können.

Es gilt für die Steifigkeitsmatrix  $[Q_L]$  folgende Beziehung, wobei hier die für die Ebene gebräuchliche Form der Schreibweise gewählt wird.

$$\{\sigma_L\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}_L \quad (\text{G 6.69})$$

### 2D - Transformation in der Einzelschichte ES

Ausgehend von den Gleichungen im lokalen Koordinatensystem erfolgt über die Matrix [T] die Transformation dieser Beziehungen ins globale Koordinatensystem. Nachfolgend ist die 3D-Transformationsmatrix und die 2D-Transformationsmatrix dargestellt.

$$[T]_{3D} = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi \cdot \sin\varphi & \cos\varphi \cdot \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.70})$$

Für die Ebene ergibt sich unter Heranziehung der gebräuchlichen Schreibweise die folgende Transformationsmatrix [T].

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\cos\varphi \cdot \sin\varphi & \cos\varphi \cdot \sin\varphi & (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.71})$$

Mit der Transformationsmatrix [T] lassen sich nun die folgenden Zusammenhänge zwischen lokalen und globalen Bestimmungsgleichungen anschreiben.

Für die lokalen Dehnungskomponenten der Einzelschichte ES ist folgender Zusammenhang gültig.

$$\{\varepsilon_L\} = [T^{-T}] \cdot \{\varepsilon\} \quad (\text{G 6.72})$$

Die Matrix  $[T^{-T}]$  stellt die inverse, transponierte Transformationsmatrix dar.

Für die lokalen Spannungskomponenten der Einzelschichte ES gilt folgendes.



$$\{\sigma_L\} = [T] \cdot \{\sigma\} \quad (\text{G 6.73})$$

Setzt man G 6.72 und G 6.73 in G 6.68 ein, so erhält man damit nach einer Umformung den globalen Spannungsvektor  $\{\sigma\}$ .

$$[T] \cdot \{\sigma\} = [Q_L] \cdot [T^{-T}] \cdot \{\varepsilon\} \quad \{\sigma\} = [T^{-1}] \cdot [Q_L] \cdot [T^{-T}] \cdot \{\varepsilon\} \quad (\text{G 6.74})$$

Es ergeben sich somit die Bestimmungsgleichungen für den globalen Spannungsvektor  $\{\sigma\}$  - 2D-Stoffgleichungen - und der globalen Steifigkeitsmatrix  $[Q]$  wie folgt.

$$\{\sigma\} = [Q] \cdot \{\varepsilon\} \quad (\text{G 6.75})$$

$$[Q] = [T^{-1}] \cdot [Q_L] \cdot [T^{-T}] \quad (\text{G 6.76})$$

Damit ergeben sich die 2D-Stoffgleichungen im globalen Koordinatensystem unter Berücksichtigung der transversalen Querkraft in ausgeschriebener Form wie folgt.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{54} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.77})$$

Es gilt für die globale Steifigkeitsmatrix  $[Q]$

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{54} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.78})$$

Die globalen Steifigkeitsterme  $Q_{ij}$  lassen sich wie folgt darstellen.

$$Q_{11} = Q_{11,L} \cos^4 \varphi + 2Q_{12,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{22,L} \sin^4 \varphi + 4Q_{66,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad (\text{G 6.79})$$

$$Q_{12} = Q_{11,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{12,L} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) + Q_{22,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 4Q_{66,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad (\text{G 6.80})$$

$$Q_{22} = Q_{11,L} \sin^4 \varphi + 2Q_{12,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{22,L} \cos^4 \varphi + 4Q_{66,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad (\text{G 6.81})$$

$$\begin{aligned}
 Q_{66} = & Q_{11,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 2Q_{12,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{22,L} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\
 & + Q_{66,L} (\cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi)^2 + 2Q_{16,L} (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi) + \\
 & + 2Q_{26,L} (\sin^3 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos^3 \varphi)
 \end{aligned} \quad (\text{G 6.82})$$

$$\begin{aligned}
 Q_{16} = & Q_{11,L} \sin \varphi \cos^3 \varphi + Q_{12,L} (\sin^3 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos^3 \varphi) - Q_{22,L} \sin^3 \varphi \cos \varphi + \\
 & + 2Q_{66,L} (\sin^3 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos^3 \varphi) + Q_{16,L} (\cos^4 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) + \\
 & + Q_{26,L} (3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi)
 \end{aligned} \quad (\text{G 6.83})$$

$$\begin{aligned}
 Q_{26} = & Q_{11,L} \sin^3 \varphi \cos \varphi + Q_{12,L} (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi) - Q_{22,L} \sin \varphi \cos^3 \varphi + \\
 & + 2Q_{66,L} (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi) + Q_{16,L} (3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi) + \\
 & + Q_{26,L} (\cos^4 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)
 \end{aligned} \quad (\text{G 6.84})$$

$$Q_{44} = Q_{44,L} \cos^2 \varphi + 2Q_{45,L} \sin \varphi \cos \varphi + Q_{55,L} \sin^2 \varphi \quad (\text{G 6.85})$$

$$Q_{45} = -Q_{44,L} \sin \varphi \cos \varphi + Q_{45,L} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + Q_{55,L} \sin \varphi \cos \varphi \quad (\text{G 6.86})$$

$$Q_{55} = Q_{44,L} \sin^2 \varphi - 2Q_{45,L} \sin \varphi \cos \varphi + Q_{55,L} \cos^2 \varphi \quad (\text{G 6.87})$$

### 2D - Integration über die Schichtdicke h

Durch Einsetzen der kinematischen Bedingungen der G 6.39 in die 2D-Stoffgleichungen der G 6.77 erhält man nach Integration über die Querschnittshöhe die in den G 6.53 bis 6.60 angeführten Schnittlasten.

Schnittlasten für die Einzelschicht - Scheibenanteil:

$$\begin{aligned}
 N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot dz
 \end{aligned} \quad (\text{G 6.88})$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \cdot \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_0 \cdot dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}_0 \cdot z \cdot dz \right\} \quad (\text{G 6.89})$$

Nach Integration über die Einzelschichtdicke h ergeben sich die Schnittlasten des Scheibenanteils nach den folgenden Gleichungen, wobei der Vektor {N} die Scheibenschnittlastkomponenten der Einzelschicht k beinhaltet und die Matrix [A] die Dehnsteifigkeitsmatrix darstellt. Für die Einzelschicht sind auf Grund der Quer-

schnittsymmetrie keine Koppelungssteifigkeitsterme zwischen Normalkraft- und Momentenbeanspruchung vorhanden.

$$\{N\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_0 \quad (\text{G 6.90})$$

Es gilt für die sogenannte Dehnsteifigkeitsmatrix [A] und die Terme  $A_{ij}$  folgendes.

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix}_k \quad \begin{array}{l} A_{11} = h \cdot Q_{11} \\ A_{12} = h \cdot Q_{12} \\ A_{16} = h \cdot Q_{16} \end{array} \quad (\text{G 6.91})$$

Die obigen Zusammenhänge können in der folgenden Kurzform angeschrieben werden.

$$\{N\} = [A] \cdot \{\varepsilon\}_0 \quad (\text{G 6.92})$$

$$[A] = h \cdot [Q] \quad (\text{G 6.93})$$

Schnittlasten für die Einzelschichte - Plattenanteil Momente:

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (\text{G 6.94})$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_x \\ M_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \cdot \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_0 \cdot z \cdot dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}_0 \cdot z^2 \cdot dz \right\} \quad (\text{G 6.95})$$

Nach Integration über die Einzelschichtdicke  $h$  ergeben sich die Schnittlasten des Plattenanteils nach den folgenden Gleichungen, wobei der Vektor  $\{M\}$  die Plattenschnittlastkomponenten der Einzelschichte  $k$  beinhaltet und die Matrix  $[D]$  die Biegesteifigkeitsmatrix darstellt. Für die Einzelschichte sind auf Grund der Querschnittssymmetrie zur Mittelfläche keine Koppelungssteifigkeitsterme zwischen Normalkraft- und Momentenbeanspruchung vorhanden.

$$\{M\} = \begin{bmatrix} M_y \\ M_x \\ M_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}_0 \quad (\text{G 6.96})$$

Es gilt für die sogenannte Biegesteifigkeitsmatrix [D] und die Terme  $D_{ij}$  folgendes.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}_k \quad \begin{aligned} D_{11} &= \frac{h^3}{12} \cdot Q_{11} \\ D_{12} &= \frac{h^3}{12} \cdot Q_{12} \\ D_{16} &= \frac{h^3}{12} \cdot Q_{16} \end{aligned} \quad (\text{G 6.97})$$

Die obigen Zusammenhänge können in der folgenden Kurzform angeschrieben werden.

$$\{M\} = [D] \cdot \{\kappa\}_0 \quad (\text{G 6.98})$$

$$[D] = \frac{h^3}{12} \cdot [Q] \quad (\text{G 6.99})$$

Schnittlasten für die Einzelschicht - Plattenanteil Querkräfte:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \cdot dz \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} \cdot dz \quad (\text{G 6.100})$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} k_x^2 Q_{55} & k_x k_y Q_{54} \\ k_x k_y Q_{45} & k_y^2 Q_{44} \end{bmatrix}_k \cdot \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} + \beta_y \\ \gamma_{yz} + \beta_x \end{bmatrix}_0 \cdot dz \right\} \quad (\text{G 6.101})$$

Nach Integration über die Schichtdicke  $h$  und der Berücksichtigung der Schubkorrekturfaktormatrix [k] ergeben sich die Komponenten des Querkraftvektors {Q} für die Einzelschicht  $k$ , wobei die Matrix [E] die Steifigkeitsterme für die Ermittlung der Querkräfte beinhaltet. Die Matrix [E] ergibt sich mit der erweiterten Matrix [A] und der Matrix der Schubkorrekturfaktoren [k].

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} E_{55} & E_{54} \\ E_{45} & E_{44} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz} + \beta_y \\ \gamma_{yz} + \beta_x \end{bmatrix}_0 \quad (\text{G 6.102})$$

Es gilt für die sogenannte Steifigkeitsmatrix der Querkräfte [E] und die Terme  $E_{ij}$  folgendes.



$$[A] = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{54} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix}_k \quad \begin{aligned} A_{55} &= h \cdot Q_{55} \\ A_{54} &= h \cdot Q_{54} \\ A_{44} &= h \cdot Q_{44} \end{aligned} \quad (\text{G 6.103})$$

Die obigen Zusammenhänge können in der folgenden Kurzform angeschrieben werden.

$$\{Q\} = [E] \cdot \{\varepsilon\}_0 \quad (\text{G 6.104})$$

$$[E] = [k] \cdot [A] \cdot [k] \quad (\text{G 6.105})$$

Zusammenfassend kann für die 2D-Stoffgleichungen der Einzelschichte folgendes Gleichungssystem angeschrieben werden. Hierin ist die Matrix  $[Q_{ES}]$  die Gesamtsteifigkeitsmatrix der Einzelschichte ES und der Vektor  $\{S\}$  der Schnittlastvektor, welcher die Schnittlastkomponenten beinhaltet.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_y \\ M_x \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & E_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{45} & E_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.106})$$

Es gilt für die sogenannten Matrix  $[Q_{ES}]$

$$[Q_{ES}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & E_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{45} & E_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.107})$$

Der obige Zusammenhang kann auch in der folgenden Kurzform angeschrieben werden.

$$\{S\} = [Q_{ES}] \cdot [\varepsilon] \quad (\text{G 6.108})$$

An dieser Stelle sei die Analogie zur Erfassung der Faser-Kunststoff-Verbunde erwähnt. Betrachtet man einen Schichtenverbund mit symmetrischem Verhalten, so erkennt man, daß auch hier die Koppelungsterme der sogenannten Koppelungsmatrix  $[B] = 0$  sind. Das symmetrische Verhalten bezieht sich nicht nur auf den geometrischen Aufbau, sondern auf die symmetrische mechanische Gesamtwirkung. Im Allgemeinen hat man es bei Faser-Kunststoff-Verbunden mit einer Koppelungsmatrix  $[B] \neq 0$  zu tun. Im Sonderfall  $[B] = 0$  spricht man von der klassischen Laminattheorie. Die allgemeine Form der Darstellung sieht folgendermaßen aus.

$$[Q_{SV}] = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.109})$$

**2D - Steifigkeit der Einzelschicht - Einzelschichtsteifigkeitsmatrix [K]**

Zur Ermittlung der Einzelschichtsteifigkeitsmatrix [K] sind alle 2D - Gleichungen erforderlich. Zusammenfassend seien hier nochmals diese Gleichungen angeführt für die Einzelschicht ES k-1 angeführt..

2D - Kinematik

$$\{\varepsilon\} = [\hat{B}] \cdot \{U^{k-1}\} \quad (\text{G 6.110})$$

2D - Gleichgewichtsgleichungen

$$[\hat{B}^T] \cdot \{S\} + \{p^{k-1}\} = 0 \quad (\text{G 6.111})$$

2D - Stoffgleichungen - Schnittkräfte {S}

$$\{S\} = [Q_{ES}] \cdot \{\varepsilon\} \quad (\text{G 6.112})$$

Setzt man G 6.110 in G 6.112 und diese wiederum in G 6.111 ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen der sogenannten Einzelschichtsteifigkeitsmatrix [K] und den Verformungen  $\{U^{k-1}\}$  sowie den Beanspruchungen  $\{p^{k-1}\}$  einer Einzelschicht ES, im obigen Fall der Einzelschicht ES k-1.

$$[\hat{B}^T] \cdot [Q_{ES}] \cdot [\hat{B}] \cdot \{U^{k-1}\} + \{p^{k-1}\} = 0 \quad (\text{G 6.113})$$

Einzelschichtsteifigkeitsmatrix [K]:

$$[K] = [\hat{B}^T] \cdot [Q_{ES}] \cdot [\hat{B}] \quad (\text{G 6.114})$$

Die Einzelschichtsteifigkeitsmatrix [K] ist eine 5 \* 5 - Matrix, die die Steifigkeitsterme der Einzelschichten ES beinhaltet. Zusammen mit der Fugensteifigkeitsmatrix [k] - 10 \* 10 - Matrix - wird es möglich, den allgemeinen Fall des nachgiebigen Verbundes geschichteter, flächiger Holzstrukturen darzustellen.

Für die Einzelschicht ES k-1 ergibt sich die folgende Gleichung nach Berücksichtigung der Einzelschichtsteifigkeitsmatrix [K].

$$[K] \cdot \{U^{k-1}\} + \{p^{k-1}\} = 0 \quad (\text{G 6.115})$$

2D - Modellierung der Verbundfuge

Wie bereits im Kapitel 4 erwähnt geht es darum, aufbauend auf dem vorhandenen Wissen um das Verhalten geschichteter Holzwerkstoffe, diese Erkenntnisse zu übernehmen und ein Modell zu entwickeln, welches es erlaubt, für den starren und nachgiebigen Verbund auf analytischem Wege ein allgemein gültiges mechanisch-mathematisches Konzept vorzulegen. Ein wesentliches Anliegen ist es, geschichtete, flächige Strukturen nicht nur aus Furnieren im starren Verbund aufzubauen, sondern auch aus Brettlamellen wie im Bild 6.3 ersichtlich. Je nach Ausbildung der Verbundfuge wird man zwischen starrem und nachgiebigem Verbund unterscheiden. Der allgemeine Fall des nachgiebigen Verbundes bedingt eine nachgiebige Koppelungsmatrix [k].

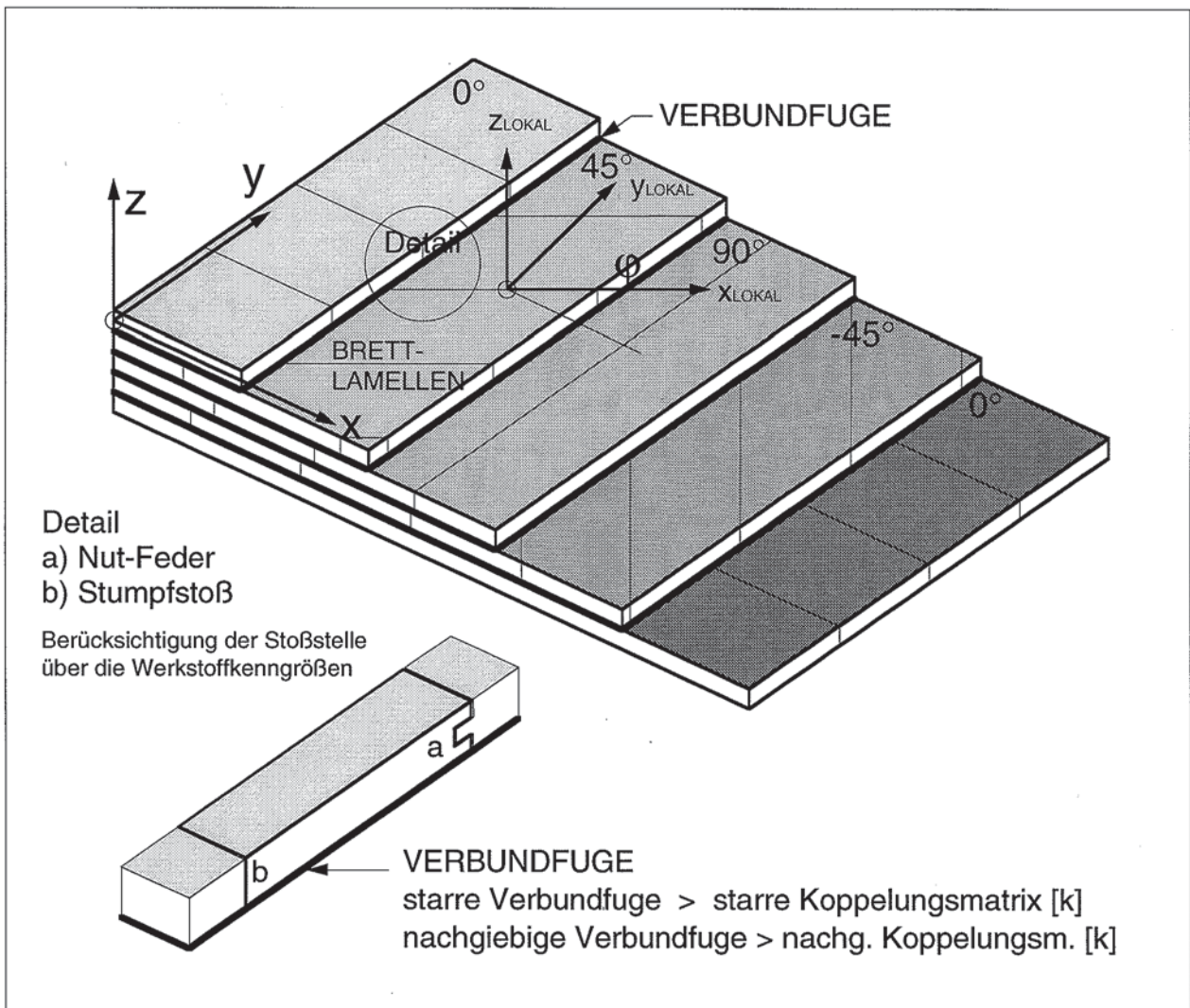


Bild 6.3

Geschichtete flächenhafte Holzstruktur - Verwendung von Brettlamellen



Bei der Verwendung stiftförmiger Verbindungsmittel - z.B. Rillennägeln oder Holzschrauben - sind gewisse Effekte bei der Modellformulierung zu berücksichtigen.

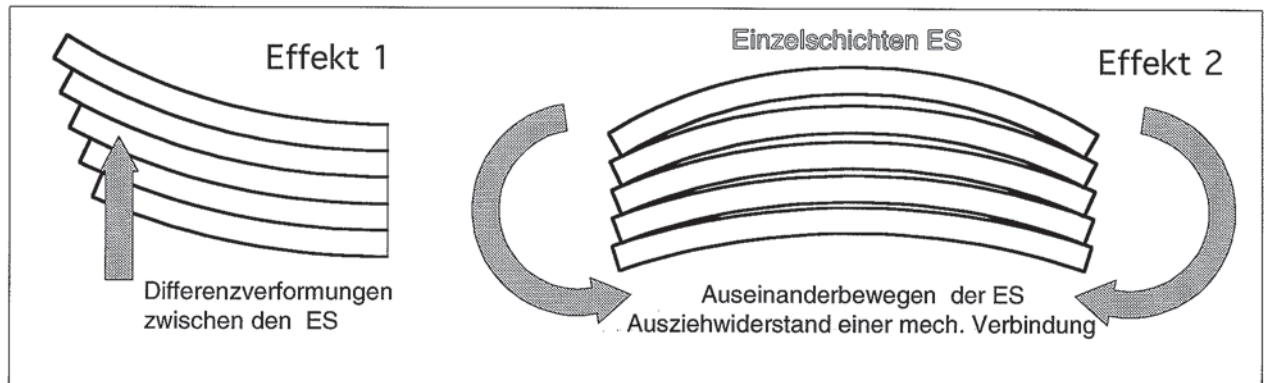


Bild 6.4

Nachgiebiger Verbund und das Aufgehen der Einzelschichten

Einerseits ist dies die Differenzverschiebung zweier Einzelschichten und andererseits ist es das Ausziehverhalten eines stiftförmigen mechanischen Verbindungsmittels, ausgedrückt durch den Auszieh Widerstand, das zu einem vertikalen - z-Richtung - Auseinanderbewegen der Einzelschichten führt. Im nachfolgenden Bild 6.4 sind diese beiden Effekte dargestellt. Ein weiterer bestimmender Faktor bei der Modellierung der Verbundfuge ist die Berücksichtigung des Last-Verschiebungsverhaltens einer stiftförmigen Verbindung. Im nachfolgenden Modell geschieht dies durch einen linear-elastischen Ansatz in allen drei Materialhauptachsen.

2D - Kinematik der Verbundfuge

Ausgehend von einem aus fünf Schichten und vier Fugen bestehenden Plattenelement, soll in den nächsten Abschnitten das Verhalten der Verbundfuge dargestellt werden.

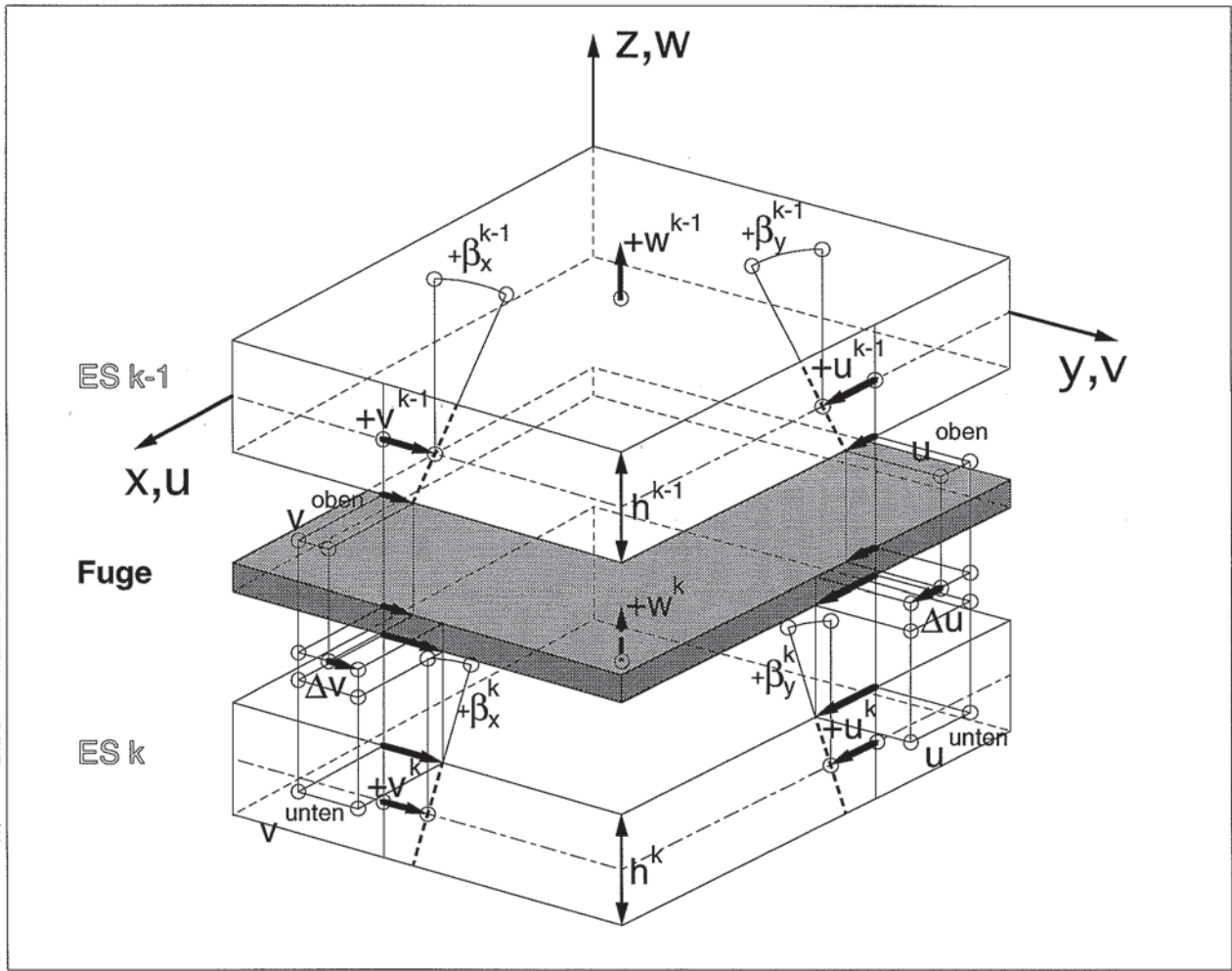


Bild 6.5

Kinematik der Verbundfuge für die beiden Schichten k-1 und k

Betrachtet man den allgemeinen Fall der nachgiebigen Verbundfuge, so sind die drei Differenzverformungen  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  und  $\Delta w$  zwischen den Einzelschichten ES zu berücksichtigen. Für die beiden Schichten k-1 und k sind dies die Differenzverformungen  $\Delta u^{k-1,k}$ ,  $\Delta v^{k-1,k}$  und  $\Delta w^{k-1,k}$ . Mit Berücksichtigung der Verschiebungsgrößen der Einzelschichten ES lassen sich die eben erwähnten Differenzverformungen folgendermaßen anschreiben. Mit Bild 6.5 sind die Beziehungen der G 6.116 bis G 6.121 herleitbar.

Für die Verformung  $\Delta u$  in Richtung der x-Achse gilt:

$$\Delta u = u^{\text{oben}} - u^{\text{unten}} \quad (\text{G 6.116})$$

$$\Delta u = u^{k-1} - u^k - \left( \beta_y^{k-1} \cdot \frac{h^{k-1}}{2} + \beta_y^k \cdot \frac{h^k}{2} \right) \quad (\text{G 6.117})$$

Für die Verformung  $\Delta v$  in Richtung der y-Achse gilt:

$$\Delta v = v^{\text{oben}} - v^{\text{unten}} \quad (\text{G 6.118})$$

$$\Delta v = v^{k-1} - v^k - \left( \beta_x^{k-1} \cdot \frac{h^{k-1}}{2} + \beta_x^k \cdot \frac{h^k}{2} \right) \quad (\text{G 6.119})$$

Für die Verformung  $\Delta w$  in Richtung der z-Achse gilt:

$$\Delta w = w^{\text{oben}} - w^{\text{unten}} \quad (\text{G 6.120})$$

$$\Delta w = w^{k-1} - w^k \quad (\text{G 6.121})$$

Der Zusammenhang zwischen den Differenzverformungen der beiden Einzelschichten  $k-1$  und  $k$  und den Verschiebungskomponenten der jeweiligen, vom Verbund betroffenen, Einzelschichten läßt sich in Matrixschreibweise nach der G 6.122 wie folgt darstellen.

$$\{\Delta u\} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{h^{k-1}}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{h^k}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{h^{k-1}}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{h^k}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^{k-1} \\ v^{k-1} \\ w^{k-1} \\ \beta_y^{k-1} \\ \beta_x^{k-1} \\ u^k \\ v^k \\ w^k \\ \beta_y^k \\ \beta_x^k \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.122})$$

Der obige Zusammenhang kann somit in der folgenden Kurzform angeschrieben werden, wobei die Matrix  $[T]$  die Fugenmatrix und der Vektor  $\{U^{k-1,k}\}$  den Verschiebungsvektor zweier angrenzender Einzelschichten darstellt.

$$\{\Delta u\} = [T] \cdot \{U^{k-1,k}\} \quad (\text{G 6.123})$$

Es gilt für die Fugenmatrix  $[T]$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{h^{k-1}}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{h^k}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{h^{k-1}}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{h^k}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.124})$$

und für den Verschiebungsvektor  $\{U^{k-1,k}\}$

$$\{U^{k-1,k}\} = \begin{bmatrix} u^{k-1} \\ v^{k-1} \\ w^{k-1} \\ \beta_y^{k-1} \\ \beta_x^{k-1} \\ u^k \\ v^k \\ w^k \\ \beta_y^k \\ \beta_x^k \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.125})$$



2D - Gleichgewicht der Verbundfuge

Betrachtet man das Bild 6.6, so sind darin die positiv wirkenden Fugenkräfte  $s_x$ ,  $s_y$  und  $s_z$  dargestellt. Es sind dies die aus einer Beanspruchung auf ein Plattenelement resultierenden Kräfte in der Verbundfuge. Aus dem Zusammenwirken der Verbundfuge mit den Einzelschichten ergeben sich die folgenden Gleichgewichtsgleichungen für den Fugenbereich.

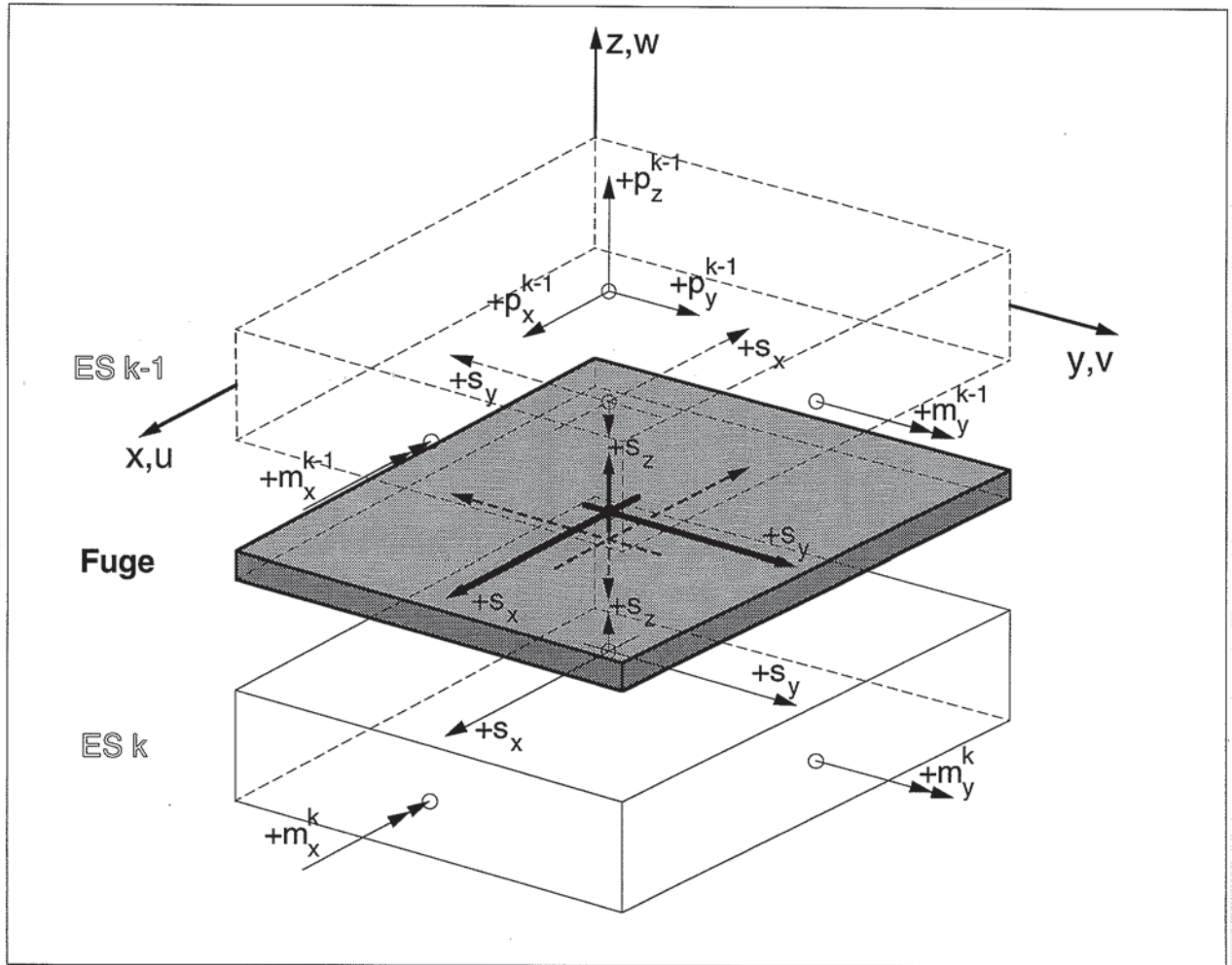


Bild 6.6

Gleichgewicht für den Fugenbereich

Für die Einzelschicht k-1 gilt:

$$p_x^{k-1} = s_x \quad p_y^{k-1} = s_y \quad p_z^{k-1} = s_z \quad (\text{G 6.126})$$

$$m_y^{k-1} = -\frac{h^{k-1}}{2} \cdot s_x \quad m_x^{k-1} = -\frac{h^{k-1}}{2} \cdot s_y \quad (\text{G 6.127})$$

Für die Einzelschicht k gilt:

$$p_x^k = -s_x \quad p_y^k = -s_y \quad p_z^k = -s_z \quad (\text{G 6.128})$$

$$m_y^k = -\frac{h^k}{2} \cdot s_x \quad m_x^k = -\frac{h^k}{2} \cdot s_y \quad (\text{G 6.129})$$

Faßt man die obigen Gleichgewichtsbeziehungen zusammen, so ergibt sich die folgende Matrixgleichung.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{h^{k-1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^{k-1}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{h^k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^k}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x^{k-1} \\ p_y^{k-1} \\ p_z^{k-1} \\ m_y^{k-1} \\ m_x^{k-1} \\ p_x^k \\ p_y^k \\ p_z^k \\ m_y^k \\ m_x^k \end{bmatrix} = \{p^{k-1,k}\} \quad (\text{G 6.130})$$

Der obige Zusammenhang kann in der folgenden Kurzform niedergeschrieben werden, wobei die Matrix  $[T^T]$  die transponierte Fugenmatrix und der Vektor  $\{s\}$  die Kraftkomponenten in der Verbundfuge beinhaltet. Der Lastvektor  $\{p^{k-1,k}\}$  stellt die Lastanteile für die zu verbindenden Einzelschichten, hervorgerufen durch die Fugenkräfte, dar.

$$[T^T] \cdot \{s\} = \{p^{k-1,k}\} \quad (\text{G 6.131})$$

Es gilt für die transponierte Fugenmatrix  $[T^T]$

$$[T^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{h^{k-1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^{k-1}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{h^k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h^k}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.132})$$

und für den Vektor  $\{s\}$

$$\{s\} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.133})$$

### 2D - Stoffgleichungen der Verbundfuge

Die Stoffgleichungen in der Verbundfuge stellen einen Zusammenhang zwischen den Fugenkräften  $\{s\}$  und den in der Fuge auftretenden Differenzverformungen  $\{\Delta u\}$  dar. Die Widerstände in der Verbundfuge werden als Flächenwiderstände in die Berechnung eingeführt. Die Werte  $c_u$  und  $c_v$  stellen die Widerstände in der  $xy$ -Ebene dar und der Wert  $c_w$  steht für den Auszieh Widerstand des bei einer nachgiebigen Verbundfuge verwendeten mechanischen Verbindungsmittels. Als mechanische Verbindungsmittel kommen stiftförmige Verbindungsmittel in Frage. Den nachfolgenden Stoffgleichungen wird ein linear-elastisches Verhalten der Verbundfuge zugrundegelegt. Die Fugenkräfte im lokalen Koordinatensystem können wie folgt dargestellt werden. Das lokale Koordinatensystem entspricht dem Materialhauptachsensystem der Einzelschichten.

$$\{s_L\} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} c_u & 0 & 0 \\ 0 & c_v & 0 \\ 0 & 0 & c_w \end{bmatrix}_L \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix}_L \quad (\text{G 6.134})$$

Der obige Zusammenhang kann in der folgenden Kurzform angeschrieben werden, wobei die Matrix  $[c_L]$  die Fugenwiderstandsmatrix darstellt und der Vektor  $\{\Delta u_L\}$  die Differenzverformungen im lokalen Koordinatensystem beinhaltet.

$$\{s_L\} = [c_L] \cdot \{\Delta u_L\} \quad (\text{G 6.135})$$

Für die Ermittlung der Fugensteifigkeitsmatrix  $[k]$  für das globale System ist es erforderlich, die Zusammenhänge in der Verbundfuge vom lokalen in das globale Koordinatensystem zu transformieren. Man erhält damit den globalen Vektor  $\{s\}$  der Verbundfugenkräfte.

### 2D - Transformation in der Verbundfuge

Ausgehend von den Gleichungen im lokalen Koordinatensystem erfolgt über die Matrix  $[t]$  die Transformation dieser Beziehungen ins globale Koordinatensystem. Nachfolgend ist die Transformationsmatrix  $[t]$  dargestellt.

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.136})$$

Mit der Transformationsmatrix  $[t]$  lassen sich nun die folgenden Zusammenhänge zwischen lokalen und globalen Bestimmungsgleichungen anschreiben. Für die Differenzverformungen in der Verbundfuge ist folgender Zusammenhang gültig.

$$\{\Delta u_L\} = [t] \cdot \{\Delta u\} \quad (\text{G 6.137})$$



Für die Fugenkräfte gilt:

$$\{s_L\} = [t] \cdot \{s\} \quad (\text{G 6.138})$$

Setzt man G 6.137 und G 6.138 in die G 6.135 ein, so erhält man damit nach einer Umformung die globalen Fugenkräfte  $\{s\}$ .

$$[t] \cdot \{s\} = [c_L] \cdot [t] \cdot \{\Delta u\} \quad \{s\} = [t^{-1}] \cdot [c_L] \cdot [t] \cdot \{\Delta u\} \quad (\text{G 6.139})$$

Da die inverse Transformationsmatrix  $[t^{-1}]$  ident ist mit der transponierten Transformationsmatrix  $[t^T]$  ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für die globalen Fugenkräfte  $\{s\}$  und die globale Fugenwiderstandsmatrix  $[c]$ .

$$\{s\} = [t^T] \cdot [c_L] \cdot [t] \cdot \{\Delta u\} \quad (\text{G 6.140})$$

$$[c] = [t^T] \cdot [c_L] \cdot [t] \quad (\text{G 6.141})$$

Die globale Fugenwiderstandsmatrix  $[c]$  läßt sich nun wie folgt allgemein darstellen:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{G 6.142})$$

$$\{s\} = [c] \cdot \{\Delta u\} \quad (\text{G 6.143})$$

### 2D - Steifigkeit der Fuge - Koppelungsmatrix [k]

Zur Ermittlung der Fugensteifigkeitsmatrix [k] sind alle 2D - Gleichungen erforderlich. Zusammenfassend seien hier nochmals diese Gleichungen angeführt.

2D - Kinematik

$$\{\Delta u\} = [T] \cdot \{U^{k-1,k}\} \quad (\text{G 6.144})$$

2D - Gleichgewichtsgleichungen:

$$[T^T] \cdot \{s\} = \{p^{k-1,k}\} \quad (\text{G 6.145})$$

2D - Stoffgleichungen - globale Fugenkräfte {s}

$$\{s\} = [c] \cdot \{\Delta u\} \quad (\text{G 6.146})$$

Setzt man G 6.144 in G 6.146 und diese wiederum in G 6.145 ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen der sogenannten globalen Fugensteifigkeitsmatrix [k] und den Verformungen  $\{U^{k-1,k}\}$  sowie den Beanspruchungen  $\{p^{k-1,k}\}$  der jeweils an einer Verbundfuge angrenzenden Einzelschichten ES.

$$[T^T] \cdot [c] \cdot [T] \cdot \{U^{k-1,k}\} = \{p^{k-1,k}\} \quad (\text{G 6.147})$$

Fugensteifigkeitsmatrix [k]:

$$[k] = [T^T] \cdot [c] \cdot [T] = [T^T] \cdot [t^T] \cdot [c_L] \cdot [t] \cdot [T] \quad (\text{G 6.148})$$

Die Fugensteifigkeitsmatrix oder auch Koppelungsmatrix [k] ist für ebene Schichten eine 10 \* 10 - Matrix, die die Steifigkeitsterme der angrenzenden Einzelschichten durch Addition miteinander koppelt. Die Form dieser Koppelung wird im folgenden noch gezeigt.

Für die Verbundfuge zwischen den Einzelschichten ES k-1 und k ergibt sich die folgende Gleichung unter Berücksichtigung der Fugensteifigkeitsmatrix [k].

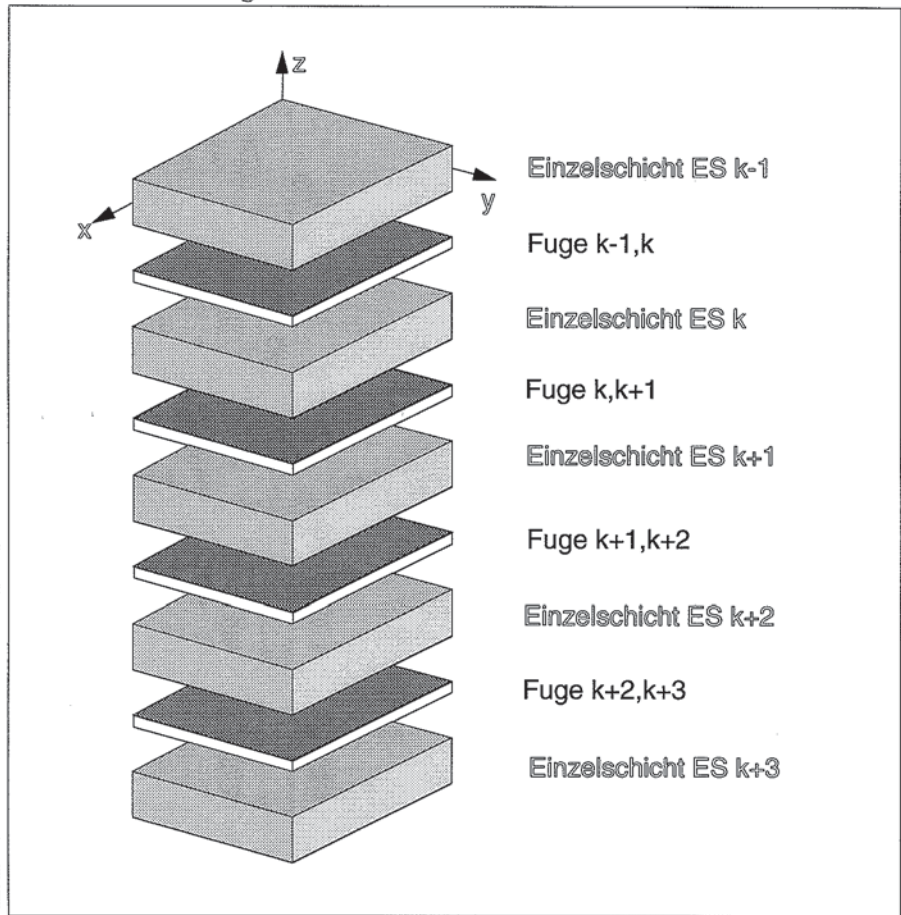
$$[k] \cdot \{U^{k-1,k}\} = \{p^{k-1,k}\} \quad (\text{G 6.149})$$

Für die Koppelungsmatrix [k] ergibt sich folgende 10 \* 10 - Matrix.

$$[k] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & -\frac{h^{k-1}}{2}C_{11} & -\frac{h^{k-1}}{2}C_{12} & -C_{11} & -C_{12} & 0 & -\frac{h^k}{2}C_{11} & -\frac{h^k}{2}C_{12} \\ C_{21} & C_{22} & 0 & -\frac{h^{k-1}}{2}C_{21} & -\frac{h^{k-1}}{2}C_{22} & -C_{21} & -C_{22} & 0 & -\frac{h^k}{2}C_{21} & -\frac{h^k}{2}C_{22} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{33} & 0 & 0 \\ -\frac{h^{k-1}}{2}C_{11} & -\frac{h^{k-1}}{2}C_{12} & 0 & \frac{(h^{k-1})^2}{4}C_{11} & \frac{(h^{k-1})^2}{4}C_{12} & \frac{h^{k-1}}{2}C_{11} & \frac{h^{k-1}}{2}C_{12} & 0 & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{11} & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{12} \\ -\frac{h^{k-1}}{2}C_{21} & -\frac{h^{k-1}}{2}C_{22} & 0 & \frac{(h^{k-1})^2}{4}C_{21} & \frac{(h^{k-1})^2}{4}C_{22} & \frac{h^{k-1}}{2}C_{21} & \frac{h^{k-1}}{2}C_{22} & 0 & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{21} & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{22} \\ -C_{11} & -C_{12} & 0 & \frac{h^{k-1}}{2}C_{11} & \frac{h^{k-1}}{2}C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & \frac{h^k}{2}C_{11} & \frac{h^k}{2}C_{12} \\ -C_{21} & -C_{22} & 0 & \frac{h^{k-1}}{2}C_{21} & \frac{h^{k-1}}{2}C_{22} & C_{21} & C_{22} & 0 & \frac{h^k}{2}C_{21} & \frac{h^k}{2}C_{22} \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{33} & 0 & 0 \\ -\frac{h^k}{2}C_{11} & -\frac{h^k}{2}C_{12} & 0 & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{11} & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{12} & \frac{h^k}{2}C_{11} & \frac{h^k}{2}C_{12} & 0 & \frac{(h^k)^2}{4}C_{11} & \frac{(h^k)^2}{4}C_{12} \\ -\frac{h^k}{2}C_{21} & -\frac{h^k}{2}C_{22} & 0 & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{21} & \frac{h^{k-1}h^k}{4}C_{22} & \frac{h^k}{2}C_{21} & \frac{h^k}{2}C_{22} & 0 & \frac{(h^k)^2}{4}C_{21} & \frac{(h^k)^2}{4}C_{22} \end{bmatrix}$$

**2D - Zusammenbau**

Ausgehend von den beiden Einzelkomponenten - der Einzelschicht und der Fuge - läßt sich das Verhalten des Schichtverbundes beschreiben. Im Bild 6.7 ist am Beispiel einer fünfschichtigen, flächigen Holzstruktur der systematische Aufbau eines Schichtverbundes dargestellt.



**Bild 6.7**

2D - Schichtverbund einer fünfschichtigen, flächigen Holzstruktur

Die 2D - Gleichungen für die Einzelschicht und die Fuge seien an dieser Stelle nochmals angeführt.

Für die Einzelschicht gilt:

$$[K] \cdot \{U^{k-1}\} + \{p^{k-1}\} = 0 \quad (G 6.151)$$

Für die Fuge gilt:

$$[k] \cdot \{U^{k-1,k}\} = \{p^{k-1,k}\} \quad (G 6.152)$$

Der 2D - Zusammenbau ist im Bild 6.8 für eine fünfschichtige, nachgiebig verbundene, flächige Holzstruktur in allgemeiner Form bildhaft dargestellt. Hierin setzt



sich der Belastungsvektor  $\{p\}$  aus dem Anteil  $\{p_{Ext.}\}$  und  $\{p_{Fuge}\}$  zusammen, wobei  $\{p_{Ext.}\} = \{p^{k-1}\}$  die Belastungskomponenten der Einzelschicht ES k-1 enthält und der Vektor  $\{p_{Fuge}\} = \{p^{k-1,k}\}$  den Verbund zwischen den Einzelschichten ES herstellt.

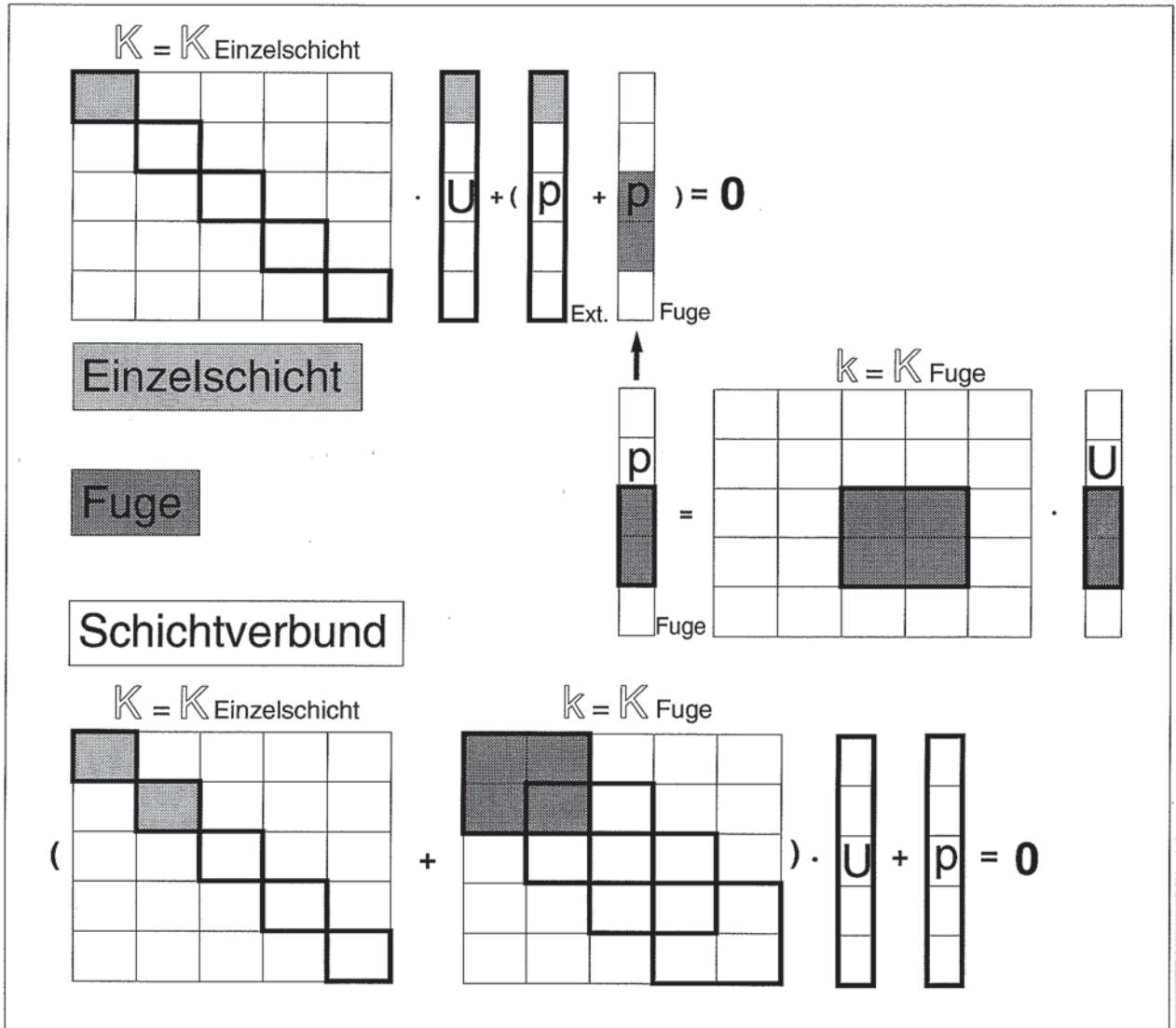


Bild 6.8

2D - Zusammenbau

Der Schichtverbund ergibt sich, indem die  $10 * 10$  - Koppelungsmatrix  $[k]$ , welche zwischen zwei Einzelschichten wirksam ist, additiv mit den beiden  $5 * 5$  - Steifigkeitsmatrizen der an der betrachteten Verbundfuge liegenden Einzelschichten gekoppelt wird. Durch das Ineinandergreifen der einzelnen Koppelungsmatrizen  $[k]$  ergibt sich letztlich der 2D - Schichtverbund SV.

$$SV = \sum ES + \sum F \quad (G. 6.153)$$



---

# 7. Geschichtete Holzstrukturen, Beispiele: Balken - Platte - Schale

---

## Balken - VERBUND1D und Platte - VERBUND2D

---

### Allgemeines

Im ersten Teil dieses Kapitels werden Beispiele zum 1D-Verbund und zum 2D-Verbund gezeigt. Diese Beispiele basieren auf den im Kapitel 6 gefundenen theoretischen Erkenntnissen des starren und nachgiebigen Schichtverbundes. Für die jeweiligen Beispiele des 1D-Verbundes - geschichteter Balken - steht das Programm VERBUND1D bzw. das Programm HOLZBALKEN zur Verfügung und für die Beispiele des 2D-Verbundes - geschichtete ebene Holzstruktur - steht das Programm VERBUND2D zur Verfügung - siehe Anhang A.

### 2D - Zusammenbau - siehe Kapitel 6

Wie bereits im Kapitel 6 dargestellt, läßt sich der 2D-Schichtverbund mit den beiden Einzelkomponenten - der Einzelschichte und der Fuge - beschreiben. Die Einzelschichte ES kann wie folgt dargestellt werden.

$$[K] \cdot \{U^{k-1}\} + \{p^{k-1}\} = 0 \quad (G 7.1)$$

Für die Verbundfuge gilt die folgende Beziehung

$$[k] \cdot \{U^{k-1, k}\} = \{p^{k-1, k}\} \quad (G 7.2)$$

Die Matrix  $[k]$  ist eine  $10 \times 10$  - Matrix und stellt die Koppelungsmatrix dar. Sie ist zwischen zwei Einzelschichten wirksam. Es werden damit die Einzelschichtsteifigkeiten  $[K]$  -  $5 \times 5$  - Matrizen additiv mit den Koppelungsmatrizen verbunden. Im Bild 7.1 ist diese Kombination dargestellt.

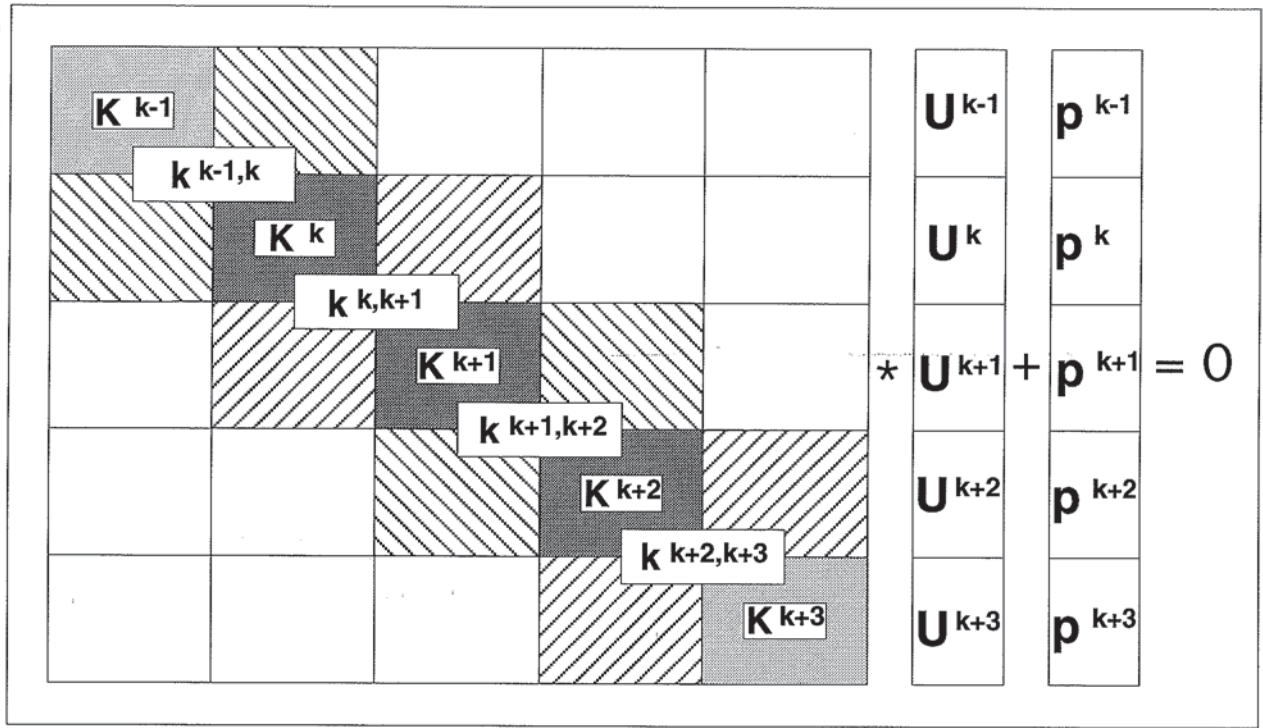


Bild 7.1

2D - Zusammenbau einer fünfschichtigen, flächigen Holzstruktur

### 2D - Diskretisierung

Die Diskretisierung für eine numerische Lösung erfolgt mittels trigonometrischen Reihenansatz. Nachfolgend sind der Belastungsansatz  $p_z$ , die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen  $\{U\}$  und die Schnittlasten  $\{S\}$  dargestellt.

Für den Belastungsansatz gilt:

$$p_z = \sum_m \sum_n p_{z,mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (\text{G 7.3})$$

Ansatzfunktionen für die Verschiebungen  $\{U\}$ :

$$U = \sum_m \sum_n U_{mn} \cdot \cos \mu x \cdot \sin \nu y \quad (\text{G 7.4})$$

$$V = \sum_m \sum_n V_{mn} \cdot \sin \mu x \cdot \cos \nu y \quad (\text{G 7.5})$$

$$W = \sum_m \sum_n W_{mn} \cdot \sin \mu x \cdot \sin \nu y \quad (\text{G 7.6})$$



$$\beta_x = \sum_m \sum_n \beta_{xmn} \cdot \sin \mu x \cdot \cos v y \quad (\text{G 7.7})$$

$$\beta_y = \sum_m \sum_n \beta_{ymn} \cdot \cos \mu x \cdot \sin v y \quad (\text{G 7.8})$$

Ansatzfunktionen für die Schnittlasten {S}:

$$N_x = \sum_m \sum_n N_{xmn} \cdot \sin \mu x \cdot \sin v y \quad (\text{G 7.9})$$

$$N_y = \sum_m \sum_n N_{ymn} \cdot \sin \mu x \cdot \sin v y \quad (\text{G 7.10})$$

$$N_{xy} = \sum_m \sum_n N_{xymn} \cdot \cos \mu x \cdot \cos v y \quad (\text{G 7.11})$$

$$M_x = \sum_m \sum_n M_{xmn} \cdot \sin \mu x \cdot \sin v y \quad (\text{G 7.12})$$

$$M_y = \sum_m \sum_n M_{ymn} \cdot \sin \mu x \cdot \sin v y \quad (\text{G 7.13})$$

$$M_{xy} = \sum_m \sum_n M_{xymn} \cdot \cos \mu x \cdot \cos v y \quad (\text{G 7.14})$$

$$Q_x = \sum_m \sum_n Q_{xmn} \cdot \cos \mu x \cdot \sin v y \quad (\text{G 7.15})$$

$$Q_y = \sum_m \sum_n Q_{ymn} \cdot \cos \mu x \cdot \sin v y \quad (\text{G 7.16})$$

Setzt man nun die Ansatzfunktionen in die 2D - Gleichgewichtsgleichungen für die Einzelschicht ES, so ergeben sich nach Ableitung der obigen Ansatzfunktionen die folgenden Matrizen.

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 7.17})$$

$$[-B^T] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & -v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & -v \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & -v & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v & -\mu & 0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad (\text{G 7.18})$$

Aus der  $[\hat{B}^T]$ -Matrix ergibt sich somit die  $[-B^T]$ -Matrix nach Berücksichtigung der Ansatzfunktionen für die Schnittlasten. Im weiteren wurden die Programme VERBUND1D und VERBUND2D erstellt, mit welchen die nachfolgenden Beispiele berechnet wurden. Die Programmlistings sind dem Anhang A zu entnehmen. Im Anhang B befinden sich die INPUT-Files für das Programm ABAQUS Vers. 4.9.1 und Vers.5.2 zu den nachfolgenden Kontrollberechnungen.

### 1D - Beispiele

Für den geschichteten Verbundbalken sind eine Vielzahl von Arbeiten und Veröffentlichungen bekannt. Es soll hier nur soweit auf den geschichteten Verbundbalken eingegangen werden, wie für eine Kontrolle des erstellten Programmes VERBUND1D bzw. HOLZBALKEN notwendig ist. Die letzten mir bekannten Arbeiten die das Problem des nachgiebigen Verbundes geschichteter Balken zum Inhalt hatten, waren die Dissertationen von R. Kneidl (1991) [19] und B. Norlin (1993) [22]. Ebenso erwähnen möchte ich den Forschungsbericht von J. Natterer und M. Hoelt (1987) [30]. Dieser Bericht beinhaltet eine zusammenfassende Betrachtung des nachgiebigen Verbundes geschichteter Balkensysteme.

#### Beispiel 1: Zweiteiliger Verbundquerschnitt 2 \* 100/160 mm

Das nachfolgende Beispiel ist der Arbeit von R. Kneidl entnommen. Es handelt sich um einen einfeldrig gelagerten, zweiteiligen Verbundbalken. Die Systemabmessungen und die Querschnittsabmessungen sind dem Bild 7.2 zu entnehmen.

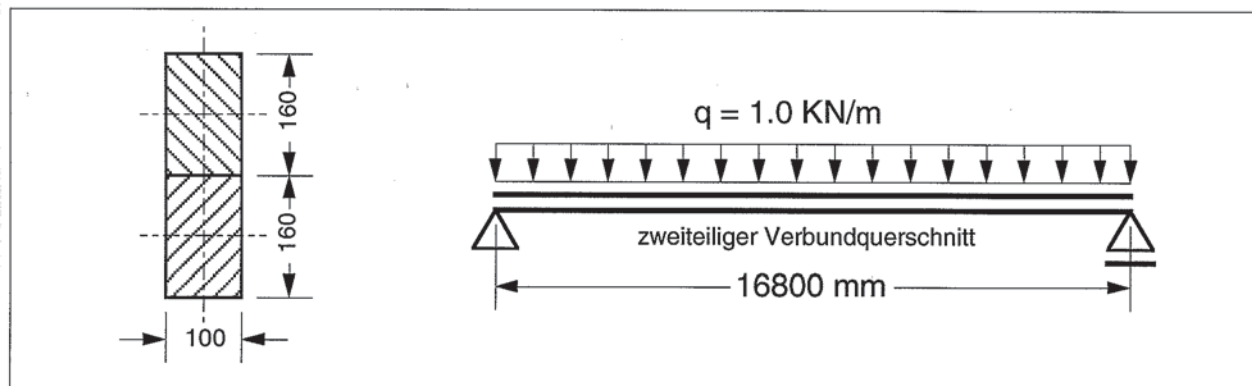


Bild 7.2

Zweiteiliger Verbundbalken - Beispiel aus der Arbeit von R. Kneidl (1991) [19]

Bild 7.3

Durchbiegungen  $w$  der beiden Lamellen 1 und 2

Weitere Kennwerte sind der Elastizitätsmodul  $E_L = 10.000 \text{ N/mm}^2$  und die beiden Fugenwiderstände  $c_x = 40.9 \text{ N/mm}^2$  und  $c_z = 188.0 \text{ N/mm}^2$ . Bei den Fugenwiderständen handelt es sich um konstant wirkende Flächenwiderstände. Die Schubverformungen bleiben unberücksichtigt. Im Bild 7.3 sind die Lamellenverformungen aus der Arbeit von R. Kneidl dargestellt.

Für analytische Lösung der Durchbiegung  $w$  eines einfeldrig gelagerten, zweiteiligen Schichtholzbalkens werden die folgenden G 7.19 bis G 7.23 aus dem Forschungsbericht von J. Natterer und M. Hoefl herangezogen.

$$w(\zeta) = \frac{q \cdot l^4}{B} \cdot \left\{ \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \cdot \left[ \frac{1}{2 \cdot \lambda^2} \cdot (\zeta - \zeta^2) + \frac{1}{\lambda^4} \cdot \left( \frac{\cosh[\lambda \cdot (\zeta - 0.5)]}{\cosh\left[\frac{\lambda}{2}\right]} \right) \right] + \right\} \quad (\text{G 7.19})$$

$$\left\{ + \frac{1}{24} \cdot (\zeta - 2 \cdot \zeta^3 + \zeta^4) \right\}$$

Es gelten für die obige G 7.19 die folgenden Beziehungen.

$$B = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + \frac{E_1 \cdot I_1 \cdot E_2 \cdot I_2 \cdot e^2}{(E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2)} \quad (\text{G 7.20})$$

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{E_1 \cdot I_1 \cdot E_2 \cdot I_2 \cdot e^2}{(E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2) \cdot (E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2)} \quad (\text{G 7.21})$$

$$\lambda^2 = b^2 \cdot l^2 \quad (\text{G 7.22})$$

$$b^2 = \frac{(E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2) \cdot k}{E_1 \cdot A_1 \cdot E_2 \cdot A_2} + \frac{k \cdot e^2}{(E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2)} \quad (\text{G 7.23})$$

In Tabelle 7.1 sind die Durchbiegungen  $w$  für den im Bild 7.2 dargestellten Balken im Vergleich ersichtlich.

**Tabelle 7.1**

Durchbiegungen  $w$  in Balkenmitte für den zweiteiligen Verbundbalken nach R. Kneidl (1991) [19], Gleichungen aus Forschungsbericht J. Natterer und M. Hoefl (1987) [30] und eigenen Berechnungen mit dem Programm VERBUND1D

	Dissertation R. Kneidl	Gleichungen J. Natterer	Programm VERBUND1D
Durchbiegungen $w$ mittig	398.64 mm	398.54 mm	398.60 mm

**Beispiel 2: Zweiteiliger Verbundquerschnitt 2 \* 100/160 mm**  
**Variation des Fugenwiderstandes  $c_x$**

Für das nachfolgende Beispiel gelten die Systemangaben des Beispiels 1. Die Materialkennwerte entsprechen den charakteristischen Werten der prEN 338 für C24.



Der mittlere E-Modul beträgt  $E_L = 11.000 \text{ N/mm}^2$  und für den mittleren G-Modul steht  $G = 690 \text{ N/mm}^2$ . Die Fugenwiderstände werden als konstant wirkende Flächenwiderstände angenommen. Die Parametervariation reicht von  $c_x = 0.01 \text{ N/mm}^2$  (kein Verbund) bis  $c_x = 10E6 \text{ N/mm}^2$  (starrer Verbund). Nachfolgend wird im Bild 7.4 die Querkraftbeanspruchung der Berechnungsteilquerschnitte 100/16 mm - Annahme einer Zehntelteilung des Querschnittes 100/160 mm - dargestellt.

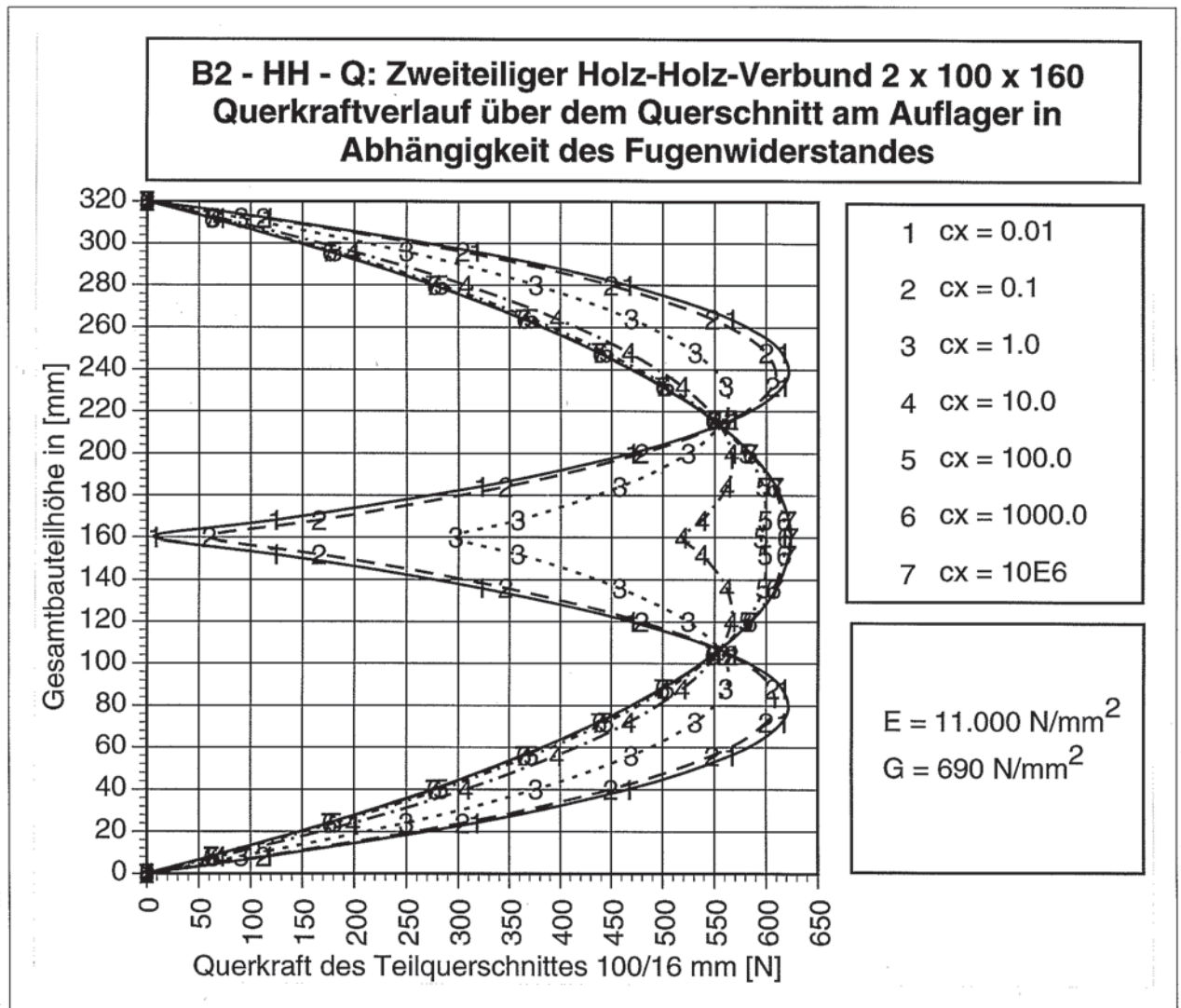


Bild 7.4

Querkraftbeanspruchung der Berechnungsteilquerschnitte

**Beispiel 3: Vierteiliger Verbundquerschnitt 4 \* 100/80 mm  
Variation des Fugenwiderstandes  $c_x$**

Die Systemabmessungen und die Verbundquerschnittsmaße entsprechen denen des Beispiels 1. Allerdings baut sich der Verbundquerschnitt aus vier Einzelquerschnitten 100/80 mm auf. Die Materialkennwerte entsprechen denen des Beispiels

2. Zwischen den Einzelquerschnitten erfolgt eine Variation der Fugensteifigkeitskomponente  $c_x = 0.01 \text{ N/mm}^2$  (kein Verbund) bis  $c_x = 10\text{E}6 \text{ N/mm}^2$  (starrer Verbund). Die Komponente in z-Richtung wird mit  $c_z = 10\text{E}6 \text{ N/mm}^2$  (starr) angenommen. Im Bild 7.5 sind das System und der Querschnitt dargestellt.

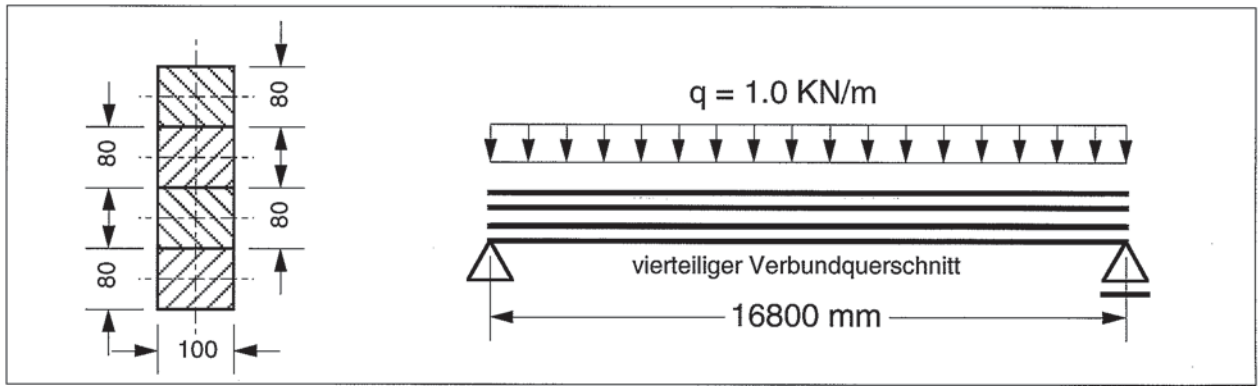


Bild 7.5

Vierteiliger Verbundbalken - System und Querschnitt

In den nachfolgenden Bildern 7.6 bis 7.9 sind Ergebnisse dieser Berechnung dargestellt.

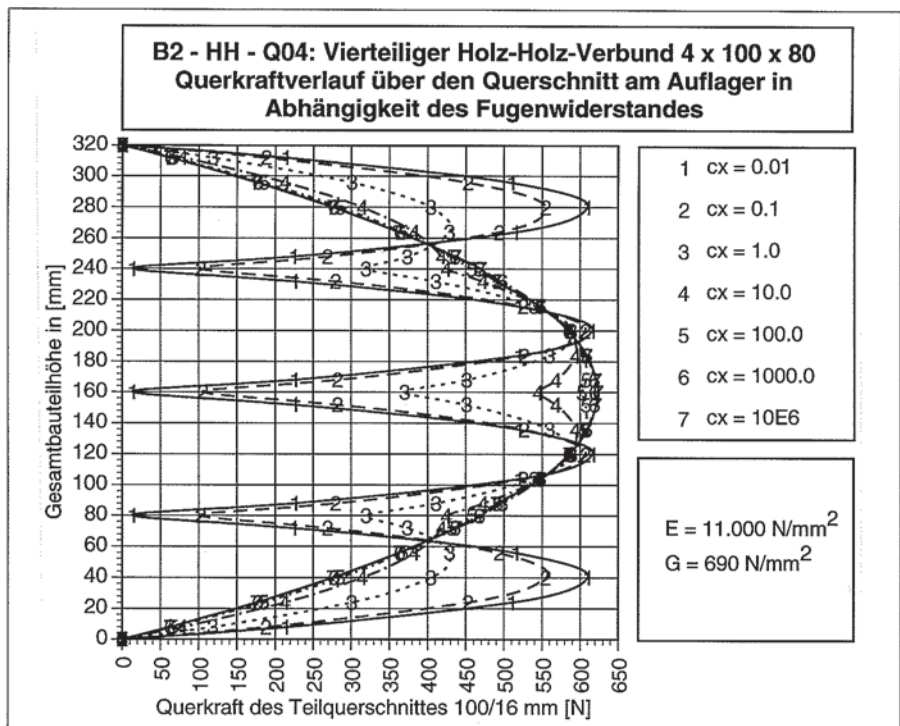


Bild 7.6

Vierteiliger Verbundbalken - Querkraftbeanspruchung

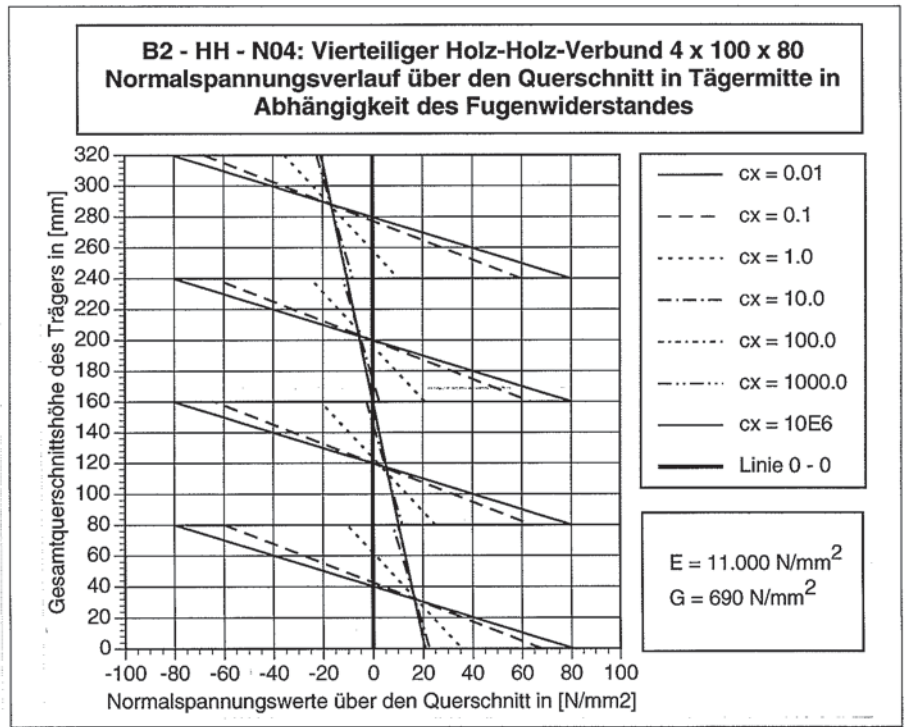


Bild 7.7

Vierteiliger Verbundbalken - Normalspannungsverlauf

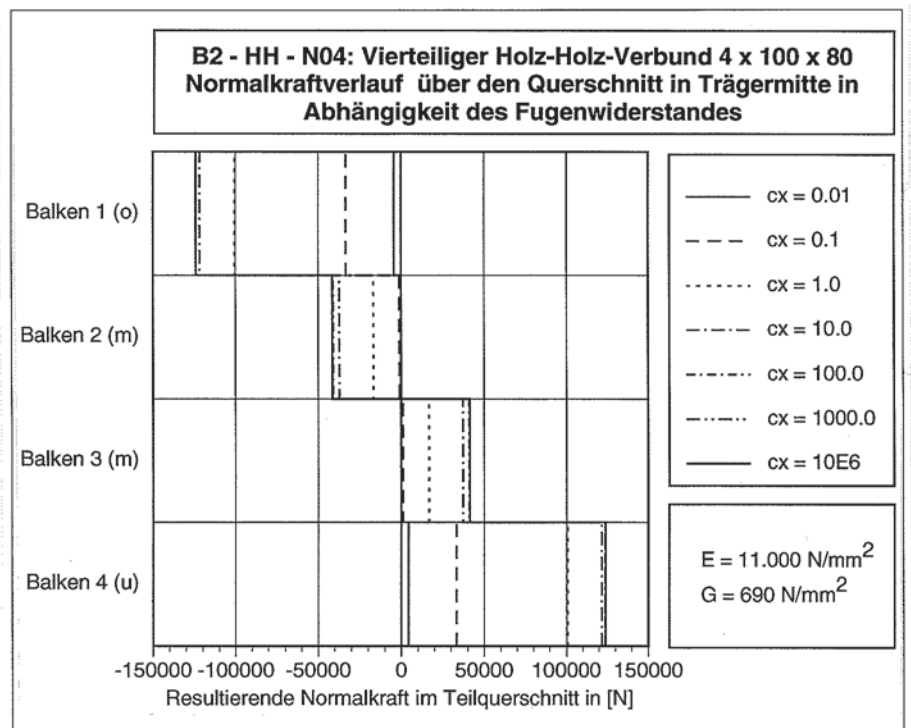


Bild 7.8

Vierteiliger Verbundbalken - Resultierende Normalkraft

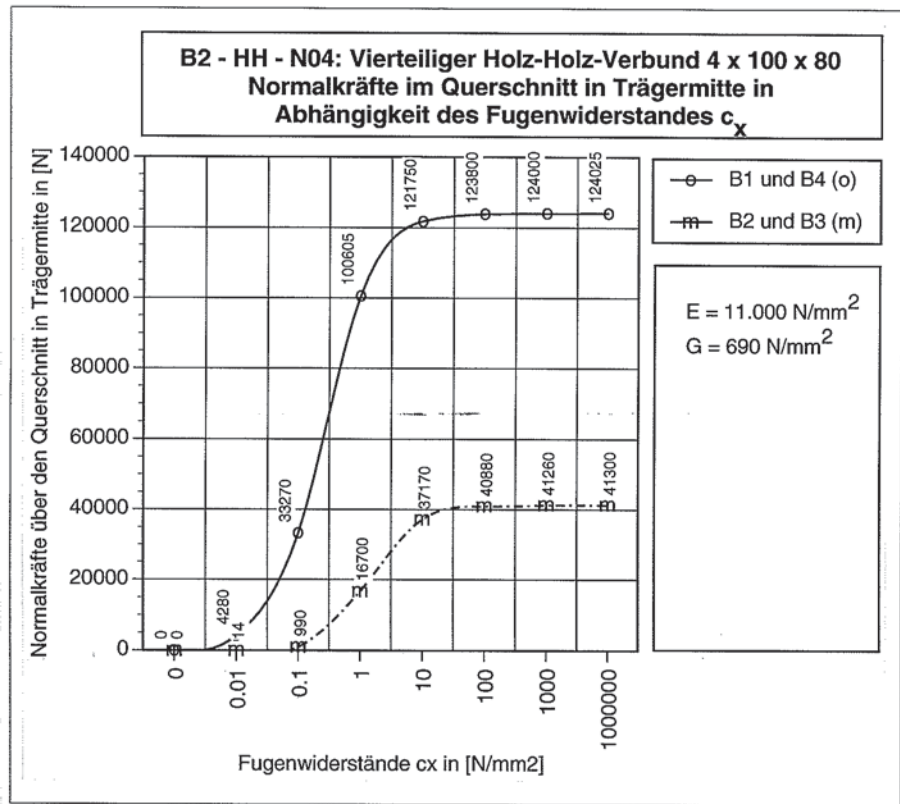


Bild 7.9

Vierteiliger Verbundbalken - Normalkraft als Funktion des Fugenwiderstandes  $c_x$



## 2D - Beispiele

Für die geschichtete, flächige Holzstruktur sind eine Vielzahl von Einflußparametern bestimmend und daher zu berücksichtigen. Nachfolgend sind die wichtigsten davon angeführt.

### Belastungssituation

- Gleichlasten  $p$   
Für die nachfolgenden Beispiele wird eine konstant wirkende Gleichlast von  $p = 1.0 \text{ KN/m}^2$  angenommen.
- Einzellasten  $P$
- Beliebige Belastungssituation  $q$

### Einzelsschichte ES

Für die Einzelsschichte ES sind die folgenden Parametervariationen von Bedeutung. Es sind dies Einflußfaktoren, die letztlich das Gesamtverhalten des Schichtverbundes maßgebend beeinflussen.

- Einzelsschichtorientierung  $\varphi$   
Die Schichtorientierung bezieht sich auf die Lage der Materialhauptachsen der Einzelsschichte ES - lokales Koordinatensystem - hinsichtlich des gewählten globalen Bezugskoordinatensystems. Es ist eine Schichtorientierung von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  möglich.
- Einzelsschichtanzahl  $N$   
Der Einzelsschichtanzahl und der -orientierung entsprechend unterscheidet man zwischen einem symmetrischen und einem unsymmetrischen Schichtaufbau. Die Anzahl der Einzelsschichten ES reicht von  $N = 2$  bis  $N = n$ . Im Programm VERBUND2D ist eine diesbezügliche Begrenzung nicht vorgesehen.
- Einzelsschichtstärke  $t$   
Je nach Einzelsschichtstärke  $t$  wird man in den Grenzbereichen zwischen Furnieren -  $t = 3 \text{ mm}$  - und Brettlamellen - z.B.  $t = 22 \text{ mm}$  bis  $33 \text{ mm}$  - unterscheiden. Abstufungen dazwischen sind möglich.
- Einzelsschichtkenngrößen - Werkstoffkenngrößen  
Werkstoffkenngrößen der Einzelsschichte sind die E-Moduli  $E_{xx} = E_L$ ,  $E_{yy} = E_T$  und  $E_{zz} = E_R$  und die Schubmoduli  $G_{xz} = G_{LR}$ ,  $G_{xy} = G_{LT}$  und  $G_{yz} = G_{TR}$ . Weiters sind dies die Poisson-Ziffern  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{LR}$  und  $\nu_{TR}$  sowie  $\nu_{TL}$ ,  $\nu_{RL}$  und  $\nu_{RT}$ . Die genannten Werte sind auf versuchstechnischem Wege zu ermitteln. Im Kapitel 4 wird auf die Anisotropie des Werkstoffes Holz und die Ermittlung dieser Kenngrößen eingegangen. Für die nachfolgenden Berechnungen werden die Kenngrößen den nationalen Normen bzw. den prENen - z.B. prEN 338 - entnommen. Eine genaue Differenzierung ist mangels vorhandener Kenngrößen nicht möglich. Es muß auch erwähnt werden, daß vor allem bei Verwendung von Brettlamellen eine vertikale Stoßfuge vorhanden ist, welche entweder in Form einer Nut-Feder-Verbindung oder eines Stumpfstoßes - eventuell verleimt - auftritt. Eine exakte Berücksichtigung dieser Stoßstelle in den Werkstoffkenngrößen kann nur durch Versuche quantifiziert werden.

### Schichtverbund SV - Geometrie

- Quadratische und rechteckige Platte  
Für die Berechnungsbeispiele wird eine quadratische oder rechteckige Plattenform vorausgesetzt. Vor allem sind dies Platten, die in den Bildern 7.10 und 7.11 dargestellt sind.
- Beliebige ebene Geometrie

### Schichtverbund SV - Lagerung

- Umfangsgelenkige Lagerung  
Für die nachfolgenden Berechnungsbeispiele wird eine umfangsgelenkige Lagerung der geschichteten, flächigen Holzstruktur angenommen.
- Beliebige Lagerung

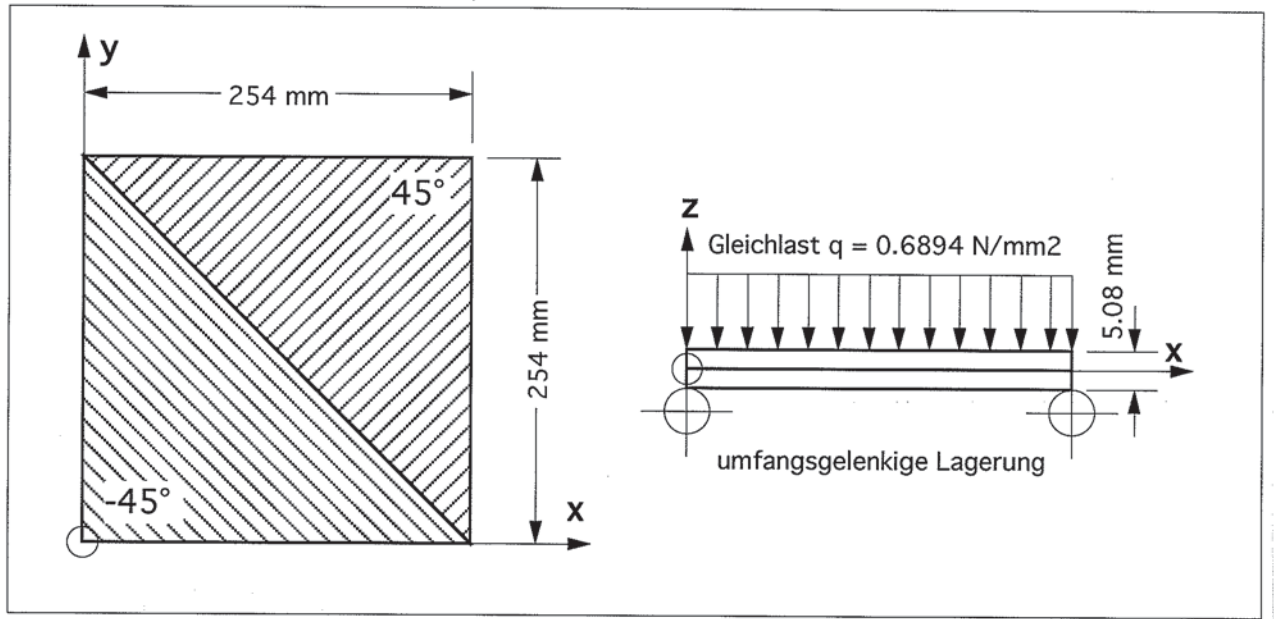
### Verbundfuge

- Vernagelungsrichtung  
Es wird davon ausgegangen, daß grundsätzlich jedes stiftförmige Verbindungsmittel geeignet ist. Das Verhalten der stiftförmigen Verbindungsmitteln wird im Kapitel 5 durchleuchtet. Hier spielt es vor allem eine Rolle, ob die resultierende Verschiebungsrichtung in der Fuge mit der Beanspruchungsrichtung ident ist. Einschränkend kann festgehalten werden, daß man es bei stiftförmigen Verbindungsmitteln in diesem Anwendungsgebiet bei nachgiebigem Verbund hauptsächlich mit Rillennägeln oder Holzschrauben zu tun hat.
- Vernagelungsdichte - Fugensteifigkeit  
Die Vernagelungsdichte findet ihren Niederschlag in den Fugenwiderstandskomponenten c.

### Beispiel 1: Umfangsgelenkig gelagerte, zweischichtige Platte mit starrer Verbundfuge - Vergleichsberechnung ABAQUS Vers. 5.2 mit VERBUND2D

Mit dem FE-Programm ABAQUS Vers. 4.9.1 und Vers. 5.2 ist es möglich, Vergleichsberechnungen für eine geschichtete, flächige Holzstruktur mit starren Verbundfugen durchzuführen. Man geht bei der Modellierung davon aus, daß die im Kapitel 4 gefundene Analogie mit den Faser-Kunststoff-Verbunden zutrifft. Das Programm ABAQUS beinhaltet standardmäßig die Möglichkeit der Definition eines geschichteten Schalenelementes mit starrer Verbundfuge. Die Verwendung dieses Elementtypes liegt vor allem im Bereich der Faser-Kunststoff-Verbunde. Nachfolgende Berechnungen werden zeigen, daß für geschichtete, flächige Holzstrukturen mit starrer Verbundfuge dieselben Eingabebefehle wie für flächige Faser-Kunststoff-Verbund-Bauteile maßgebend sind. Im Anhang B sind die dafür benötigten Input-Files enthalten.

Beim ersten Beispiel handelt es sich um ein linear-elastisches Problem einer ebenen, geschichteten Struktur. Die Platte ist aus zwei Schichten aufgebaut. Die Faserorientierungen der beiden Schichten betragen  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$ . Der Querschnittsaufbau ist somit unsymmetrisch, d.h. man hat es mit einer Normalkraft-Biegemomenten-Koppelung zu tun. Im Bild 7.10 sind die System- und Querschnittsabmessungen sowie die Belastungs- und Lagerungssituation dargestellt.



**Bild 7.10** Zweischichtige Platte 10\*10 inch<sup>2</sup>

Im Anhang B ist der ABAQUS-Input-File für diese Berechnung enthalten. In der folgenden Tabelle 7.2 sind die der Berechnung zugrundegelegten Materialkennwerte ersichtlich.

**Tabelle 7.2** Werkstoffkennwerte E-Moduli und Schubmoduli für den ABAQUS-Input-File in [lb/in<sup>2</sup>]

Material	$E_L = E_{xx}$	$E_R = E_{zz}$	$E_T = E_{yy}$	$G_{TR} = G_{yz}$	$G_{TL} = G_{yx}$	$G_{LR} = G_{xz}$
FKV	40000000	-----	1000000	500000	500000	500000

Die Poisson-Ziffer beträgt  $\nu_{xy} = 0.25$ . Die erforderlichen Eingabedaten für die Beschreibung der Werkstoffeigenschaften für das Programm VERBUND2D sehen wie folgt aus.

**Tabelle 7.3** Werkstoffkennwerte E-Moduli, Schubmoduli, Poisson-Ziffern, sowie Faserorientierung und Einzelschichtdicke t für das Programm VERBUND2D in [N/mm<sup>2</sup>], [mm], [°] - Input-Zeile

Material	Winkel	t [mm]	$E_L = E_{xx}$	$E_T = E_{yy}$	$\nu_{yx}$	$\nu_{xy}$	$G_{TR}$	$G_{TL}$	$G_{LR}$
FKV	-45/+45	2.54	276000	6900	0.00625	0.25	3400	3400	3400

In der Tabelle 7.4 werden die Durchbiegungswerte in Plattenmitte aus drei verschiedenen Berechnungen miteinander verglichen.



Tabelle 7.4

Vergleich der Durchbiegung in Plattenmitte zwischen der analytischen Lösung, Berechnung mit dem Programm ABAQUS Vers. 5.2 und dem Programm VERBUND2D

	Analytische Lösung	ABAQUS Vers. 5.2	VERBUND2D
Durchbiegung w mittig	23.25 mm	23.25 mm	23.23 mm

**Beispiel 2: Umfangsgelenkig gelagerte, zweischichtige Platte 4000\*4000 mm  
Berechnung mit dem Programm ABAQUS Vers. 5.2 und dem Programm VERBUND2D**

Für das im Bild 7.11 dargestellte System werden im nachfolgenden Berechnungen mit dem Programm ABAQUS Vers. 5.2 und dem Programm VERBUND2D durchgeführt. Zuerst werden mit dem Programm ABAQUS für eine zweischichtige, flächige Holzkonstruktion mit starrer Verbundfuge Spannungs- und Verformungsberechnungen durchgeführt, wobei die Schichtorientierung variiert wird. Im weiteren wird dann mit dem Programm VERBUND2D für diese zweischichtige, flächige Holzstruktur eine nachgiebige Verbundfuge angenommen. Für diese Verbundfuge werden die Fugenwiderstandskomponenten variiert.

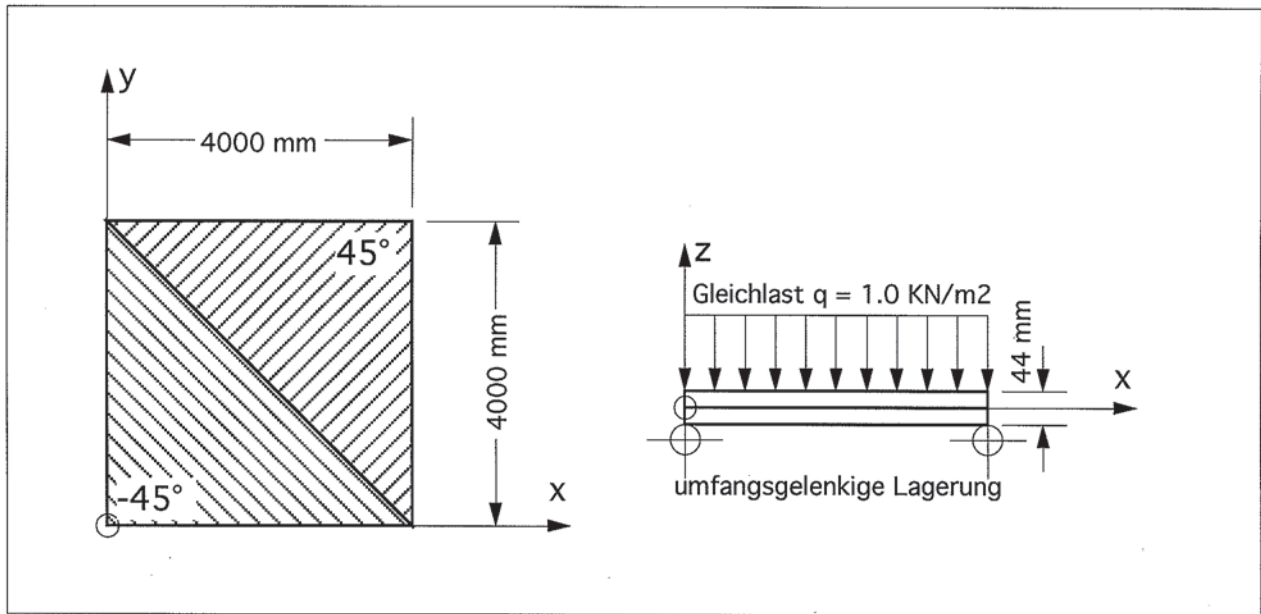


Bild 7.11

Zweischichtige Platte 4000\*4000 mm<sup>2</sup>

Im Anhang B ist der ABAQUS-Input-File für diese Berechnung enthalten. In der folgenden Tabelle 7.5 sind die der Berechnung zugrundegelegten Materialkennwerte ersichtlich.



**Tabelle 7.5**

Werkstoffkennwerte E-Moduli und Schubmoduli für den ABAQUS-Input-File in [N/mm<sup>2</sup>]

Material	$E_L = E_{xx}$	$E_R = E_{zz}$	$E_T = E_{yy}$	$G_{TR}$	$G_{TL}$	$G_{LR}$
Holzlamellen	11000	-----	370	70	690	690

Die Poisson-Ziffer beträgt  $\nu_{xy} = 0.45$ . Die erforderlichen Eingabedaten für die Beschreibung der Werkstoffeigenschaften für das Programm VERBUND2D sehen wie folgt aus.

**Tabelle 7.6**

Werkstoffkennwerte E-Moduli, Schubmoduli, Poisson-Ziffern, sowie Faserorientierung und Einzelschichtdicke  $t$  für das Programm VERBUND2D in [N/mm<sup>2</sup>], [mm], [°] - Input-Zeile

Material	Winkel	$t$ [mm]	$E_L = E_{xx}$	$E_T = E_{yy}$	$\nu_{yx}$	$\nu_{xy}$	$G_{TL}$	$G_{LR}$	$G_{TR}$
Holzlam.	-45/+45	22.0	11000	370	0.01514	0.45	690	690	70

In der Tabelle 7.7 sind die Verformungen in Plattenmitte in Abhängigkeit der Schichtorientierung ersichtlich.

**Tabelle 7.7**

Verformungen in Plattenmitte für eine zweischichtige Holzstruktur mit starrer Verbundfuge in Abhängigkeit der Faserorientierung

Programm	0°/0° 90°/90°	45°/45° -45°/-45°	0°/90° 0°/-90°	90°/45° 0°/45°	-45°/45° 45°/-45°
ABAQUS 5.2	38.52 mm	49.38 mm	51.67 mm	55.62 mm	74.13 mm
VERBUND2D	38.65 mm	-----	-----	-----	74.21 mm

Nachfolgend sind die Ergebnisse der Berechnungen für zwei verschiedene Faserorientierungen - 0°/0° und 45°/-45° - dargestellt. Es ist zu beachten, daß für jede Schichte über die Höhe  $h$  drei Integrationspunkte vorhanden sind. Dies bedeutet, daß für eine zweischichtige Holzstruktur sechs horizontale Schnittebenen zur Verfügung stehen, in denen Ergebnisse darstellbar sind. In den Bildern 7.12 bis 7.17 sind die Spannungen in diesen Ebenen in Form von Schichtenplots dargestellt. Dabei bedeuten:

- S11  
Normalspannungen in x-Richtung
- S22  
Normalspannungen in y-Richtung
- S12  
Schubspannungen in der xy-Ebene

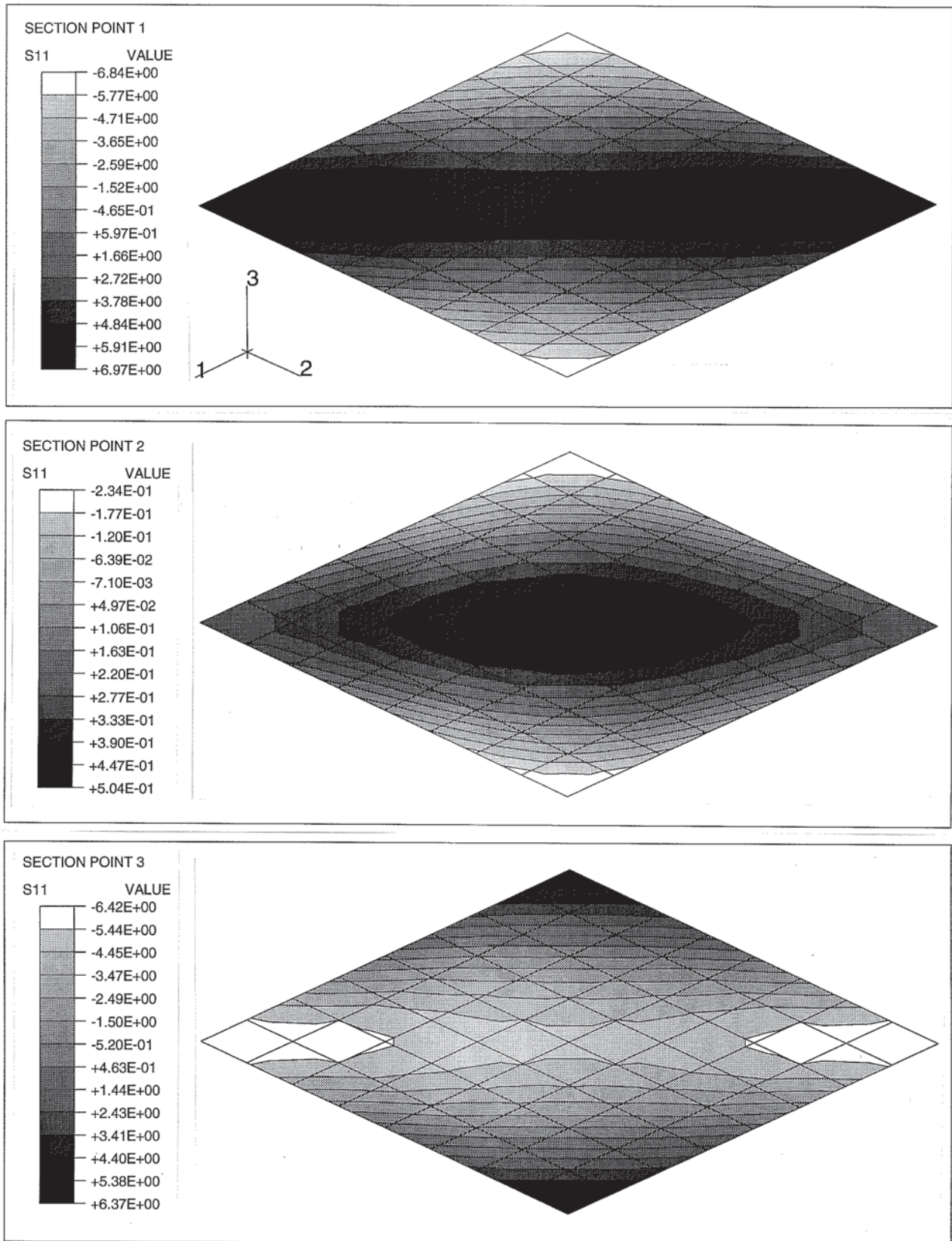


Bild 7.12

Plate 4000\*4000 - Layer 1 / 45° and Layer 2 / -45°  
 S11 - Normalspannungen in x-Richtung - Layer 1 / 45°



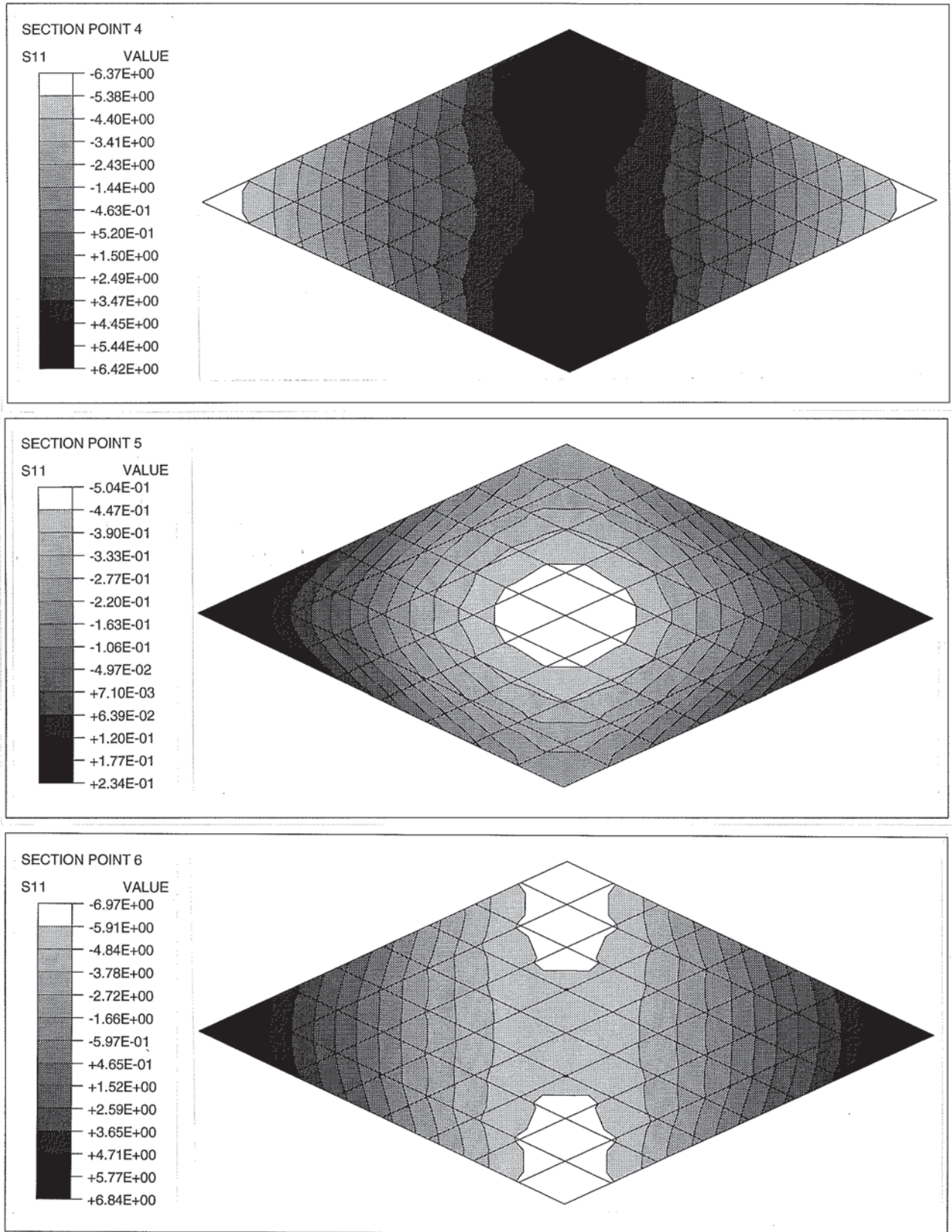


Bild 7.13

Plate 4000\*4000 - Layer 1 / 45° and Layer 2 / -45°  
 S11 - Normalspannungen in x-Richtung - Layer 2 / -45°

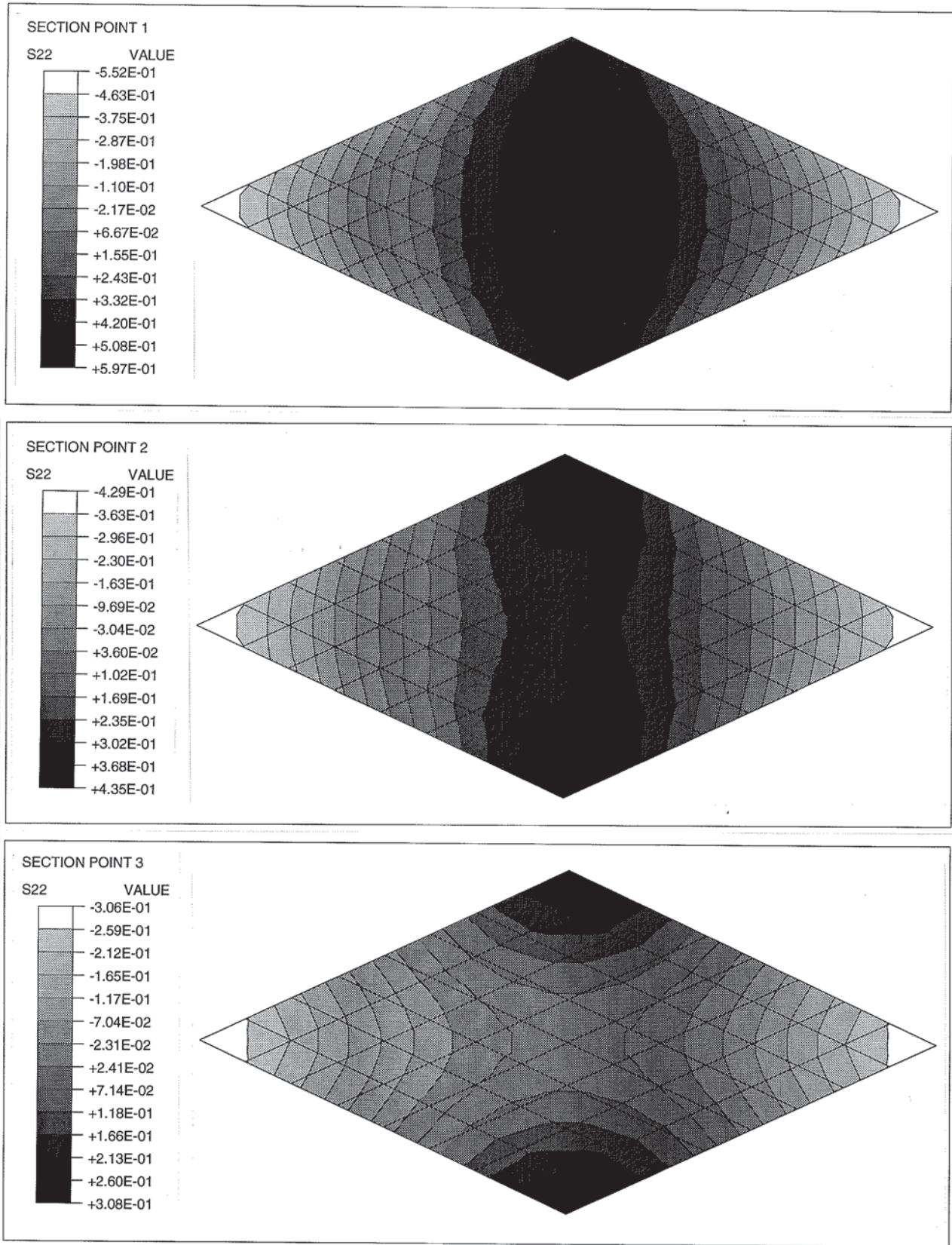


Bild 7.14

Plate 4000\*4000 - Layer 1 / 45° and Layer 2 / -45°  
 S22 - Normalspannungen in y-Richtung - Layer 1 / 45°



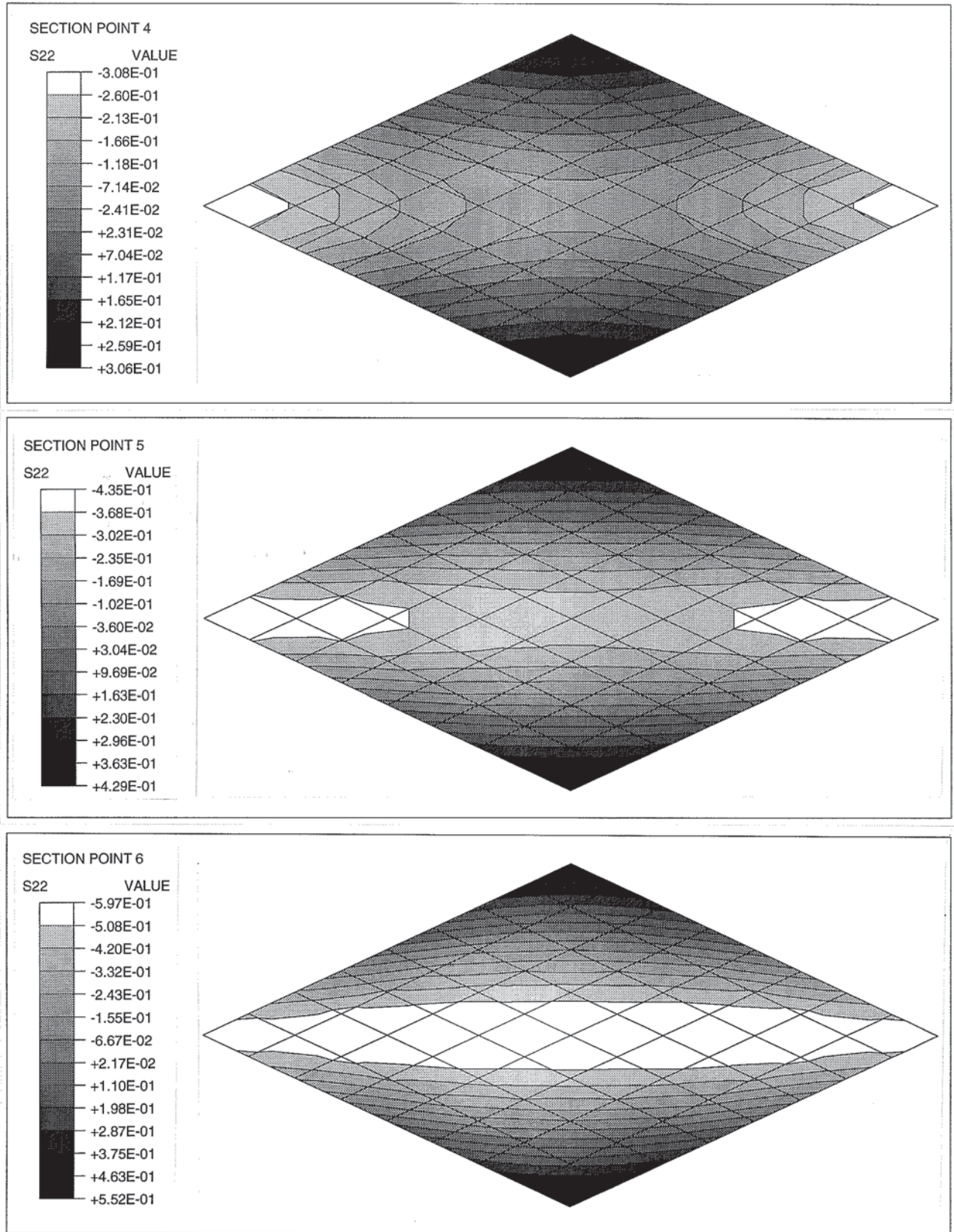


Bild 7.15

Plate 4000\*4000 - Layer 1 / 45° and Layer 2 / -45°  
 S22 - Normalspannungen in y-Richtung - Layer 2 / -45°



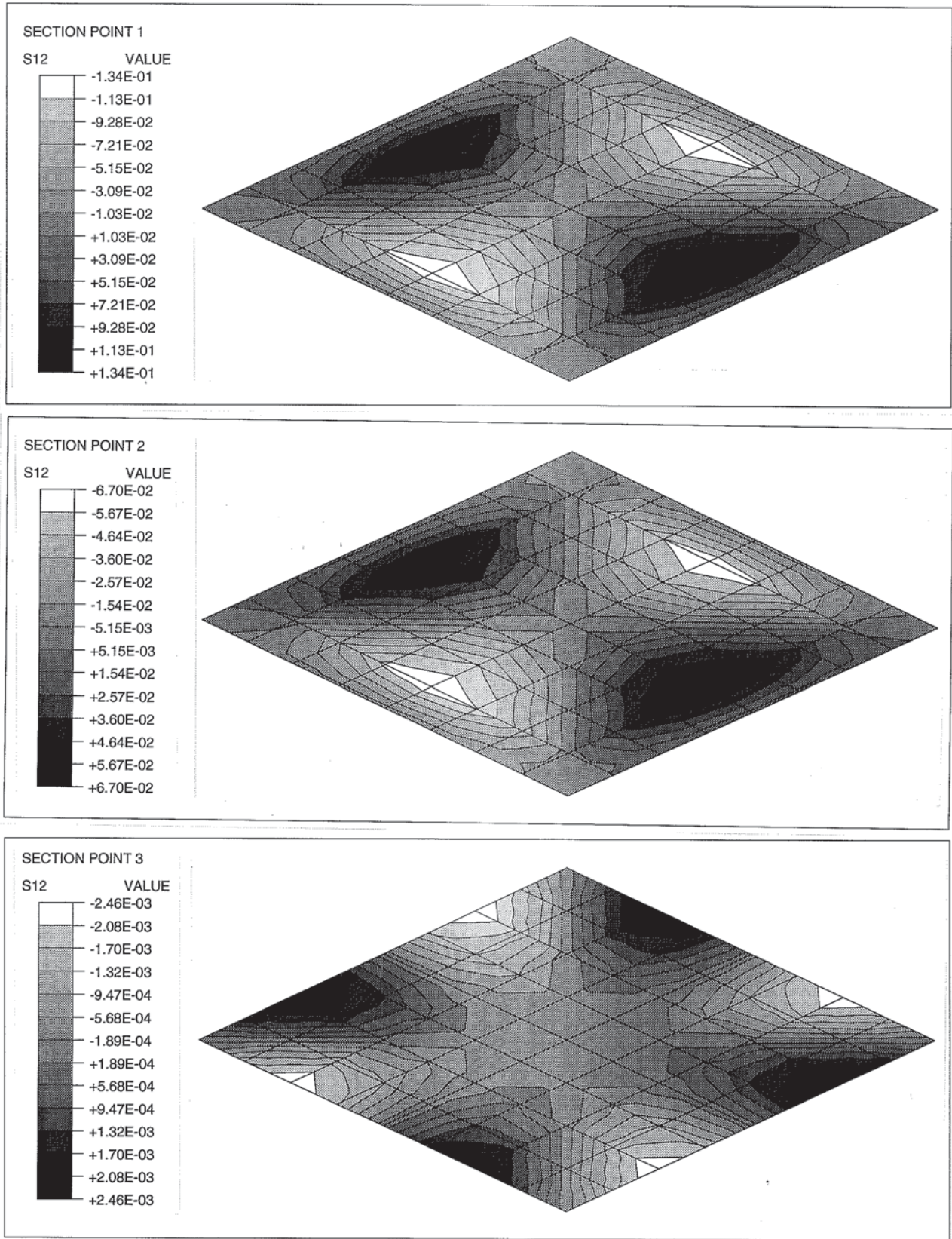


Bild 7.16

Plate 4000\*4000 - Layer 1 / 45° and Layer 2 / -45°  
 S12 - Schubspannungen in der xy-Ebene - Layer 1 / 45°



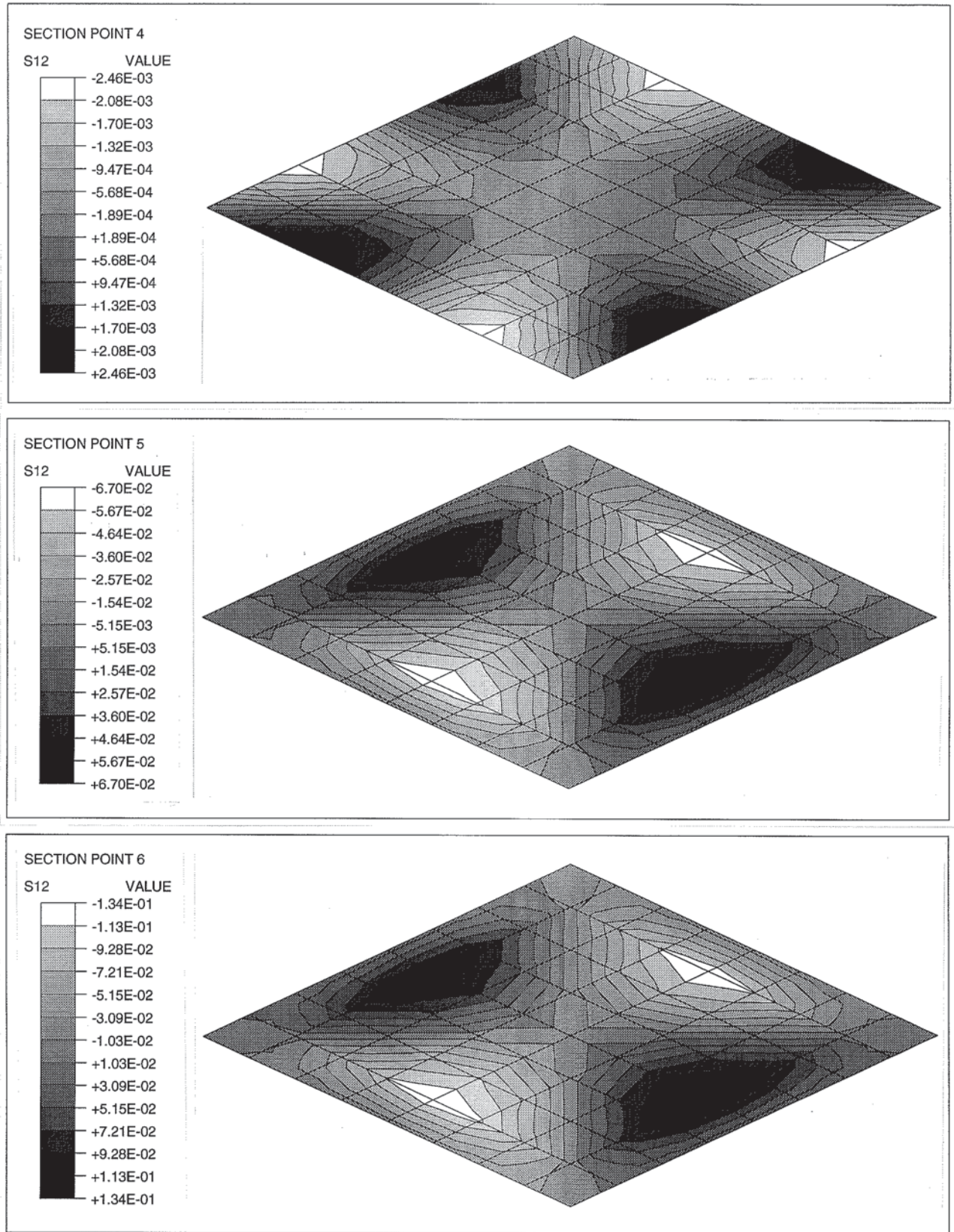


Bild 7.17

Plate 4000\*4000 - Layer 1 / 45° and Layer 2 / -45°  
 S12 - Schubspannungen in der xy-Ebene - Layer 2 / -45°

## 7. Geschichtete Holzstrukturen Beispiele: Balken - Platte - Schale

Mit dem Programm VERBUND2D wird nun der Fugenwiderstand in der Verbundfuge variiert. Man hat es somit mit einer nachgiebigen Verbundfuge zu tun. Die Geometrie- und Belastungssituation entspricht der des obigen Beispiels 2. In der Tabelle 7.8 und 7.9 sind die Verformungen in der Plattenmittellachse ersichtlich.

**Tabelle 7.8**

Platte 4000\*4000 - Schichte 1 / 0° und Schichte 2 / 0°  
Verformungen w in Plattenmittellachse - Variation des Fugenwiderstandes c

$c_x$ in [N/mm <sup>2</sup> ]	$c_y$ in [N/mm <sup>2</sup> ]	$c_z$ in [N/mm <sup>2</sup> ]	w in [mm] 0.0 * L	w in [mm] 0.1 * L	w in [mm] 0.2 * L	w in [mm] 0.3 * L	w in [mm] 0.4 * L	w in [mm] 0.5 * L
10E 6	10E 6	10E6	0.0	12.16	22.99	31.44	36.81	38.64
10E 3	10E 3	10E6	0.0	12.16	22.99	31.45	36.81	38.65
10E 2	10E 2	10E6	0.0	12.17	23.00	31.46	36.83	38.67
10E 1	10E 1	10E6	0.0	12.24	23.12	31.62	37.01	38.86
10E 0	10E 0	10E6	0.0	12.91	24.33	33.20	38.82	40.74
10E-1	10E-1	10E6	0.0	18.08	33.96	46.19	53.87	56.48
10E-2	10E-2	10E6	0.0	34.61	65.29	89.13	104.19	109.33
10E-3	10E-3	10E6	0.0	46.00	86.94	118.90	139.10	146.09
10E-4	10E-4	10E6	0.0	48.28	91.27	124.86	146.16	153.45
10E-6	10E-6	10E6	0.0	48.56	91.81	125.60	147.03	154.37

**Tabelle 7.9**

Platte 4000\*4000 - Schichte 1 / 45° und Schichte 2 / -45°  
Verformungen w in Plattenmittellachse - Variation des Fugenwiderstandes c

$c_x$ in [N/mm <sup>2</sup> ]	$c_y$ in [N/mm <sup>2</sup> ]	$c_z$ in [N/mm <sup>2</sup> ]	w in [mm] 0.0 * L	w in [mm] 0.1 * L	w in [mm] 0.2 * L	w in [mm] 0.3 * L	w in [mm] 0.4 * L	w in [mm] 0.5 * L
10E 6	10E 6	10E 6	0.0	24.17	45.14	61.05	70.89	74.21
10E 1	10E 1	10E 6	0.0	24.17	45.16	61.06	70.90	74.23
10E 0	10 E 0	10E 6	0.0	24.25	45.27	61.20	71.05	74.37
10E-1	10E-1	10E 6	0.0	24.87	46.34	62.48	72.44	75.79
10E-2	10E-2	10E 6	0.0	28.21	52.36	70.41	81.45	85.17
10E-3	10E-3	10E 6	0.0	32.38	60.21	81.07	93.88	98.19
10E-4	10E-4	10E 6	0.0	33.36	62.06	83.61	96.86	101.31
10E-5	10E-5	10E 6	0.0	33.47	62.28	83.90	97.19	101.67
10E-6	10E-6	10E 6	0.0	33.48	62.30	83.93	97.23	101.70



## Darstellung der Problematik durch weitere Beispiele

---

### Beispiel 1: Geschichtete zylinderförmige Holzschale

#### Allgemeines

Basierend auf Veröffentlichungen von G. B. Walford, P. J. Moss (1980) [115] und P. J. Moss, A. J. Carr und N. C. Cree-Brown (1979) [110] wird nachfolgend das Spannungs- und Verformungsverhalten einer dreischichtigen zylinderförmigen Holzschale untersucht und mit den Versuchsergebnissen sowie den Berechnungsergebnissen der nachfolgend genannten Veröffentlichungen verglichen.

- TESTS ON NAILED AND GLUED LAYERED TIMBER CYLINDRICAL SHELLS  
by G. B. Walford and P. J. Moss, Jänner 1980
- NONLINEAR LAYERED TIMBER CYLINDRICAL SHELLS  
by P. J. Moss, A. J. Carr and N. C. Cree-Brown, Oktober 1979

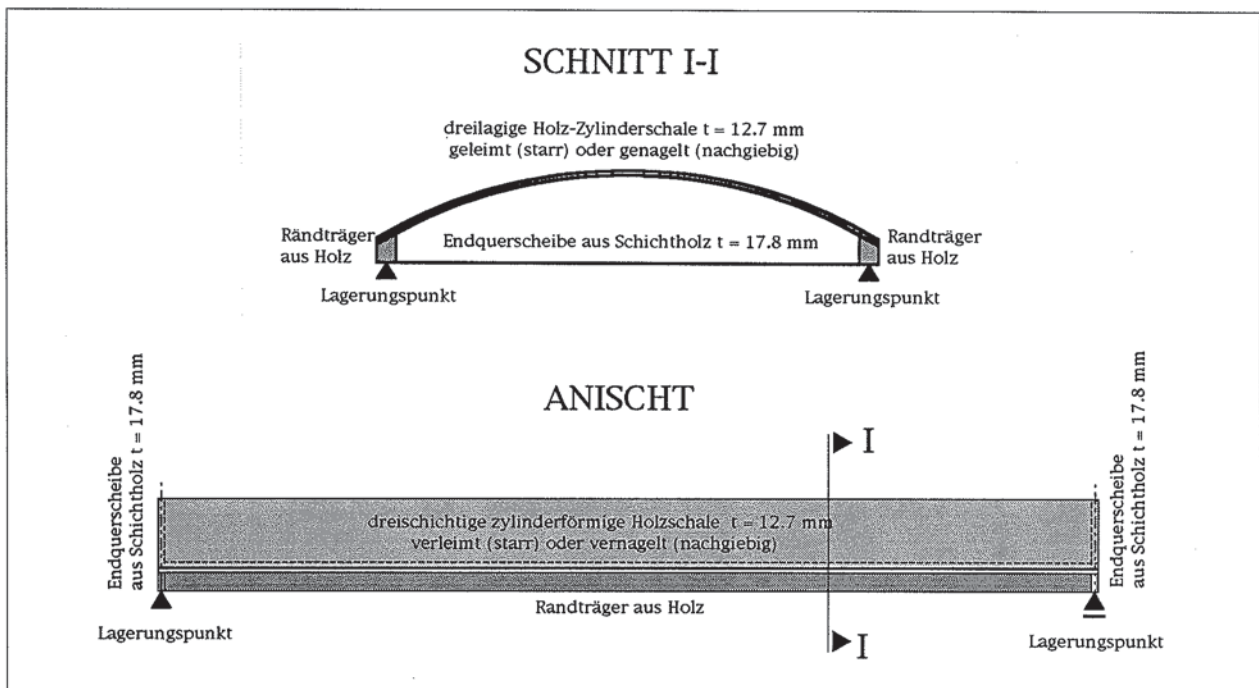
Der Inhalt dieser Veröffentlichungen behandelt das Verhalten einer zylinderförmigen Holzschale, wobei der Aufbau der Schale schichtenweise mittels Brettlamellen erfolgte. Die Verbindung der einzelnen Schichten untereinander wurde einerseits durch eine Vernagelung erreicht - nachgiebige Verbundfuge - und andererseits durch eine vollflächige Verleimung - starre Verbundfuge. Ein wesentliches Bemessungskriterium bei Holzkonstruktionen und hier vor allem bei Holzschalen liegt im Verformungsverhalten dieser Konstruktionen und ist weniger ein Festigkeitsproblem. Grund dieses Verhaltens sind einerseits die Elastizitätskonstanten des Baustoffes Holz und andererseits der Einfluß des Kriechens auf die Konstruktion. Diese Faktoren wiederum sind ihrerseits vom umgebenden Raumklima und somit von der eventuell fluktuierenden Holzfeuchtigkeit abhängig. Die genannten Einflußfaktoren wirken im besonderen verstärkend bei nachgiebig verbundenen Schichtholzsystemen. Eine Beurteilung bzw. Abschätzung des Verformungsverhaltens von Holzschalen ist deshalb sehr schwierig und oftmals unzureichend, da es sich um äußerst komplexe Materialkennwerte für die aus Brettlamellen gebildete Schalen handelt. Zudem kommt noch das hoch nichtlineare Verhalten der durch mechanische Verbindungsmittel - Nagelung - verbundenen Schaleneinzelschichten hinzu. Dieses nichtlineare Verhalten wird vor allem durch den Schubspannungs-Verzerrungs-Zusammenhang in der Ebene verdeutlicht. Tottenham weist in einer seiner Veröffentlichungen darauf hin, daß das Hauptproblem für einen befriedigenden Bemessungsvorgang für Holzschalen im Fehlen ausreichender und abgesicherter Daten liegt. Es fehlen vor allem abgesicherte Elastizitätskennwerte für Platten und Schalen, die durch eine beliebige Anzahl geschichteter und gerichteter Brettlamellen aufgebaut sein können, um diese in Bemessungsmethoden und Formeln einfließen zu lassen.

Im Hinblick auf diesen Mißstand, wurde an der Universität von Canterbury in Neuseeland ein Versuchsprogramm durchgeführt. Ziel dieser Untersuchung war es, Materialkennwerte für mehrlagig geschichtete Holzkonstruktionen zu ermitteln. Für diesen Zweck wurden zwei Modellschalen angefertigt, bestehend aus jeweils drei

Schichten, wobei die beiden äußeren Schichten im rechten Winkel zur längsorientierten Mittelschicht verliefen. Als Verbindungstechnik zwischen den Schichten wurde für die eine Schale Leim und für die andere Schale eine Vernagelung gewählt.

**Versuchsaufbau und Versuchsablauf**

Nachfolgend wird an zwei dreischichtigen, zylinderförmigen Holzschalen das Verhalten unter einer zur Schalenoberfläche rechtwinklig angreifenden Belastung bis zum Bruchversagen untersucht. Die Form der Schalenbelastung ist dem Bild 7.23 zu entnehmen. Die Belastung wird mittels 'air bag' auf die Schalenoberfläche aufgebracht. Der Konstruktionsaufbau der beiden Schalen sieht folgendermaßen aus. Bei einer der beiden Schalen sind die einzelnen Schichten miteinander verleimt, während für die andere eine Vernagelung mit einer 'Nagelungsdichte' von 3120 'Nägel' pro m<sup>2</sup> gewählt wurde. Auch für die verleimte Konstruktion wurde dieselbe 'Nagelungsdichte' gewählt, um einen entsprechenden Preßdruck für die Verleimung zu erreichen. Der Aufbau der Schale erfolgte mit 4.23 mm starken und 18.0 mm breiten Brettlamellen. Die Länge der verwendeten Brettlamellen beträgt je nach Schicht der Schale 1422 mm für die mittlere Schicht und 2540 mm für die innere bzw. äußere Schicht. Als Randträger wurde ein der Schalengeometrie folgender Randträgerquerschnitt gewählt. Die Querschnittsform ist dem Bild 7.21 zu entnehmen. Die Endquerscheiben der Schale wurden aus 17.8 mm starken Sperrholz gebildet. Diese wurden mit der Schale und den beiden Randträgern mittels Verleimung und Verschraubung verbunden.



**Bild 7.18**

Grundsätzliche Gestaltungselemente der dreischichtigen, zylinderförmigen Holzschale



Für beide Schalentypen, für die verleimte und für die vernagelte Konstruktion, wurde der Schalenrandbereich mit dem Randträger verleimt. Die nachfolgenden Bilder 7.18 bis 7.21 zeigen den grundsätzlichen Aufbau beider Schalen. Während des gesamten Versuchsaufbaues sowie -ablaufes wurde das Raumklima auf 20°C und 61% relativer Luftfeuchtigkeit gehalten. Damit wurde ein konstanter Holzaustrittsfeuchtegehalt von 10.8% erreicht.

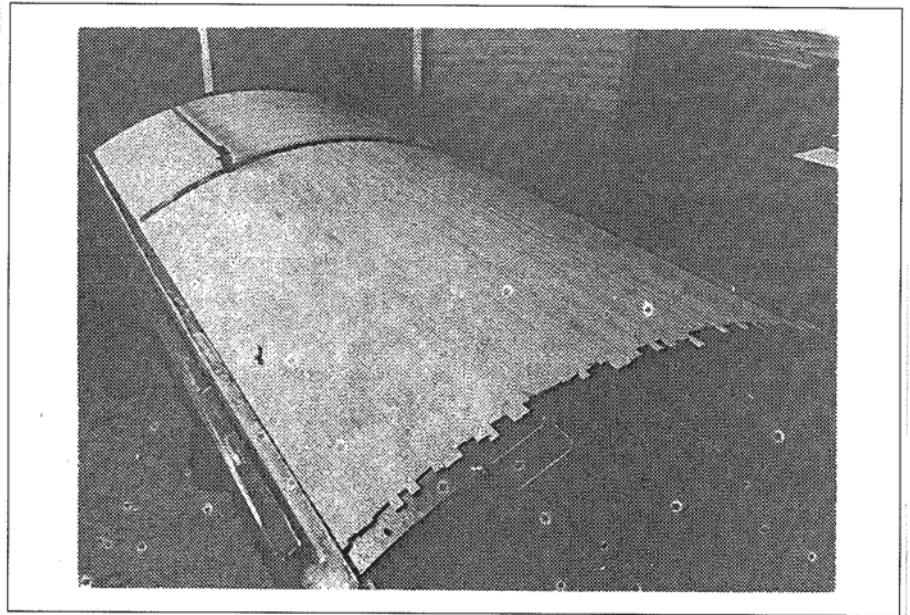


Bild 7.19

Verleimte Schale während der Aufbringung der obersten Holzschichte

Die Geometrieabmessungen der Schale sind im Bild 7.20 und Bild 7.21 ersichtlich. Die Spannweite der Schale beträgt 2456 mm, die Gesamtlänge der Schale beträgt 2474 mm. Im Querschnitt der Schale sind die weiteren Abmessungen ersichtlich. Die Spannweite in Querrichtung beträgt 1270 mm, die Sehnenlänge der Schale beträgt 1219.2 mm. Im Bild 7.21 sind die oben erwähnten und weitere Geometrieabmessungen dargestellt.

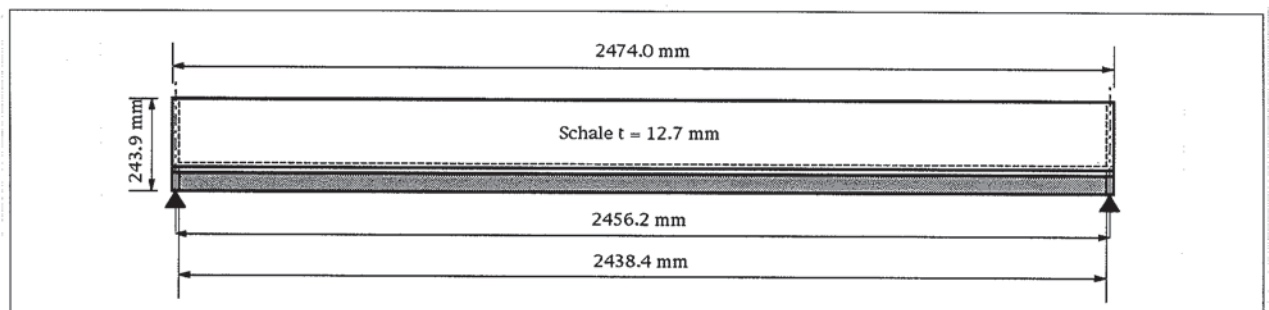


Bild 7.20

Geometrieabmessungen der zylinderförmigen Holzschale - Längsschnitt

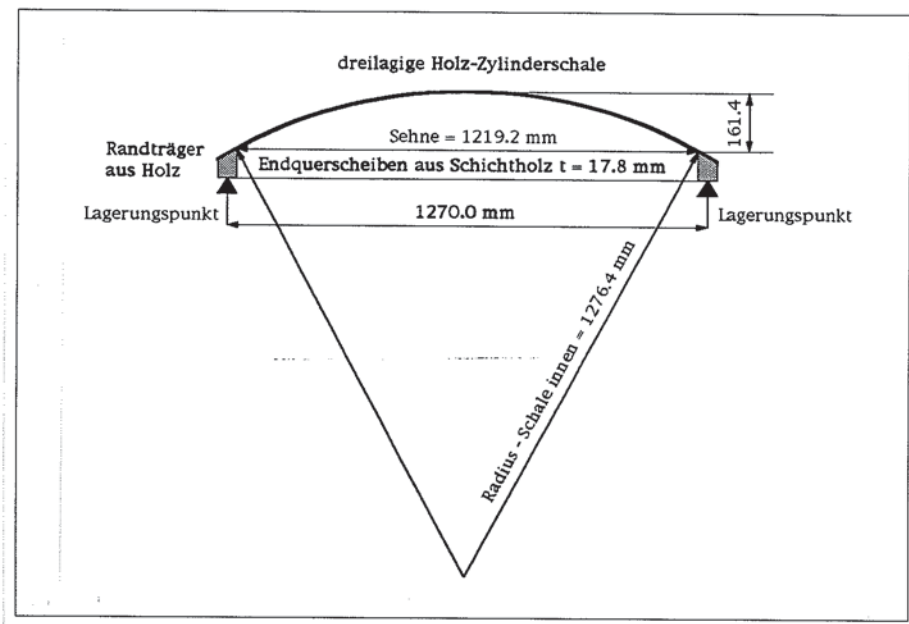


Bild 7.21

Geometrieabmessungen der zylinderförmigen Holzschale - Querschnitt



Im Bild 7.22 ist die Form des Randträgers im Maßstab 1:1 dargestellt. Diesem Detail entsprechend erfolgte auch die Modellbildung für die FE-Analyse mit dem Programm ABAQUS Vers. 4.9 und Vers. 5.2.

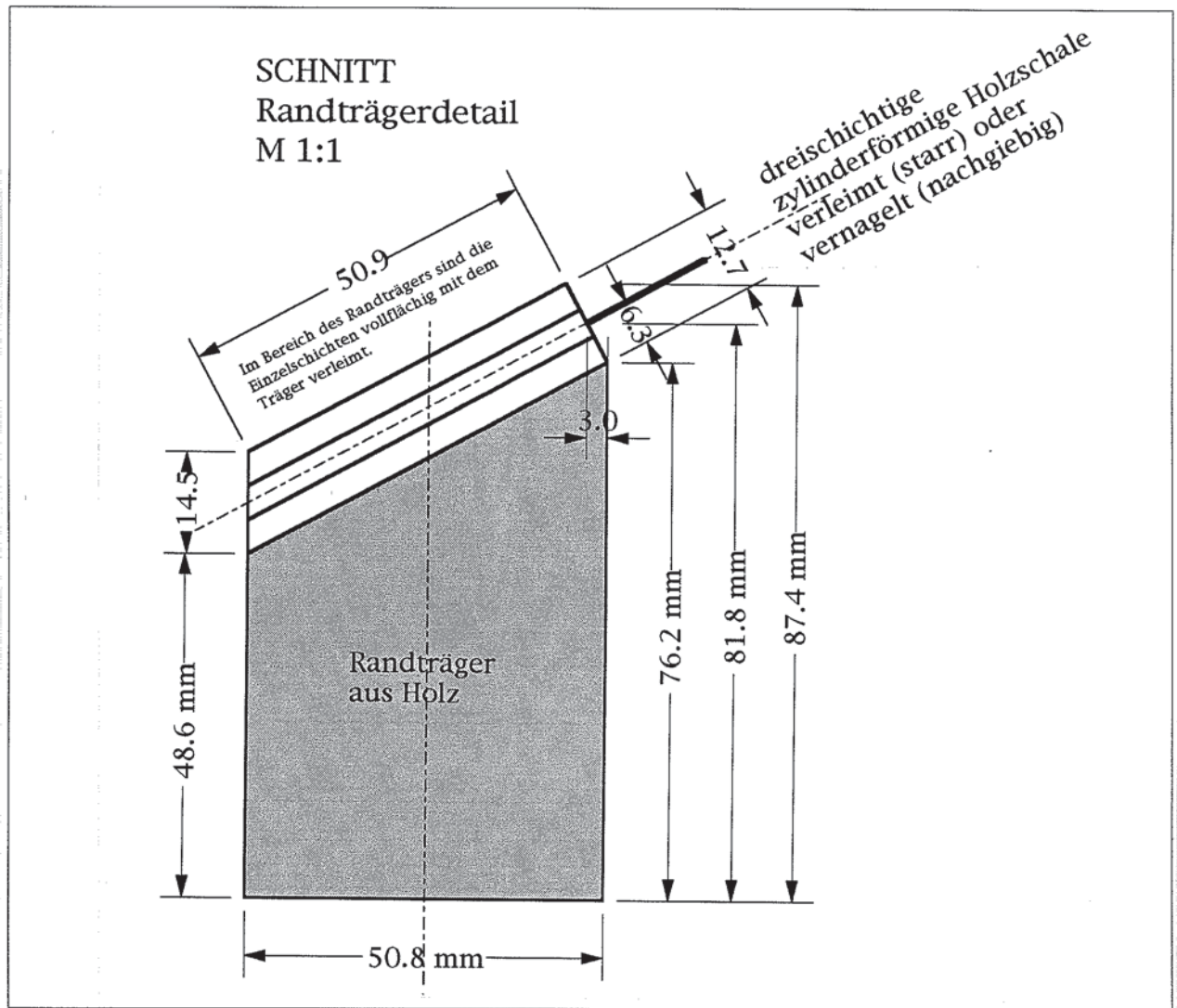


Bild 7.22

Randträgerdetailausbildung im Maßstab 1:1

Die Belastung der Schalenkonstruktion erfolgte wie bereits erwähnt über ein 'air bag'. Damit ergibt sich eine gleichmäßige Beanspruchung der gesamten Schale rechtwinklig zur Schalenoberfläche. Im Bild 7.23 ist die Form des Belastungszustandes dargestellt.

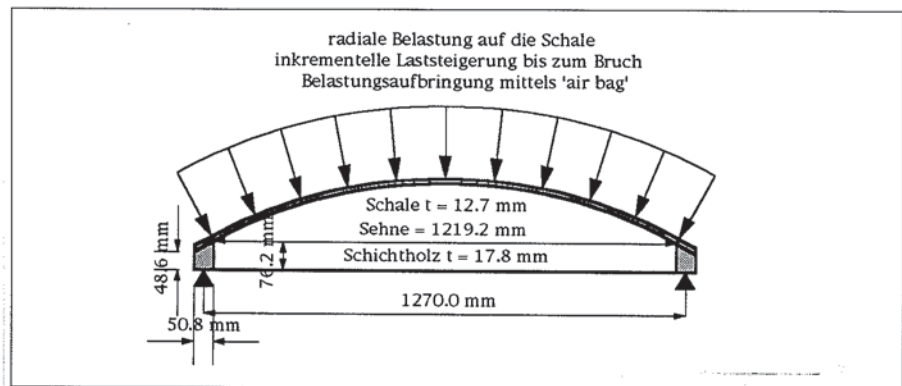


Bild 7.23

Form der Belastung auf die zylinderförmige Holzschale

Nach Herstellung der beiden Schalen wurden diese bis zum Bruchversagen in dem dafür vorgesehenen Versuchsaufbau belastet. Die Lagerung der Schale erfolgte an den vier Randpunkten - Randträger und Querscheibe - entsprechend Bild 7.18. Im Bild 7.24 ist eine dieser Lastzellen an einem Schaleneckpunkt im Versuchsaufbau dargestellt. An einer der Querscheiben wurde die Längsbewegung der Schale und somit der Lastzellen durch den Einbau von Stahlrollen zugelassen.

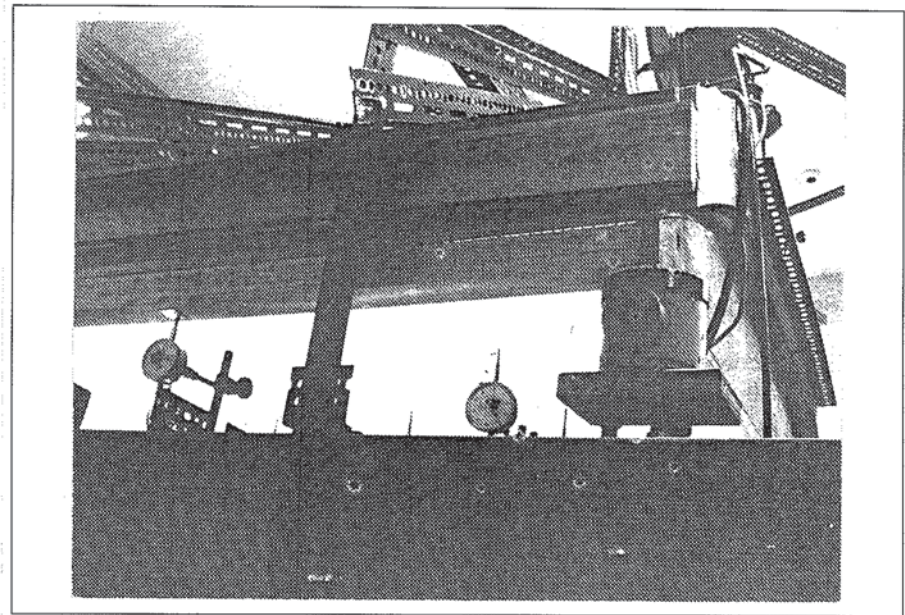


Bild 7.24

Versuchsaufbau dargestellt an einem Schaleneckpunkt

Die Verformungsmessungen erfolgten für die dreischichtige Holzschale, den beiden Randträgern und für die beiden Querscheiben. An der Holzschale wurden an der Unterseite Ösen angebracht, welche durch eine geeignete Verdrahtung mit den Meßgeräten in Verbindung standen. Im Bild 7.25 ist der Grundriß der Schalenkonstruktion mit den vorgesehenen Meßpunkten dargestellt. Weitere Meßpunkte waren am Randträger angebracht. Diese waren von dergestalt, daß an den vorgesehenen



Punkten Aluminiumblechstücke auf die Unterseite der Randträger geklebt wurden und direkt darunter das Meßgerät am Stahlrahmen montiert war.

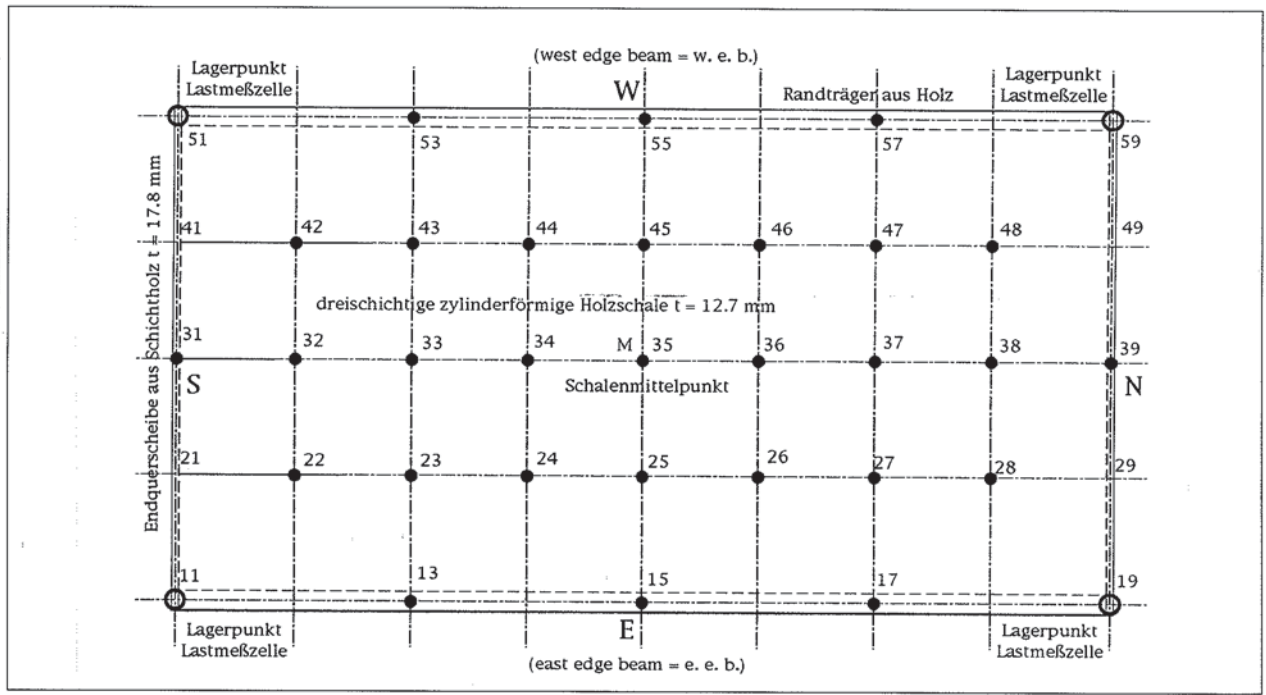


Bild 7.25

Anordnung der Meßpunkte dargestellt im Grundriß der zylinderförmigen Holzschale

Die Belastung erfolgte schließlich in Form inkrementeller Laststeigerung, wobei nach der jeweiligen Laststeigerung eine Verformungsmessung erfolgte. Dieser Vorgang wurde bis zum Bruch der Versuchsschalen durchgeführt. Die genagelte Schale erreichte dabei eine Bruchlast von 3593 Pa (= 3.593 KN/m<sup>2</sup>) bei einer Verformung in Schalenmitte von 71.55 mm.

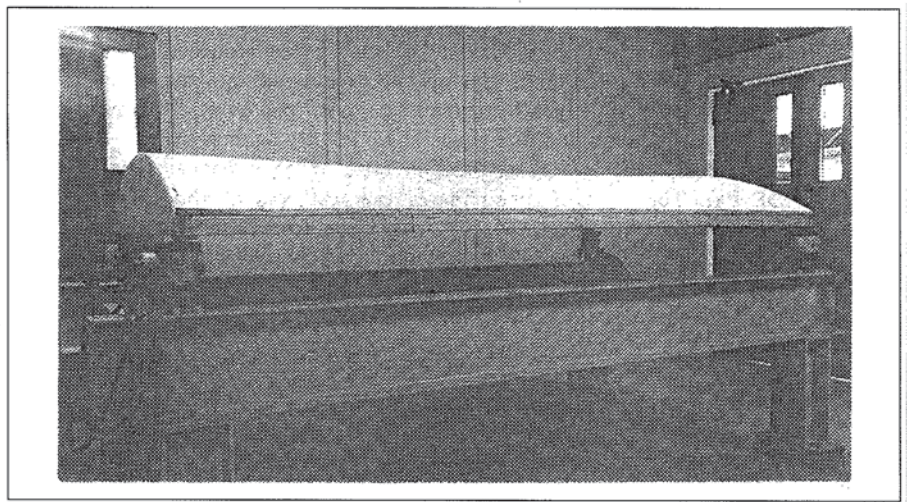
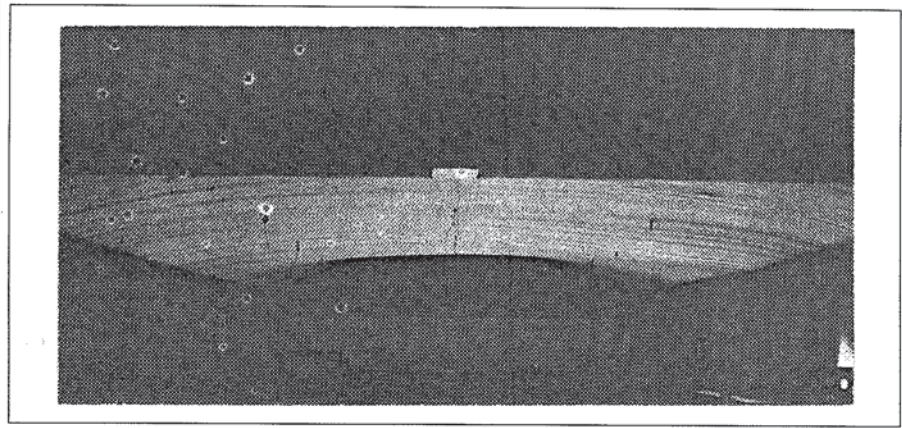


Bild 7.26

Verformte Struktur der genagelten zylinderförmigen Holzschale - Gesamtansicht

Das Verformungsbild bei dieser Laststufe waren eine Abflachung in Schalenmitte wie in den nachfolgenden Bildern 7.26 und 7.27 ersichtlich und letztlich der Bruch einiger Brettlamellen über dem Randträger im Schalenmittenbereich. Die verleimte Schale hingegen erreichte eine Bruchlast von  $7664 \text{ Pa}$  ( $= 7.664 \text{ KN/m}^2$ ) bei einer Verformung in Schalenmitte von  $13.78 \text{ mm}$ . Das Verformungsbild in diesem Fall war ein Ablösen der Schale vom Randträger und teilweise von der Endquerscheibe im Lagerungsbereich der Schale - Eckpunkt der Schale.



**Bild 7.27**

Verformte Struktur der genagelten zylinderförmigen Holzschale - Innenansicht

Eine Zusammenfassung der erfolgten Verformungsmessungen ist in den Tabellen 7.10 bis 7.13 dargestellt. Für die vorhandenen 27 Meßpunkte an der Schale sind für Laststufen von  $0.958 \text{ KN/m}^2$ ,  $3.593 \text{ KN/m}^2$  - Bruchlast - für die vernagelte Schale und  $5.748 \text{ KN/m}^2$  für die verleimte Schale die vertikalen Verformungswerte eingetragen. 3D-Verformungsdiagramme verdeutlichen die unterschiedliche Form vor allem im Mittenbereich der Schale einer verleimten und einer vernagelten Schalenkonstruktion. Klar ersichtlich nach Bild 7.27 ist die große Abflachung in Schalenmitte einer vernagelten Konstruktion. Die enorme Verformungsdifferenz zwischen einer verleimten und einer vernagelten mehrschichtigen Schalenkonstruktion ist bereits bei einer geringen Laststufe von  $0.958 \text{ KN/m}^2$  deutlich erkennbar. So ergibt sich bei dieser Laststufe für die verleimte Schale eine Mittenverformung von  $1.626 \text{ mm}$  und für die vernagelte Schale eine Mittenverformung von  $6.210 \text{ mm}$  und somit eine Differenz von  $4.584 \text{ mm}$ . Dies entspricht einem Prozentsatz von ca.  $280 \%$  bezogen auf die Verformung der verleimten Konstruktion.



## Darstellung der Problematik durch weitere Beispiele

**Tabelle 7.10**

Vertikale Verformungen (mm)  
Verleimte zylinderförmige Holzschale bei einer Laststufe von 0.958 KN/m<sup>2</sup>

	1 S	2	3	4	5 M	6	7	8	9 N
Line 1 E	± 0.000	- 0.507	- 0.878	- 1.143	- 1.244	- 1.130	- 1.029	- 0.520	± 0.000
Line 2		- 0.788	- 1.244	- 1.523	- 1.601	- 1.497	- 1.092	- 0.826	
Line 3	- 0.206	- 0.826	- 1.284	- 1.523	- 1.626	- 1.512	- 1.232	- 0.710	- 0.213
Line 4		- 0.720	- 1.309	- 1.460	- 1.663	- 1.562	- 1.294	- 0.837	
Line 5 W	± 0.000		- 0.953		- 1.346		- 1.029		± 0.000

**Tabelle 7.11**

Vertikale Verformungen (mm)  
Verleimte zylinderförmige Holzschale bei einer Laststufe von 5.748 KN/m<sup>2</sup>

	1 S	2	3	4	5 M	6	7	8	9 N
Line 1 E	± 0.000	- 3.156	- 5.553	- 7.260	- 7.689	- 7.138	- 5.705	- 3.211	± 0.000
Line 2		- 5.980	- 9.673	- 11.78	- 12.62	- 11.93	- 9.646	- 6.504	
Line 3	- 1.240	- 6.890	- 10.79	- 12.83	- 13.78	- 13.04	- 10.83	- 6.945	- 1.323
Line 4		- 6.407	- 9.852	- 11.88	- 12.62	- 11.99	- 9.894	- 6.490	
Line 5 W	± 0.000		- 5.429		- 7.717		- 5.679		± 0.000

**Tabelle 7.12**

Vertikale Verformungen (mm)  
Vernagelte zylinderförmige Holzschale bei einer Laststufe von 0.958 KN/m<sup>2</sup>

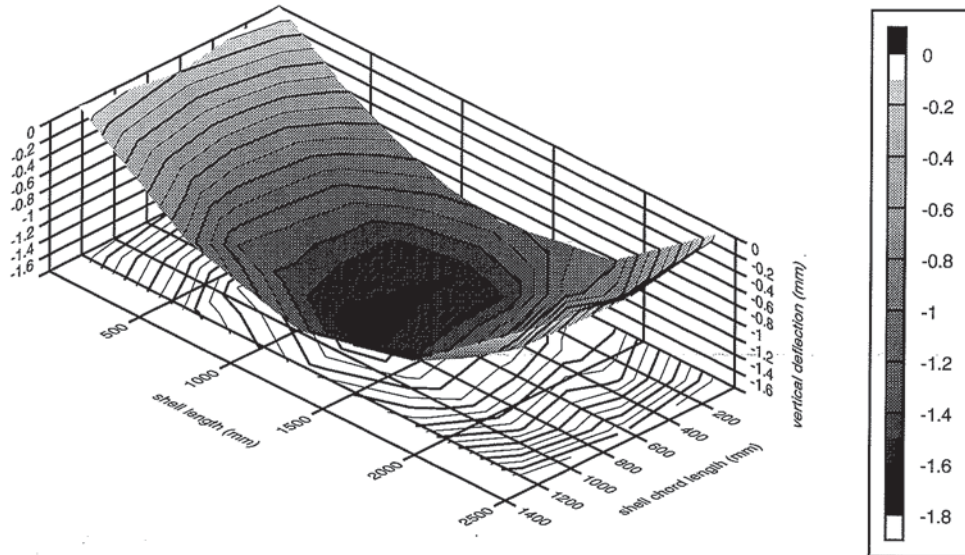
	1 S	2	3	4	5 M	6	7	8	9 N
Line 1 E	± 0.000	- 1.503	- 2.658	- 3.428	- 3.670	- 3.465	- 2.720	- 1.540	± 0.000
Line 2		- 2.919	- 4.652	- 5.347	- 5.496	- 5.509	- 4.645	- 2.844	
Line 3	- 0.236	- 3.645	- 5.471	- 6.117	- 6.210	- 6.173	- 5.564	- 3.459	- 0.205
Line 4		- 3.012	- 4.894	- 5.651	- 5.72	- 5.564	- 4.658	- 2.906	
Line 5 W	± 0.000		- 2.708		- 3.732		- 2.670		± 0.000

**Tabelle 7.13**

Vertikale Verformungen (mm)  
Vernagelte zylinderförmige Holzschale bei einer Laststufe von 3.593 KN/m<sup>2</sup> (Bruch)

	1 S	2	3	4	5 M	6	7	8	9 N
Line 1 E	± 0.000	- 10.59	- 16.10	- 24.33	- 25.76	- 23.83	- 17.67	- 9.802	± 0.000
Line 2		- 24.83	- 47.08	- 56.38	- 57.10	- 57.60	- 45.15	- 29.19	
Line 3	- 1.216	- 23.54	- 58.67	- 67.62	- 71.55	- 69.83	- 54.38	- 27.55	- 0.930
Line 4		- 23.40	- 43.86	- 56.74	- 60.53	- 56.17	- 42.22	- 19.82	
Line 5 W	± 0.000		- 15.38		- 19.61		- 15.82		± 0.000

Gemessene vertikale Verformungen der verleimten zylinderförmigen dreischichtigen Holzschale (90-0-90) unter einer radialen Belastung von 0.958 KN/m<sup>2</sup>

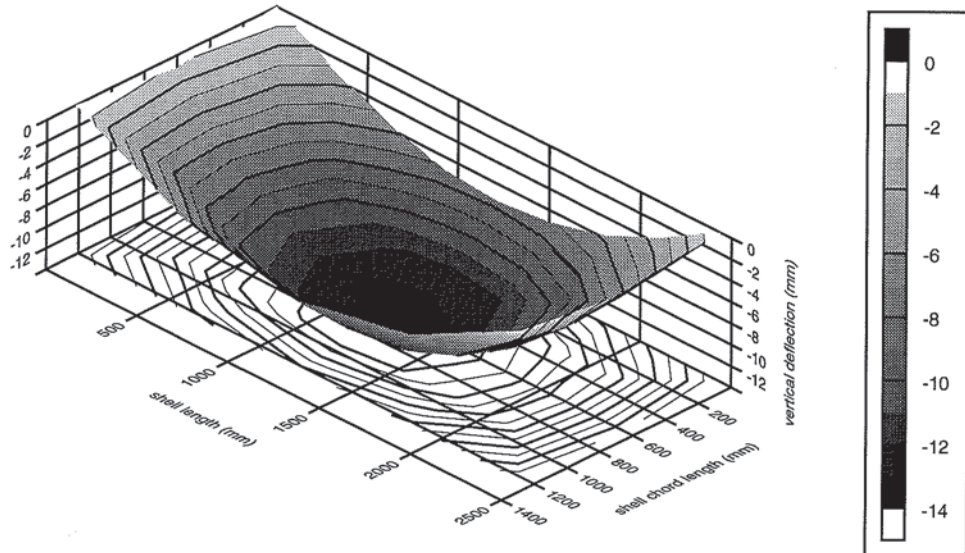


Gem. Verformungen bei 0.958 KN/m<sup>2</sup>: Schalenmitte: 1.626 mm, Schalenrand: w. e. b. = 1.346 mm, e. e. b. = 1.244 mm

Bild 7.28

3D-Verformungsdiagramm - Werte siehe Tabelle 7.10

Gemessene vertikale Verformungen der verleimten zylinderförmigen dreischichtigen Holzschale (90-0-90) unter einer radialen Belastung von 5.748 KN/m<sup>2</sup>



Gem. Verformungen bei 5.748 KN/m<sup>2</sup>: Schalenmitte: 13.780 mm, Schalenrand: w. e. b. = 7.717 mm, e. e. b. = 7.689 mm

Bild 7.29

3D-Verformungsdiagramm - Werte siehe Tabelle 7.11



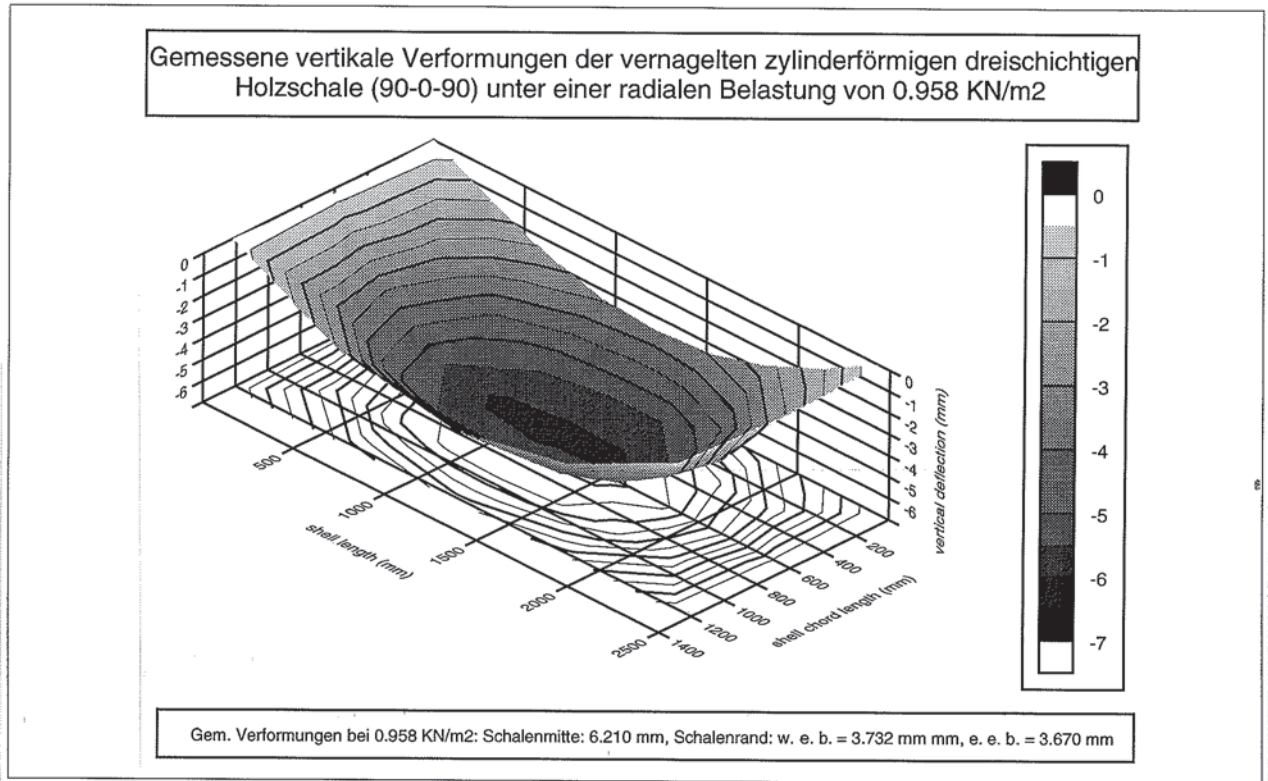


Bild 7.30

3D-Verformungsdiagramm - Werte siehe Tabelle 7.12

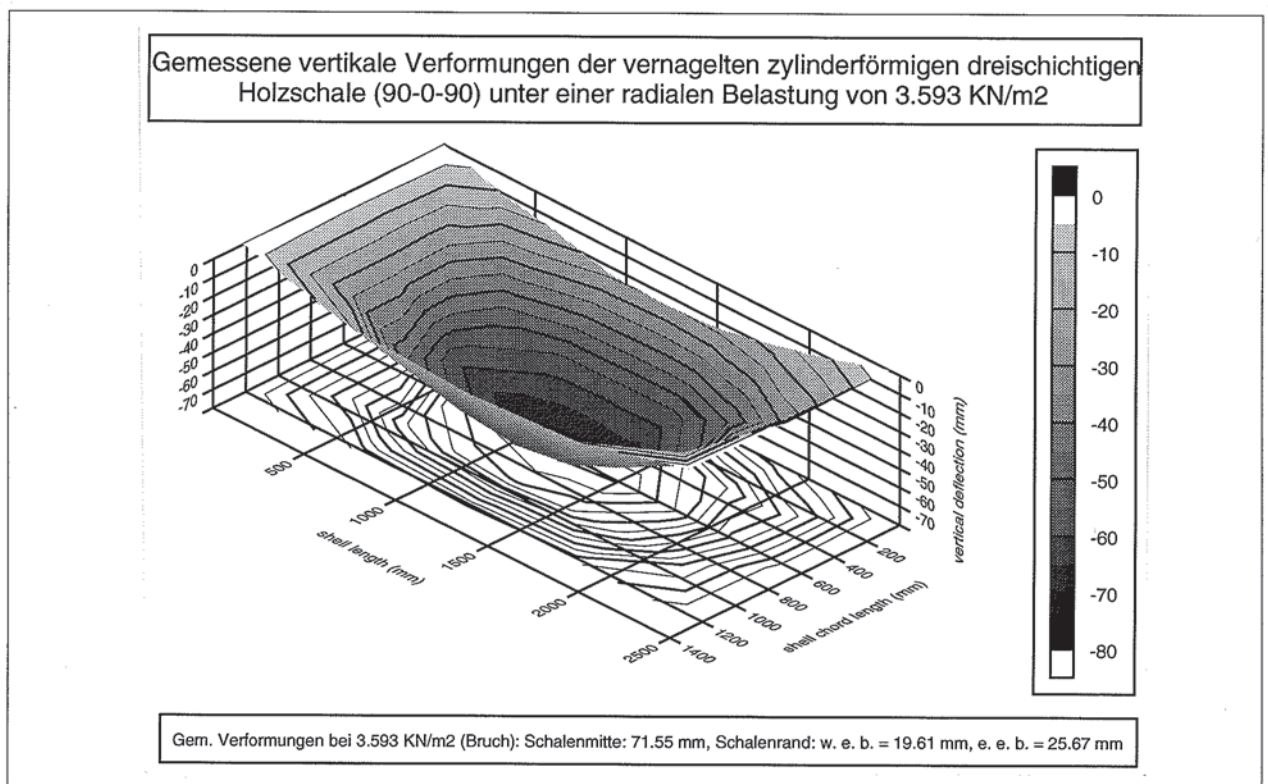


Bild 7.31

3D-Verformungsdiagramm - Werte siehe Tabelle 7.13

Abschließend sind im Bild 7.32 die Last-Verformungskurven für jeweils drei Punkte der verleimten und vernagelten dreischichtigen zylinderförmigen Holzschale dargestellt. Es sind dies die Verformungen für die Randträger in Trägermitte - Punkt w. e. b. und e. e. b. - sowie die Verformungen in Schalenmitte.

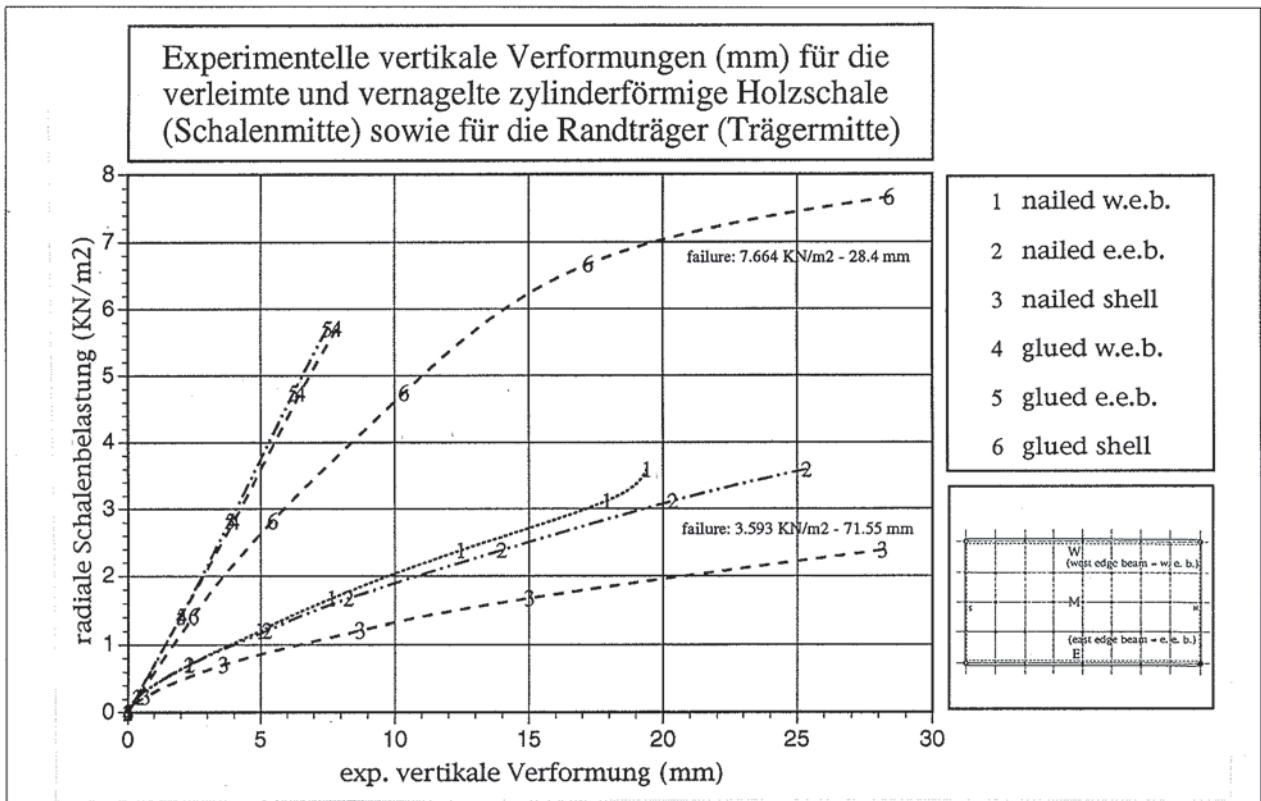


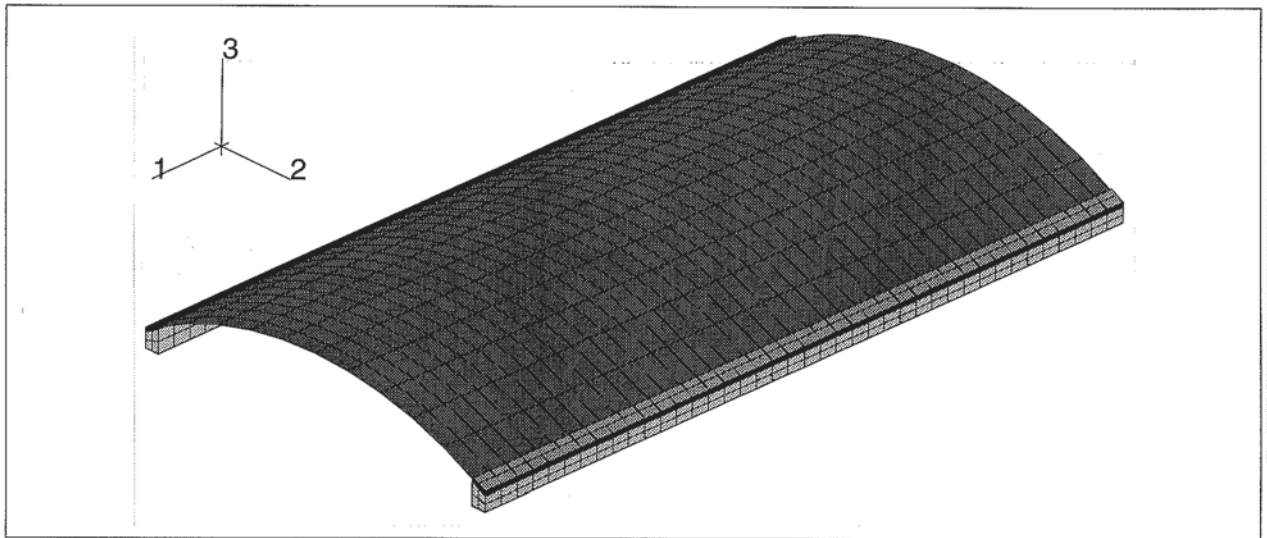
Bild 7.32

Experimentell ermittelte vertikale Verformungen (mm)



**Beispiel 1: Berechnungen mit dem Programm ABAQUS Vers. 4.9 und Vers. 5.2  
Lineare Berechnung und GNL -geometrisch nichtlineare - Berechnung**

Die nachfolgenden Berechnungen zeigen, daß die Verwendung des 'composite-shell-elements' des Programmes ABAQUS auch für geschichtete, flächenhafte Holzkonstruktionen Gültigkeit hat, solange man es allerdings mit einer starren Verbundfuge zu tun hat. Am Beispiel der geschichteten, zylindrischen Holzschale soll dies - LIN und GNL - gezeigt werden. Die für diese Berechnungen erforderlichen Input-Files sind dem Anhang B zu entnehmen. Im Bild 7.33 und Bild 7.34 ist die für die Berechnung gegebene Struktur dargestellt.



**Bild 7.33**

Netzplot der gesamten FE-Struktur

Der folgende Auszug des Input-Files 'cyl-tim-lit4.inp' zeigt die Beschreibung der dreischichtigen Holzschale. Unter 'material definition' sind die verwendeten Werkstoffkenngrößen für die Berechnung ersichtlich.

```
**element definition - shell elements**
*ELEMENT, TYPE=S4R5
1, 1, 3, 203, 201
*ELGEN, ELSET=ELCYL
1, 40, 2, 1, 10, 200, 50
*SHELL SECTION, ELSET=ELCYL, COMPOSITE
4.23, , TIMSHELL, ORS00
4.23, , TIMSHELL, ORS90
4.23, , TIMSHELL, ORS00

**material definition - shell elements**
*MATERIAL, NAME=TIMSHELL
*ELASTIC, TYPE=LAMINA
8000.0, 300.0, 0.38, 500.0, 500.0, 40.0
```

Die Schichtorientierung der drei Einzelschichten wird wie folgt definiert.

```
**definition of a local cylindrical coordinate system**  
**x-axis (1-direction) perpendicular to the shell surface**  
*ORIENTATION, SYSTEM=CYLINDRICAL, NAME=ORS00  
0.0, 606.6, -1039.6, 2438.4, 606.6, -1039.6  
1, 0.0  
*ORIENTATION, SYSTEM=CYLINDRICAL, NAME=ORS90  
0.0, 606.6, -1039.6, 2438.4, 606.6, -1038.6  
1, 90.0
```

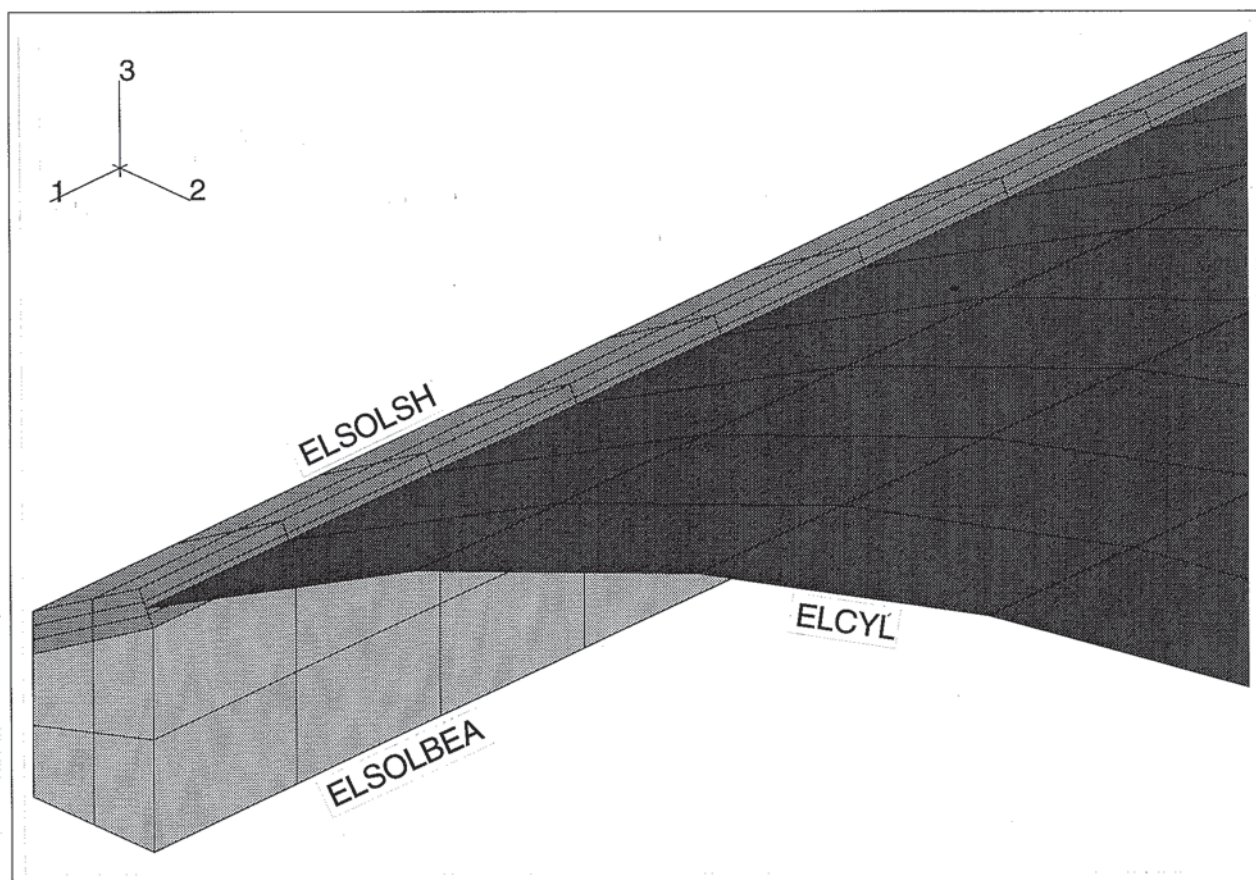


Bild 7.34

Detailnetzplot am Lagerungspunkt der zylinderförmigen Holzschale

Die nachfolgenden Bilder 7.35 und 7.36 zeigen den Netzplot der Holzschale und die dazugehörigen Knotennummern sowie die Elementnummern.

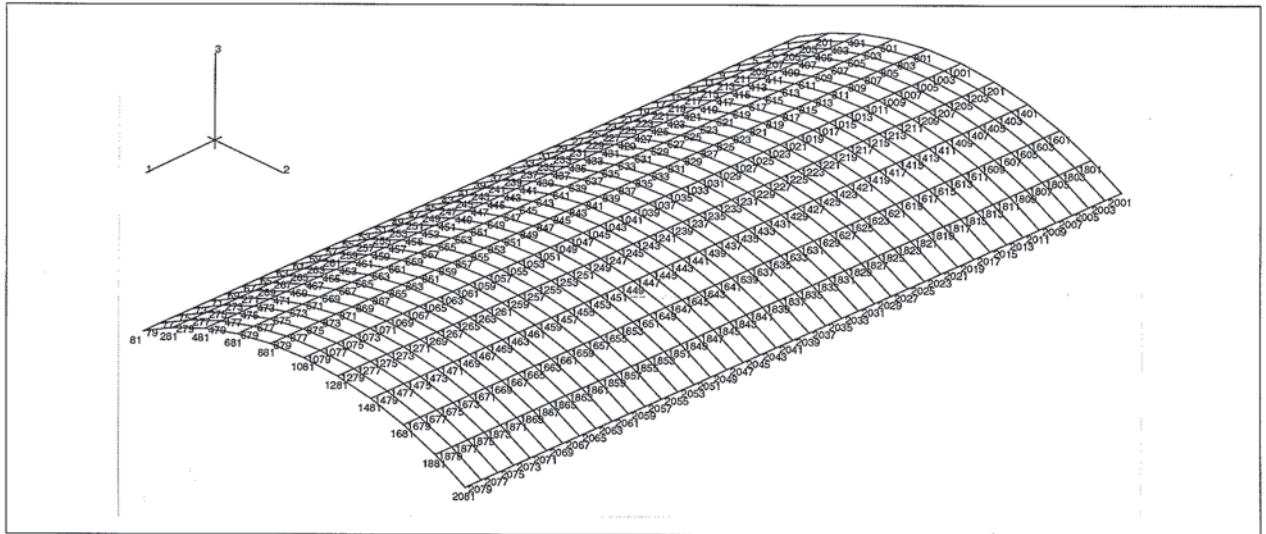


Bild 7.35

Netzplot der Schale - ELCYL - Knotennumerierung

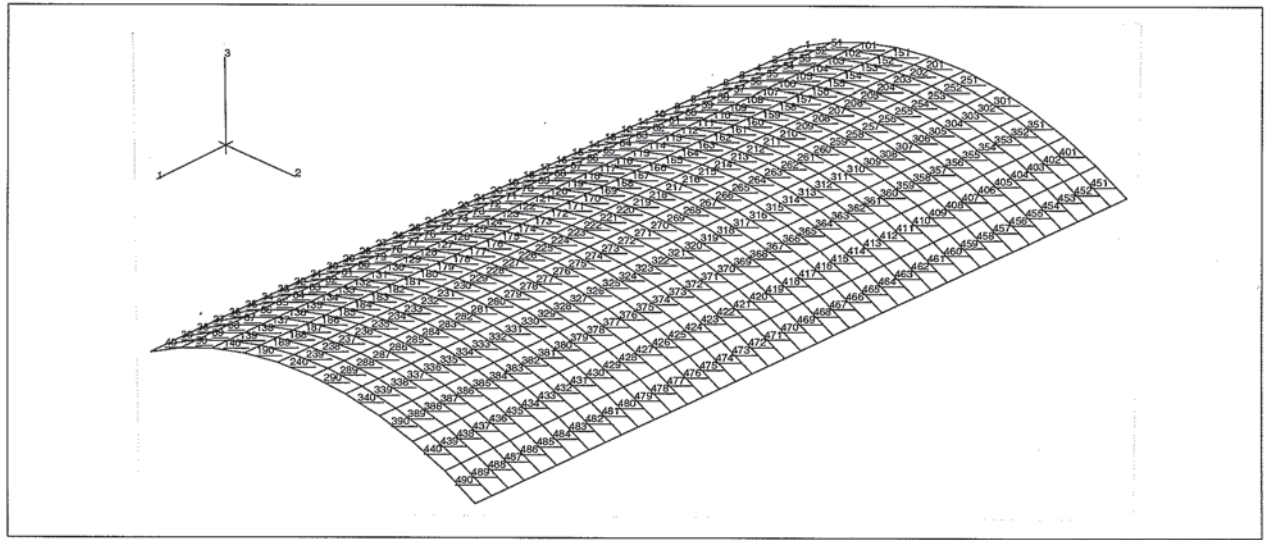


Bild 7.36

Netzplot der Schale - ELCYL - Elementnumerierung

In der Tabelle 7.14 sind die aus der GNL-Berechnung stammenden Verformungsgrößen in Schalenmitte in den jeweiligen Lastschritten - INCR 1 bis INCR 10 - ersichtlich. Weiters sind zum Vergleich die aus der LIN-Berechnung stammenden Verformungen und die während des Versuchsablaufes gemessenen Verformungswerte eingetragen. Die Meßwerte sind auch den Tabellen 7.10 bis 7.13 zu entnehmen.



Tabelle 7.14

Verformungen  $w$  in Schalenmitte - Knoten 1041 - in [mm]  
 Vergleich der eigenen Berechnungen mit den Meßwerten aus dem Experiment von  
 G.B. Walford und P.J. Moss (1980) [115].

INCR. - Belastung [KN/m <sup>2</sup> ]	GNL - Berechnung w in Schalenmitte in [mm] Knoten 1041	LIN - Berechnung w in Schalenmitte in [mm] Knoten 1041	Experiment w in Schalenmitte in [mm]
INCR 1 - 0.7664	1.392	1.364	-----
----- 0.9580 - gem.	-----	-----	1.626
INCR 2 - 1.5328	2.845	2.727	-----
INCR 3 - 2.2992	4.367	4.091	-----
INCR 4 - 3.0656	5.968	5.454	-----
INCR 5 - 3.8320	7.659	6.818	-----
INCR 6 - 4.5984	9.455	8.181	-----
INCR 7 - 5.3648	11.380	9.545	-----
----- 5.7480 - gem.	-----	-----	13.780
INCR 8 - 6.1312	13.450	10.910	-----
INCR 9 - 6.8976	15.720	12.270	-----
INCR 10 - 7.664	18.240	13.640	-----

Im Bild 7.37 ist die verformte Struktur in der yz-Ebene - Querschnitt - dargestellt.  
 Diese läßt sich qualitativ mit der verformten Struktur des Bildes 7.27 - Experiment  
 - vergleichen. Im Bild 7.38 ist die Verformung in der xz-Ebene ersichtlich.

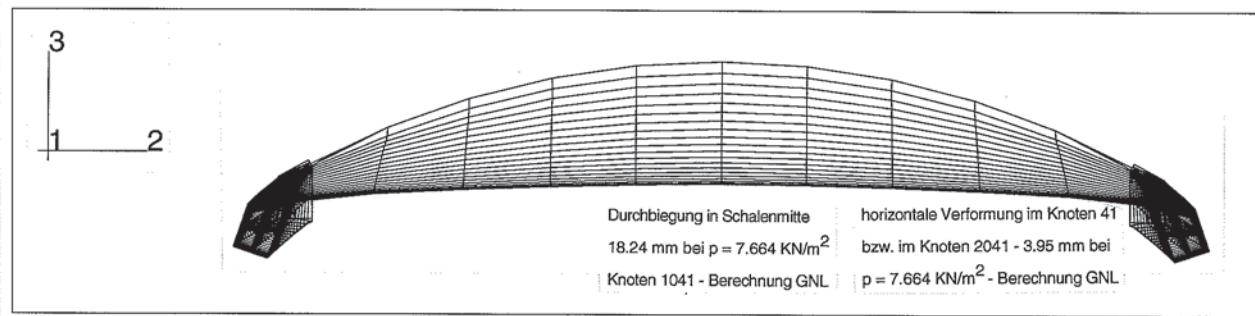


Bild 7.37 Verformte Struktur in der yz-Ebene - Laststufe  $p = 7.664 \text{ KN/m}^2$  - GNL - Bruch

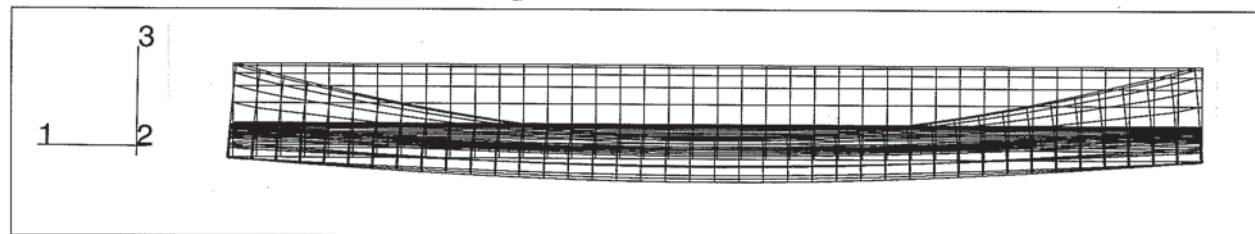


Bild 7.38 Verformte Struktur in der xz-Ebene - Laststufe  $p = 7.664 \text{ KN/m}^2$  - GNL - Bruch



Im Bild 7.39 ist die verformte Struktur in der xy-Ebene - Grundriß - dargestellt. In der Schalenmitte - Knoten 1041 - ergibt sich eine rechnerische Durchbiegung von 18.24 mm.

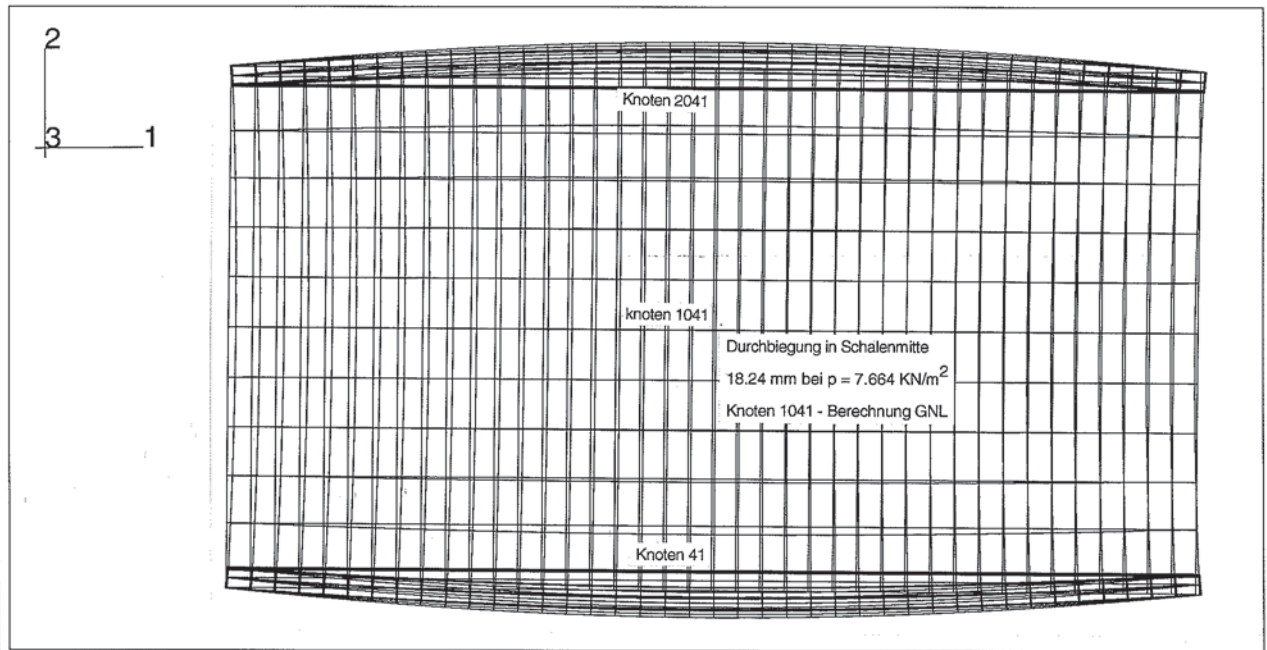


Bild 7.39

Verformte Struktur in der xy-Ebene - Laststufe  $p = 7.664 \text{ KN/m}^2$  - GNL - Bruch

Das Bild 7.40 beinhaltet die verformte und unverformte Struktur in axonometrischer Darstellung.

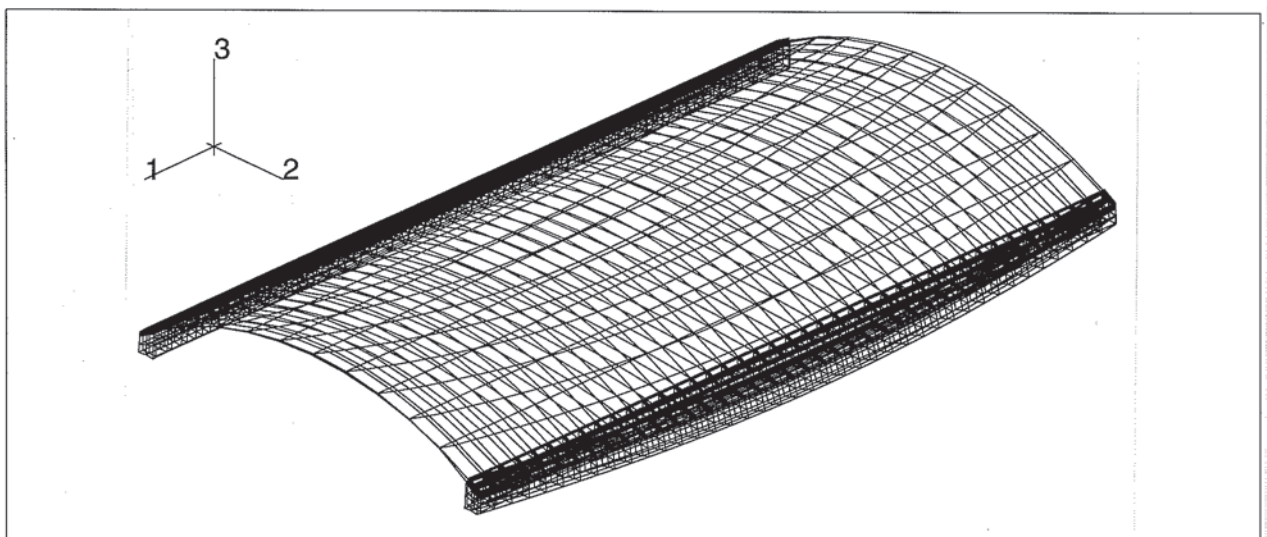


Bild 7.40

Verformte Struktur in axonometrischer Darstellung

Im Bild 7.41 sind die Verformungen  $w$  in Schalenmitte in [mm] in Abhängigkeit zur radialen Schalenbelastung in [ $\text{KN}/\text{m}^2$ ] dargestellt. In diesem Diagramm sind die experimentell ermittelten Verformungswerte und die aus Berechnungen ermittelten Werte ersichtlich. Darin erkennt man, daß die eigenen GNL-Berechnungen sehr gut an das Experiment herankommen. Lediglich im 'plastischen Bereich' ergeben sich im Experiment größere Verformungswerte als in der Berechnung. Dies deshalb, da für das Material Holz selbst ideal elastische Materialkennwerte eingesetzt wurden.

Der Unterschied zwischen den eigenen Berechnungen und den GNL-Berechnungen von P.J. Moss sind relativ gering. P.J. Moss hatte für seine Berechnungen ein einziges Schalenelement mit einer ideellen Schichtdicke  $t^*$  und mittleren Steifigkeitswerten, die aus den Versuchsergebnissen rückgerechnet wurden, verwendet. Für die eigenen FE-Berechnungen wurden zur Modellbildung 'composite-shell-elements' verwendet, welche dreischichtig, dem Aufbau der Versuchsschale entsprechend, aufgebaut waren.

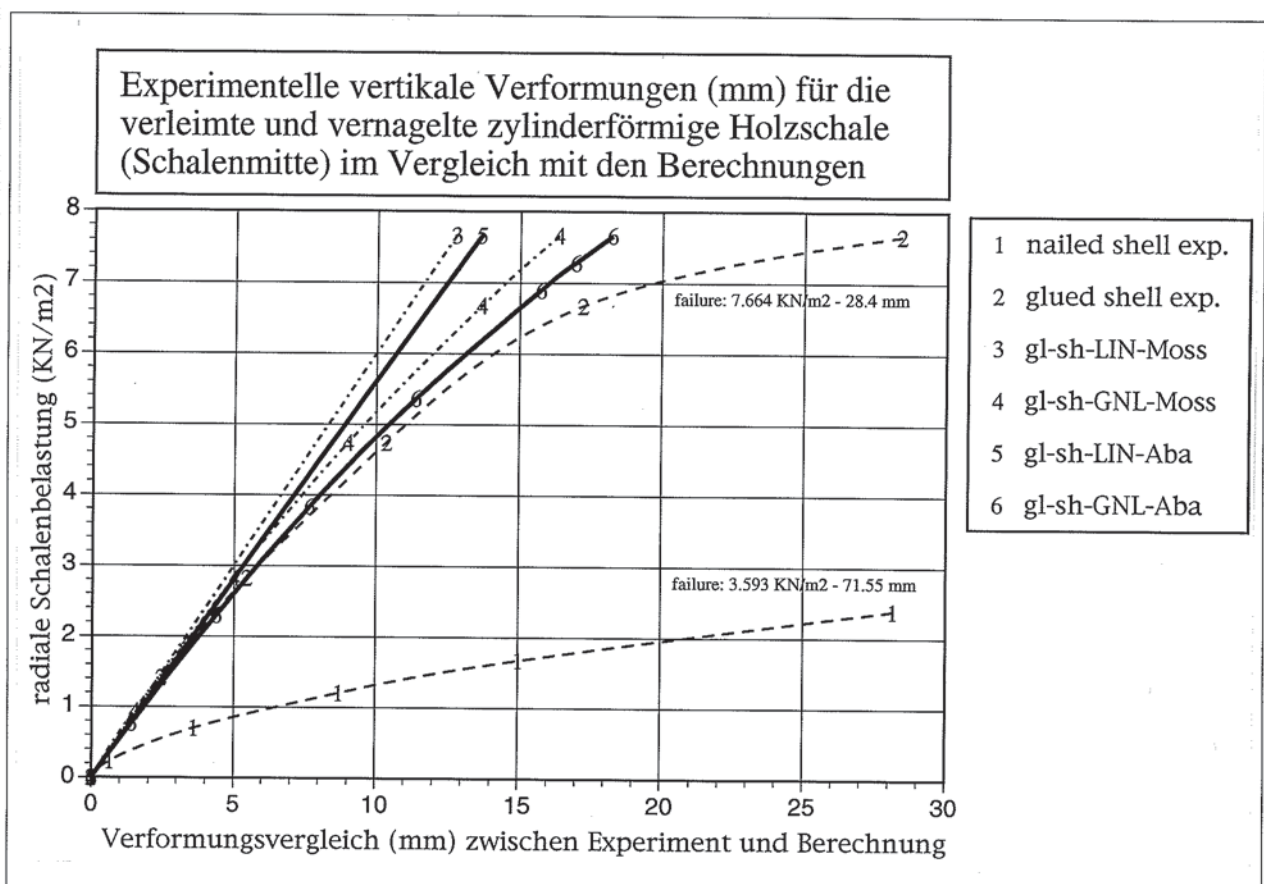


Bild 7.41

Vergleich der vertikalen Verformungswerte in Schalenmitte in [mm] zwischen Experiment, Berechnungen von P.J. Moss und eigenen Berechnungen mit ABAQUS

Nachfolgend werden für die dreischichtige, zylinderförmige Holzschale die lokalen Spannungen  $S_{11}$  und  $S_{12}$  dargestellt. Für jede Einzelschicht ES werden die Ergebnisse in fünf Integrationspunkten über die Höhe  $h$  ermittelt. In den Bildern 7.42 bis 7.45 werden für jede Einzelschicht ES in drei Integrationspunkten die Ergebnisse dargestellt. Es bedeuten hierbei:

- $S_{11}$   
Normalspannungen in der lokalen  $x$ -Richtung - Materialhauptachse der jeweiligen Einzelschicht ES.
- $S_{12}$   
Schubspannungen in der  $xy$ -Ebene - Materialhauptachsen -  $x = 1$ ,  $y = 2$  - der jeweiligen Einzelschicht ES.



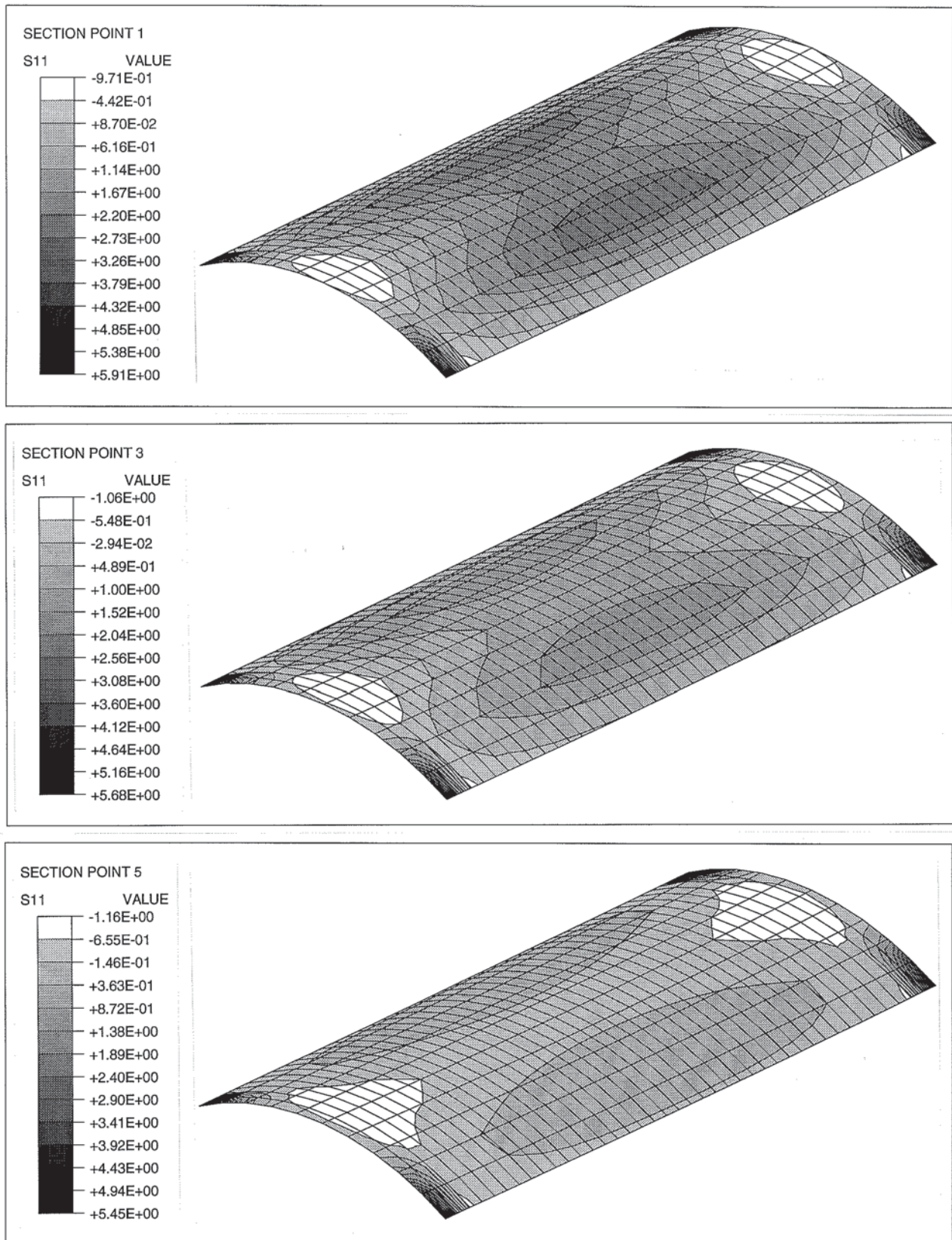
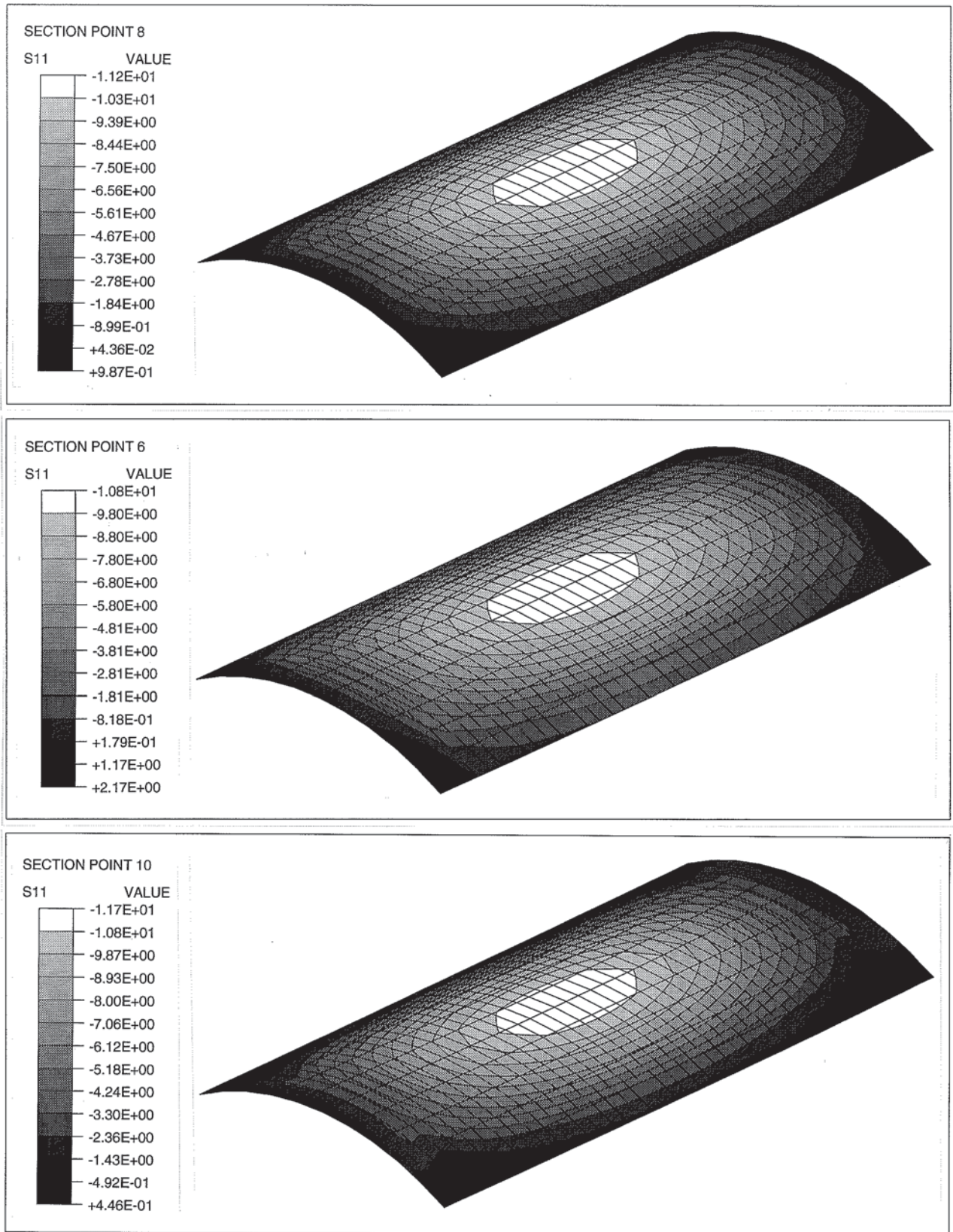


Bild 7.42

Shell 2456.2\*1270 - Layer 1/0°, Layer 2/90° and Layer 3/0°  
 S11 - Normalspannungen in x=1-Richtung - lokal - Layer 1/0°





**Bild 7.43**

Shell 2456.2\*1270 - Layer 1/0°, Layer 2/90° and Layer 3/0°  
 S11 - Normalspannungen in x=1-Richtung - lokal - Layer 2/90°

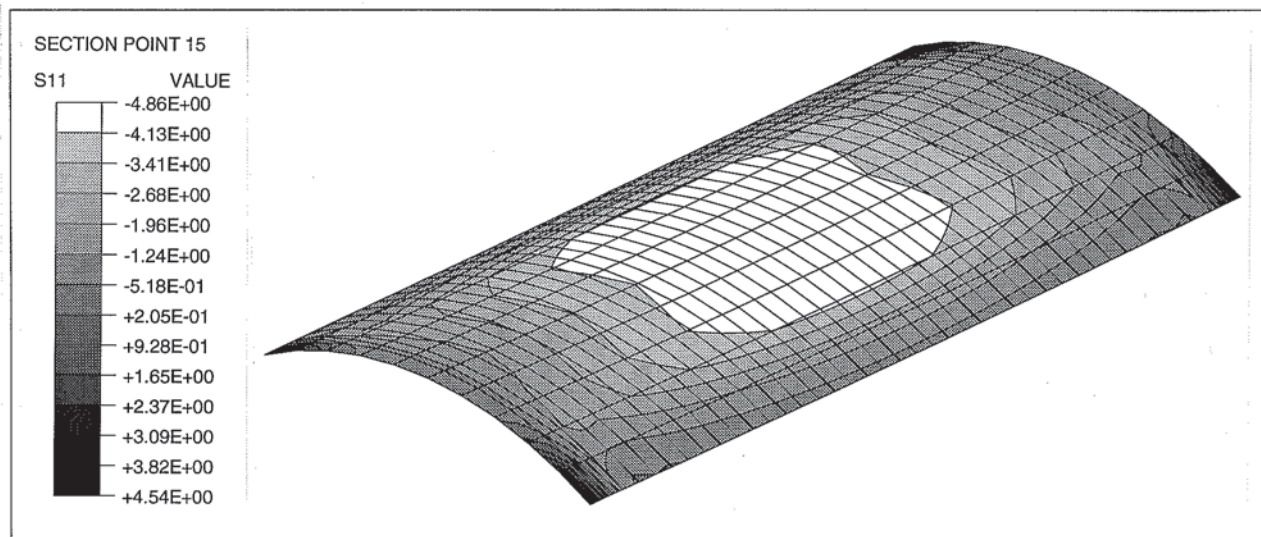
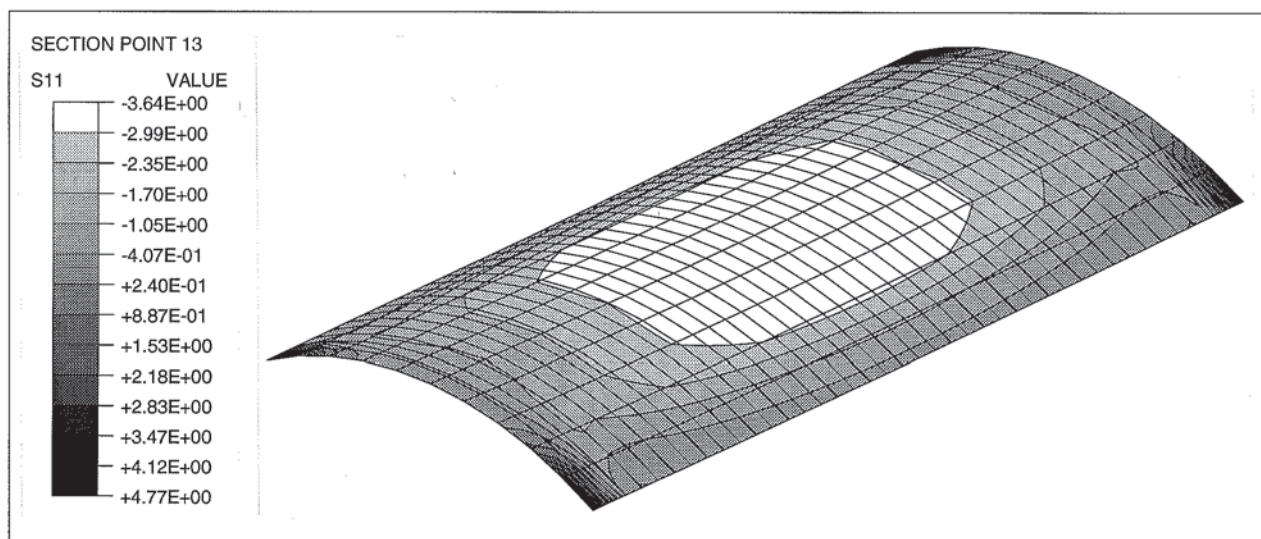
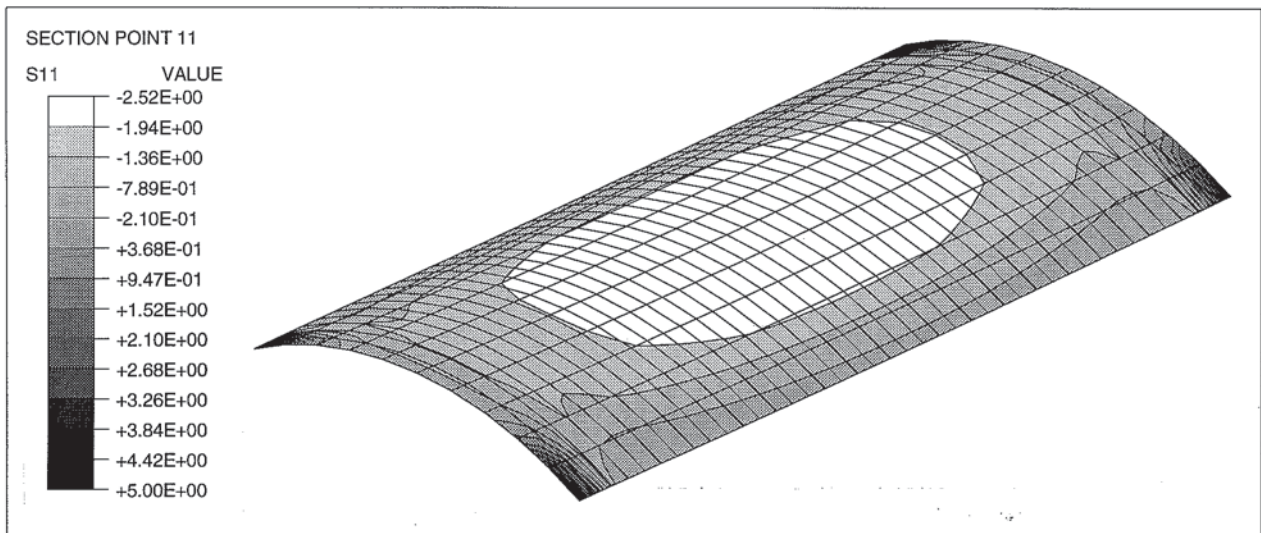


Bild 7.44

Shell 2456.2\*1270 - Layer 1/0°, Layer 2/90° and Layer 3/0°  
 S11 - Normalspannungen in x=1-Richtung - lokal - Layer 3/0°



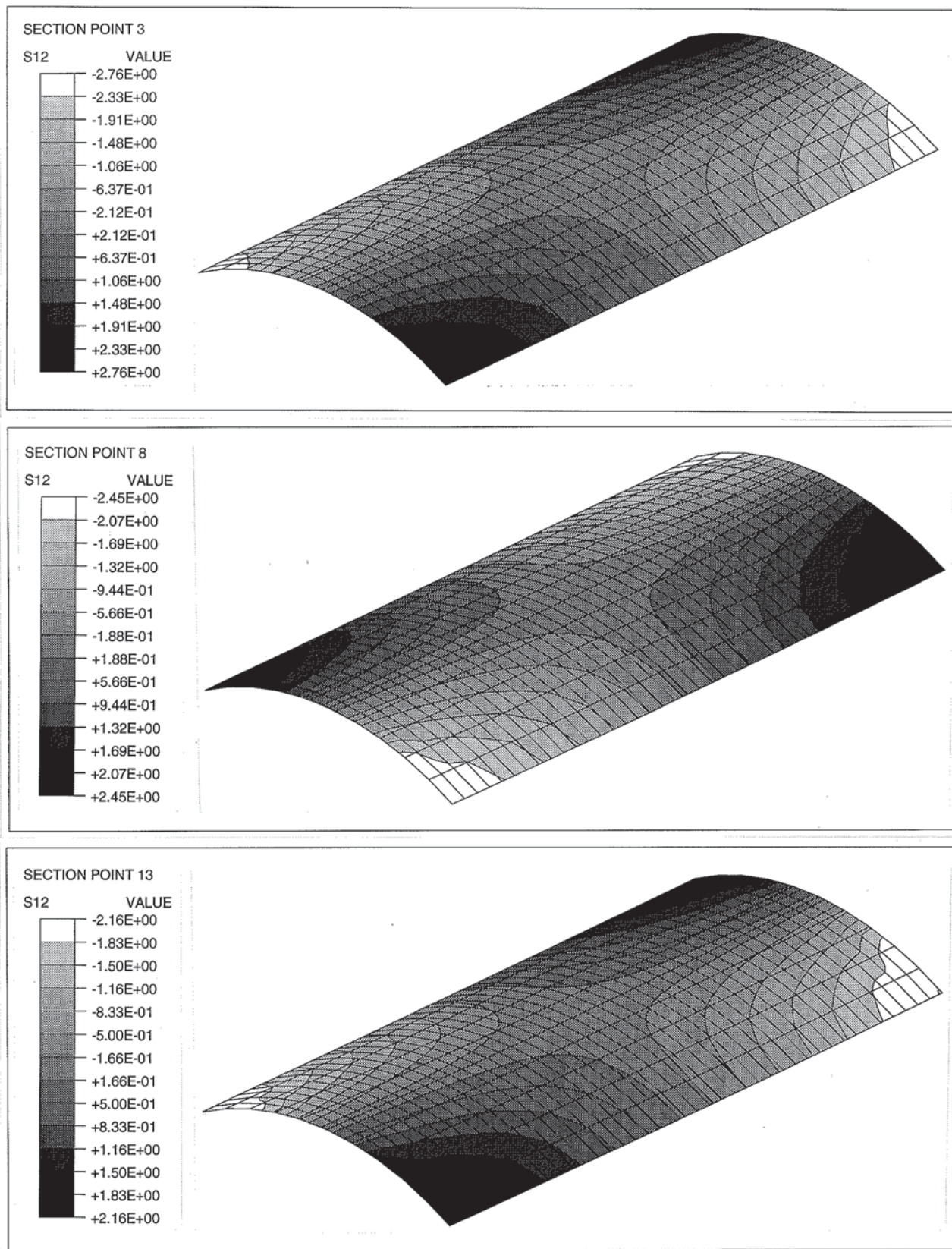


Bild 7.45

Shell 2456.2\*1270 - Layer 1/0°, Layer 2/90° and Layer 3/0°  
 S12 - Schubspannungen in der xy=12-Ebene - lokal - Section 3, 8, 13





---

# 8.

## Ausblick und Schlußbetrachtung

---

### Ausblick

---

Nachfolgend sind drei Tabellen 8.1 bis 8.3 dargestellt, welche einerseits den Stand der Bearbeitung und andererseits die in der vorliegenden Arbeit bearbeiteten Fachgebiete zeigen. Weiters sind die noch zu bearbeitenden Bereiche - Felder ohne Schattierung - ersichtlich. In diesen Bereichen sind zwar vereinzelte, momentan laufende Tätigkeiten bekannt, allerdings sind bis zum heutigen Zeitpunkt keine umfassenden Arbeiten bekannt.

Legende:



Bereits behandelt und durch zahlreiche Forschungstätigkeiten und Veröffentlichungen bekannt.



Bereits behandelt und ebenfalls aus Veröffentlichungen bekannt. Zudem im Zuge dieser Arbeit miterfaßt.



#### **Hauptteil der vorliegenden Arbeit**



Noch weitgehend unerforschte Themenbereiche hinsichtlich mechanischer Formulierung - Modellierung - und numerischer Behandlung der Problematik.

**Tabelle 8.1** 1D-Holzkonstruktionen  
Bearbeitungstabelle

	linear	linear	nichtlinear	nichtlinear
analytisch	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit starrer Verbundfuge  siehe Literatur	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit nachgiebiger Verbundfuge Bearbeitung: U.A. Girhammar, V.K.A. Gopu, J.R. Goodman, E.P. Popov, R. Plisch, J. Natterer, M.Hoch, u.w.	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit starrer Verbundfuge  GNL, MNL, GMNL siehe Literatur	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit nachgiebiger Verbundfuge GNL, MNL, GMNL Bearbeitung: D.L. Wheat, M.D. Vanderbilt, J.R. Goodman, B. Norlin, R. Kneidl, u.w.
numerisch	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit starrer Verbundfuge  siehe Literatur Programm VERBUND1D	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit nachgiebiger Verbundfuge Bearbeitung: E.G. Thompson, J.R. Goodman, M.D. Vanderbilt, u.w. Programm VERBUND1D	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit starrer Verbundfuge  GNL, MNL, GMNL siehe Literatur	geschichtete 1D-Holzkonstruktionen mit nachgiebiger Verbundfuge GNL, MNL, GMNL Bearbeitung: R. Kneidl, B. Norlin, u.w. Programm LSTASS - R.Kneidl

### 1D-Verbund

Für diesen Themenbereich sind bereits eine Vielzahl von Forschungsarbeiten bekannt. Durch die Bearbeitung des 2D-Verbundes in dieser Arbeit ist auch der 1D-Verbund der Vollständigkeit halber miteinfaßt worden.

**Tabelle 8.2** 2D-Holzkonstruktionen  
Bearbeitungstabelle

	linear	linear	nichtlinear	nichtlinear
analytisch	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit starrer Verbundfuge Bearbeitung: J. McGlenn, B.J. Hartz, S.K. Kireannan, C.W. Bert, V.S. Reddy, u.w.	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit nachgiebiger Verbundfuge	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit starrer Verbundfuge GNL, MNL, GMNL siehe Literatur	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit nachgiebiger Verbundfuge GNL, MNL, GMNL
numerisch	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit starrer Verbundfuge FE-Methode: ABAQUS Vers. 5.2 Programm VERBUND2D - siehe Anhang A	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit nachgiebiger Verbundfuge Programm VERBUND2D - siehe Anhang A	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit starrer Verbundfuge GNL, MNL, GMNL FE-Methode: ABAQUS Vers. 5.2	geschichtete 2D-Holzkonstruktion mit nachgiebiger Verbundfuge GNL, MNL, GMNL

### 2D-Verbund

Das vorliegende lineare Modell einer 2D-Holzstruktur mit nachgiebiger und starrer Verbundfuge ist vor allem auf versuchstechnischem Wege zu untersuchen und je nach Erfordernis sind Angleichungsfaktoren in die Berechnung einzuführen. Die Berücksichtigung der Nichtlinearität, vor allem das nichtlineare Verhalten der nachgiebigen Verbundfuge, ist in die weiteren Betrachtungen aufzunehmen. Erst auf dieser Basis wird eine Diskretisierung in der Form der FE-Methode angestrebt, um damit eine allgemeine Problemformulierung zu ermöglichen.



**Tabelle 8.3** Allgemein flächige Holzstrukturen - Schalenträgerwerke aus Holz  
Bearbeitungstabelle

	linear	linear	nichtlinear	nichtlinear
analytisch	geschichtete Schale mit starrer Verbundfuge  siehe Literatur	geschichtete Schale mit nachgiebiger Verbundfuge  keine umfassende Bearbeitung bekannt	geschichtete Schale mit starrer Verbundfuge GNL, MNL, GMNL siehe Literatur	geschichtete Schale mit nachgiebiger Verbundfuge GNL, MNL, GMNL keine umfassende Bearbeitung bekannt
numerisch	geschichtete Schale mit starrer Verbundfuge  FE-Methode: ABAQUS Vers. 5.2 'composite-shell-element'	geschichtete Schale mit nachgiebiger Verbundfuge  keine umfassende Bearbeitung bekannt	geschichtete Schale mit starrer Verbundfuge GNL, MNL, GMNL FE-Methode: ABAQUS Vers. 5.2 'composite-shell-element'	geschichtete Schale mit nachgiebiger Verbundfuge GNL, MNL, GMNL  keine umfassende Bearbeitung bekannt

### Schalenträgerwerke aus Holz

Schalenträgerwerke aus Holz sind wie die obig behandelten 2D-Holzstrukturen ebenfalls aus mehreren Schichten - starr oder nachgiebig miteinander verbunden - aufgebaut. Gewöhnlich hat man es mit zwei bis fünf Einzelschichten zu tun. Eine der ersten Holzschalen war der im Jahre 1908 erbaute Flugzeughangar in Riga, bestehend aus Teilen zweilagiger Kugelkalotten. Seither sind eine Vielzahl an geschichteten Schalenträgerwerken aus Holz - besonders in den 70iger Jahren - entstanden. Die Dimensionierung und Nachweisführung dieser Schalen erfolgte zumeist über Näherungsberechnungen und Modellversuche. Es sind auch Veröffentlichungen bekannt, in welchen über die FE-Methode eine Modellierung und Berechnung versucht wird. Das vorrangige Problem lag und liegt aber noch immer in einer richtigen Formulierung der Verbundfuge. Hier muß man unbedingt zwischen der starren und nachgiebigen Verbundfuge unterscheiden. Hat man es mit einer starren Verbundfuge zu tun - wie auch in dieser Arbeit für die Schale behandelt - ist es möglich, dem Schichtaufbau und dem anisotropen Werkstoffverhalten entsprechend, eine Modellierung zu entwickeln und basierend darauf eine FE-Berechnung vorzunehmen. Für die meisten diesbezüglichen Ingenieurbauten ist dies aber unzulänglich, da aus transport- und montage-technischen Gründen zumeist eine mechanische Verbindung der Einzelschichten - nachgiebige Verbundfuge - vor Ort maßgebend ist. Wie in dieser Arbeit für die 2D-Holzkonstruktionen, ist es auch für geschichtete Schalenträgerwerke aus Holz erforderlich, dem exakten Aufbau - Berücksichtigung der Schichtorientierung - und dem Verhalten der nachgiebigen Verbundfuge entsprechend, eine Modellformulierung zu entwickeln. Basierend darauf ist es dann möglich, nach versuchstechnischer Abklärung eine Diskretisierung vorzunehmen, worin den vorgenannten Punkten Rechnung getragen wird.





---

# 9.

## Literatur

---

### Bücher

---

- [1]  
Ashton, J.E., Whitney, J.M.: 'Theory of Laminated Plates', Technomic Publishing Company, Inc., Stamford, 1970.
- [2]  
Christensen, R.M.: 'Mechanics of Composite Materials', Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1991.
- [3]  
Ehlbeck, J., Steck, G.: 'Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis', Bruderverlag Karlsruhe, 1982.
- [4]  
Flügge, W.: 'Statik und Dynamik der Schalen', Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.
- [5-1]  
Girkmann, K.: 'Flächentragwerke', Springer-Verlag, Wien, 1963.
- [5-2]  
Gordon, J.E.: 'The Science of Structures and Materials', Scientific American Library, New York, 1988.
- [6]  
Halász, R. von, Scheer, C.: 'Holzbau-Taschenbuch', Wilhelm Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 1986.
- [7]  
Hughes, T.J.R.: 'The Finite Element Method', Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1987.
- [8]  
Kollmann, F.F.P., Kuenzi, E.W., Stamm, A.J.: 'Principles of Wood Science and Technology' - Part II: Wood Based Materials, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1975.
- [9]  
Kucera, L.J.: 'Xylorama' - Trends in Wood Research, Birkhäuser Verlag, Basel/Bo-

ston/Stuttgart, 1985.

[10]

Lekhnitskii, S.G.: 'Theory of Elasticity of an Anisotropic Body', English Translation, Mir Publishers, Moskau, 1981.

[11]

Moser, K.: 'Faser-Kunststoff-Verbunde' - Entwurfs- und Berechnungsgrundlagen, VDI-Verlag GmbH., Düsseldorf, 1992.

[12]

Paulitsch, M.: 'Moderne Holzwerkstoffe', Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/London/Paris/Tokyo, 1989.

[13]

Puck, A., Wurtinger, H.: 'Werkstoffgemäße Dimensionierungs-Größen für den Entwurf von Bauteilen aus kunstharzgebundenen Glasfasern' - Teil 1 und 2, Westdeutscher Verlag, Köln/Opladen, 1963.

[14]

Schniewind, A.P.: 'Wood & Wood-Based Materials', Pergamon Press, Oxford/New York/Beijing/Frankfurt/Sao Paulo/Sydney/Tokyo/Toronto, 1989.

[15]

Timoshenko, S.: 'Theory of Plates and Shells', McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1940.

[16]

Tsai, S.W., Hahn, H.T.: 'Introduction to Composite Materials', Technomic Publishing Company, Inc., Lancaster, 1980.

[17]

Vinson, J.R., Sierakowski, R.L.: 'The Behavior of Structures Composed of Composite Materials', Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1987.

[18]

Wolmir, A.S.: 'Biegsame Platten und Schalen', VEB Verlag für Bauwesen Berlin, 1962.

### Diplomarbeiten & Dissertationen

---

[19]

Kneidl, R.: 'Ein Beitrag zur linearen und nichtlinearen Berechnung von Schichtbalkensystemen', Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau TU München, Dissertation, 1991.

[20]

Lehar, H.: 'Beitrag zur numerischen Behandlung ebener, anisotroper Schichtverbunde mittels der Methode der Finiten Elemente', Institut für Baustatik und verstärkte Kunststoffe, Dissertation, Bericht 3 - 1985.

[21]

Mair, J.: 'Anwendungen ebener Faser-Kunststoff-Verbunde im Holzbau', Institut für Baustatik und verstärkte Kunststoffe, Diplomarbeit, 1987.

[22]

Norlin, B.: 'Two Layered Composite Beams with Nonlinear Connectors and Geometry - Tests and Theory, TRITA-BKN. Bulletin 4, Dissertation, 1993.

[23]

Pischl, R.: 'Die Berechnung zusammengesetzter hölzerner Biegeträger auf Grund

der Elastischen Verbundtheorie', Dissertation, 1966.

[24]

Pischl, R.: 'Zusammenfassende Betrachtung über Verbindungsmittel des Ingenieurholzbaues unter besonderer Berücksichtigung ihrer Nachgiebigkeit', Habilitationsschrift, 1972.

## Seminare & Forschungsberichte

---

[25]

Cziesielski, E., Wagner, C.: 'Dachscheiben aus Brettern', TU Berlin, Institut für Baukonstruktionen und Festigkeit, Forschungsbericht, TU Berlin, 1981.

[26]

Gfeller, B.: 'Holzwerkstoffe am Bau', 19. Fortbildungskurs der SAH, Presse + Information LIGNUM, Zürich, 1987.

[27]

Gudmundson, P., Chrzanowski, M., Hult, J., Nonhoff, G., Rammerstorfer, F.G., Springer, G.: 'Engineering Mechanics of Fibre Reinforced Polymers and Composite Structures', 4th IUTAM Intl. Summer School on Mechanics, Udine, 1993.

[28]

Hughes, T.J.R., Belytschko, T.: 'Nonlinear Finite Element Analysis', A Short Course, Organized by Zace Services Ltd. - ICE Division, Munich, 1992.

[29]

Moser, K.: 'Kunststoffe im Bauwesen - Möglichkeiten der verstärkten Kunststoffe', Seminar TU Graz, 1991.

[30-1]

Möhler, K.: 'Versuche über die zweckmäßige Stoßausbildung von Durchlaufpfetten', Ergebnisse des Forschungsberichtes AZ. 4116, Nr.42 d. BM. f. WB., Seite 15-34.

[30-2]

Natterer, J., Hoefft, M.: 'Zum Tragverhalten von Holz-Beton-Verbundkonstruktionen', Forschungsbericht CERS Nr. 1345, EPFL/IBOIS, Lausanne, 1987.

[31]

Rammerstorfer, F.G., Starlinger, A., Svobodnik, A.: 'Local Effects Influencing the Nonlinear Global Behavior of Composite Shells', Euromech Colloquium 292, Munich Sept. 1992.

## Zeitschriften

---

### Holz als Material

[32]

Aicher, S.: 'Berechnungen zum Spannungs-Verzerrungsverhalten von Brettschichtträgern mit aufgeklebten Bau-Furniersperrholz-Platten bei Klimabeanspruchung', Holz als Roh- und Werkstoff 48, 1990, Seite 53-59.

[33]

Bhatnagar, N.S.: 'Kriechen von Holz bei Zugbeanspruchung in Faserrichtung', Holz als Roh- und Werkstoff 22, 1964, Seite 296-299.

[34]

Buchanan, A.H.: 'Bending Strength of Lumber', Journal of Structural Engineering, Vol.116, No.5, 1990, Page 1213-1229.

[35]

Cizek, L.: 'Einfluß der Feuchtigkeit auf das rheologische Verhalten des Holzes', Holz als Roh- und Werkstoff 26, 1968, Seite 416-417.

[36]

Cramer, S.M., Fohrell, W.B.: 'Method for Simulating Tension Performance of Lumber Members, Journal of Structural Engineering, Vol.116, No.10, 1990, Page 2729-2746.

[37]

Davalos, J.F., Loferski, J.R., Holzer, S.M., Yadama, V.: 'Transverse Isotropy Modeling of 3-D Glulam Timber Beams, Journal of Materials in Civil Engineering, Vol.3, No.2, 1991, Page 125-139.

[38]

Edlund, B.: 'Bruchhypothesen für orthotropes Material', Auszug aus Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis, Bruderverlag Karlsruhe, 1982, Seite 17-22.

[39]

Franco, N., Pellicane, P.J.: 'Three-Dimensional Model for Wood-Pole-Strength Predictions, Journal of Structural Engineering, Vol.119, No.7, 1993, Page 2199-2214.

[40]

Glos, P., Heimeshoff, B.: 'Einfluß der Belastungsdauer auf die Zug- und Druckfestigkeit von Fichten-Brettlamellen', Holz als Roh- und Werkstoff 45, 1987, Seite 243-249.

[41]

Goodman, J.R., Bodig, J.: 'Orthotropic Elastic Properties of Wood', Journal of the Structural Division, Vol.96, No.ST11, 1970, Page 2301-2319.

[42]

Gopu, V.K.A.: 'Validity of Distortion-Energy-Based Strength Criterion for Timber Members', Journal of Structural Engineering, Vol.113, No.12, 1987, Page 2475-2487.

[43]

Gressel, P.: 'Zur Vorhersage des langfristigen Formänderungsverhaltens aus Kurz-Kriechversuchen', Holz als Roh- und Werkstoff 42, 1984, Seite 293-301.

[44]

Gressel, P.: 'Kriechverhalten von Holz und Holzwerkstoffen - Auswirkungen auf den Formänderungsnachweis', Auszug aus Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis, Bruderverlag Karlsruhe, 1982, Seite 55-66.

[45]

Kühne, H.: 'Beitrag zur Theorie des mechanischen Formänderungsverhaltens von Holz', Holz als Roh- und Werkstoff 19, 1961, Seite 81-82.

[46]

Tan, S.C., Cheng, S.: 'Failure Criteria for Fibrous Anisotropic Materials', Journal of Materials in Civil Engineering, Vol.5, No.2, 1993, Page 198-211.



**Kunststoff als Material**

[47]

Burk, R.C.: 'Standard Failure Criteria Needed For Advanced Composites', *Astronautics & Aeronautics*, 1983, Page 58-62.

[48]

Cordell, T.M.: 'The Cordell Plot: A Way to Determine Composite Properties', *SAMPE Journal*, 1977, Page 14-19.

[49]

Desserich, G., Rösli, A., Meier, U.: 'Flächentragwerke aus Faserverbundwerkstoffen' - Teil 1: Elastische Spannungs- und Verformungsanalyse, *Schweizer Ingenieur und Architekt* 44/84, Seite 855-861.

[50]

Fritzsche, C.: 'Die Poissonzahl als Umrechnungsgröße zwischen Elastizitäts- und Torsionsmodul', *Kunststoffe - Plastics* 21, Nr.6, 1974, Seite 19-22.

[51]

Glenz, W.: 'Verbundwerkstoffe', *Kunststoffe* 80, Nr.3, 1990, Seite 442-446.

[52]

Hashin, Z.: 'Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites', *Journal of Applied Mechanics*, Vol.47, 1980, Page 329-334.

[53]

Herrmann, A.S., Hanselka, H., Haben, W.: 'Faserverbundwerkstoffe am Rechner komponieren', *Kunststoffe* 82, Nr.6, 1992, Seite 494-498.

[54]

Krevelen van, D.W.: 'Verbundwerkstoffe (Composites)', *Kunststoffe* 37, Nr.4, 1984, Seite 295-302.

[55]

McMullen, P.: 'Fibre/resin composites for aircraft primary structures: a short history, 1936 - 1984', *Composites*, Vol.15, No.3, 1984, Page 222-230.

[56]

Puck, A.: 'Faser-Kunststoff-Verbunde mit Dehnungs- oder Spannungs-Kriterien auslegen?', *Kunststoffe* 82, Nr.5, 1992, Seite 431-434.

[57]

Puck, A.: 'Praxisgerechte Bruchkriterien für hochbeanspruchte Faser-Kunststoff-Verbunde', *Kunststoffe* 82, Nr.2, 1992, Seite 149-155.

[58]

Puck, A.: 'Ein Bruchkriterium gibt die Richtung an', *Kunststoffe* 82, Nr.7, 1992, Seite 607-610.

[59]

Rose, P.: 'Hochfeste, hochsteife Kohlenstofffasern - Herstellung, Eigenschaften und Anwendung', *Chemiefasern/Textilindustrie* 28/80, 1978, Seite 531-536.

[60]

Schwarz, P., Müller, U., Fritz, U.: 'Faserorientierung bestimmt Werkstoffeigenschaften', *Kunststoffe* 82, Nr.3, 1992, Seite 239-242.

[61]

Sprenger, K.H.: 'Gelegekomplexe - eine Alternative zum Verstärken von Hochleistungsverbundwerkstoffen', *Kunststoffe* 78, 1988, Seite 1197-1200.

[62]

Tsai, S.W., Wu, E.M.: 'A General Theory of Strength for Anisotropic Materials', *Journal of Composite Materials*, Vol.5, 1971, Page 58-80.

[63]

Weber, A., Wilhelm, W.: 'Anisotropie als Prinzip bei der Entwicklung neuer Kunststoffe und bei der Konstruktion von Bauteilen', *Kunststoffe* 79, Nr.11, 1989, Seite 1222-1227.

### Stiff förmige Verbindungstechnik im Holzbau

[64]

Call, R.D., Bjorhovde, R.: 'Wood Connections with Heavy Bolts and Steel Plates', *Journal of Structural Engineering*, Vol.116, No.11, 1990, Page 3090-3107.

[65]

Cramer, S.M., Shrestha, D., Fohrell, W.B.: 'Theoretical Consideration of Metal-Plate-Connected Wood-Splice Joints', *Journal of Structural Engineering*, Vol.116, No.12, 1990, Page 3458-3474.

[66]

Behr, R.A., Goodspeed, C.H., Yari, N.: 'Shear Connector Design for Composite Flexural Members', *Journal of Structural Engineering*, Vol.115, No.2, 1989, Page 483-489.

[67]

Blaß, H.J., Colling, F., Eberhart, O., Gerold, M., Görlacher, R., Hättich, R., Kürth, J., Müller, P., Schlager, M., Siebert, W., Wenz, J., Werner, H.: 'Lehre, Forschung und Materialprüfung Teil 2, bauen mit Holz 10, 1990, Seite 730-739.

[68]

Blaß, H.J.: 'Zum Einfluß der Nagelanzahl auf die Tragfähigkeit von Nagelverbindungen, bauen mit Holz 1, 1991, Seite 21-26.

[69]

Blaß, H.J., Werner, H.: 'Stabdübelverbindungen mit verstärkten Anschlußbereichen', *bauen mit Holz* 9, 1988, Seite 601-607.

[70]

Bröker, F.W., Blaik, U.: 'Untersuchungen über die Zug- und Druckfestigkeiten verklebter Hölzer', *Holz als Roh- und Werkstoff* 44, 1986, Seite 143-149.

[71]

Bröker, F.W., Meierhofer, U.A., Radovic, B.: 'Einfluß der Probengröße auf die Druckscherfestigkeiten würfelförmiger Fichtenholzproben', *Holz als Roh- und Werkstoff* 45, 1987, Seite 445-448.

[72]

Davalos-Sotelo, R., Pellicane, P.J.: 'Bolted Connections in Wood under Bending/Tension Loading', *Journal of Structural Engineering*, Vol.118, No.4, 1992, Page 999-1013.

[73]

Egner, K., Kolb, H.: 'Über den Einfluß der Querschnittschwächung durch Drahtstifte auf die Tragfähigkeit hölzerner Bauteile', *Mitteilung aus dem Otto-Graf-Institut in Stuttgart, Abteilung Holz, Glas und Kunststoffe*, Seite 69-73.

[74]

Ehlbeck, J.: 'Dauerschwingfestigkeit von Holz und Holzverbindungen - eine Bestandsaufnahme',

[75]

Ehlbeck, J., Werner, H.: 'Untersuchungen über die Tragfähigkeit von Stabdübelverbindungen', *Holz als Roh- und Werkstoff* 46, 1988, Seite 281-288.

[76]

Ehlbeck, J., Siebert, W.: 'Tragverhalten von Nagelverbindungen bei gleichzeitiger Beanspruchung auf Abscheren und Ausziehen', *Holzbau-Statik-Aktuell* 10, 1988, Seite 11-15.

[77]

Görlacher, R.: 'Die Ausziehwidstandsmessung', *bauen mit holz* 12/90, Seite 904-908.

[78]

Hunt, R.D., Bryant, A.H.: 'Laterally Loaded Nail Joints in Wood', *Journal of Structural Engineering*, Vol.116, No.1, 1990, Page 111-124.

[79]

Meyer, A.: 'Die Tragfähigkeit von Nagelverbindungen bei statischer Belastung', *Holz als Roh- und Werkstoff* 15, 1957, Seite 96-109.

[80]

McLain, T.E., Thangjitham, S.: 'Bolted Wood-Joint Yield Model', *Journal of Structural Engineering*, Vol.109, No.8, 1983, Page 1820-1835.

[81]

Natterer, J., Sigrist, C.: 'Verbindungstechniken im konstruktiven Holzbau', *bauen mit holz* 3, 1987, Seite 152-157.

[82]

Noren, B.: 'Zur Rheologie der Holzverbände', *Holz als Roh- und Werkstoff* 19, 1961, Seite 93-99.

[83]

Scharr, G.: 'Beitrag zur Torsionselastizität von Hölzern in Abhängigkeit von der Holztemperatur und der Belastungszeit', *Holz als Roh- und Werkstoff* 44, 1986, Seite 57-60.

[84]

Steck, G.: 'Relaxationsversuche mit Brettschichtholzproben unter Querdruckbeanspruchung infolge Feuchtezunahme', *Holz als Roh- und Werkstoff* 45, 1987, Seite 137-140.

[85]

Wilkinson, T.L.: 'Bolted Connection Design Values Based on European Yield Model', *Journal of Structural Engineering*, Vol.119, No.7, 1993, Page

[86]

Whale, L.R.J., Smith, I., Larsen, H.J.: 'Design of Nailed and Bolted Joints Proposals for the Revision of Existing Formulae in Draft Eurocode 5 and the CIB Code', *CIB-W18A/20-7-1*, 1987, Seite 1-36.

[87]

Zahn, J.J.: 'Design Equation for Multiple-Fastener Wood Connections', *Journal of Structural Engineering*, Vol.117, No.11, 1991, Page 3477-3486.

## **2D-Verbund & Plattentheorie**

[88]

Chen, Y.N., Cicero, F., Kempner, J.: 'Refinements in the Approximate Analysis of Web-Stiffened Sandwich Structures', *Journal of Applied Mechanics*, 1973, Page 992-996.

[89]

Falk, R.H., Itani, R.Y.: 'Finite Element Modeling of Wood Diaphragms', *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, No.3, 1989, Page 543-559.

[90]



Kincannon, S.K., Bert, C.W., Reddy, V.S.: 'Cross-Ply Elliptic Plates of Bimodulus Material', Journal of the Structural Division, Vol.106, No.ST7, 1980, Page 1437-1449.

[91]

Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M.: 'A High-Order Theory of Plate Deformation' - Part 1: Homogeneous Plates, Journal of Applied Mechanics, 1977, Page 663-668.

[92]

Lo, K.H., Christensen, R.M., Wu, E.M.: 'A High-Order Theory of Plate Deformation' - Part 2: Laminated Plates, Journal of Applied Mechanics, 1977, Page 669-676.

[93]

McGlenn, J., Hartz, B.J.: 'Finite Element Analysis of Plywood Plates', Journal of the Structural Division, Vol.94, No.ST2, 1968, Page 551-563.

[94]

Mindlin, R.D.: 'Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates', Journal of Applied Mechanics, 1951, 31-38.

[95]

Reissner, E.: 'The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates', Journal of Applied Mechanics, 1945, Page A69-A77.

[96]

Reissner, E.: 'Upper and Lower Bounds for Deflections of Laminated Cantilever Beams Including the Effect of Transverse Shear Deformation', Journal of Applied Mechanics, 1973, Page 988-991.

[97]

Whitney, J.M., Pagano, N.J.: 'Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates', Journal of Applied Mechanics, 1970, Seite 1031-1036.

[98]

Wörndle, R., Mang, H.: 'Schubübertragungsverhalten bei inhomogenen, orthotropen Querschnitten', Kunststoffe 73, 1983, Seite 377-382.

### 1D-Verbund

[99]

Bohnhoff, D.R., Cramer, S.M., Moody, R.C., Cramer, C.O.: 'Modeling Vertically Mechanically Laminated Lumber', Journal of Structural Engineering, Vol.115, No.10, 1989, Page 2661-2679.

[100]

Girhammar, U.A., Gopu, V.K.A.: 'Composite Beam-Columns with Interlayer Slip - Exact Analysis', Journal of Structural Engineering, Vol.119, No.4, 1993, Page 1265-1282.

[101]

Goodman, J.R., Popov, E.P.: 'Layered Beam Systems with Interlayer Slip', Journal of the Structural Division, Vol.94, No.11, ST11, 1968, Page 2535-2547.

[102]

Itani, R.Y., Hiremath, G.S., Hoyle, R.J.: 'Parameters Influencing Behavior of Diaphragms', Journal of Structural Engineering, Vol.109, No.2, 1983, Page 369-385.

[103]

Rao, K.M., Ghosh, B.G.: 'Exact Analysis of Unsymmetric Laminated Beam', Journal of the Structural Division, Vol.105, No.ST11, 1979, Page 2313-2325.



[104]

Thompson, E.G., Goodman, J.R., Vanderbilt, M.D.: 'Finite Element Analysis of Layered Wood Systems', Journal of the Structural Division, Vol.101, No.ST12, 1975, Page 2659-2672.

[105]

Wheat, D.L., Vanderbilt, M.D., Goodman, J.R.: 'Wood Floors with Nonlinear Nail Stiffness', Journal of the Structural Engineering, Vol.109, No.5, 1983, Page 1290-1302.

#### Schalentragwerke

[106]

Barzegar, F.: 'Analysis of RC Membrane Elements with Anisotropic Reinforcement', Journal of Structural Engineering, Vol.115, No.3, 1989, Page 647-665.

[107]

Di, S., Cheung, Y.K.: 'Nonlinear Analysis of RC Shell Structures Using Laminated Element', Journal of Structural Engineering, Vol.119, No.7, 1993, Page 2059-2073.

[108]

Egner, K., Kolb, H., Krauss, F.: 'Modellversuch für ein Holzschalendach', Holz als Roh- und Werkstoff 24/8, 1966, Seite 353-362.

[109]

Ibrahim, I.M., Monforton, G.R.: 'Finite Strip Laminated Sandwich Roof Analysis', Journal of the Structural Division, Vol.105, No.ST5, 1979, Page 905-919.

[110]

Moss, P.J., Carr, A.J., Cree-Brown, N.C.: 'Nonlinear Layered Timber Cylindrical Shells', Journal of the Structural Division, Vol.105, No.ST10, 1979, Page 2019-2033.

[111]

Pecknold, D.A., Schnobrich, W.C.: 'Finite-Element Analysis of Skewed Shallow Shells', Journal of the Structural Division, Vol.95, No.ST4, 1969, Page 715-733.

[112]

Rossmann, W.E.: 'Netzschalen aus Holz für große Spannweiten', Schweizer Ingenieur und Architekt 25/83, Seite 696-702.

[113]

Roth, von, R.: 'Genauigkeitsuntersuchungen zur Berechnung von Holzschalentragwerken am Beispiel einer Hyparschale', Auszug aus Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis, Bruderverlag Karlsruhe, 1982, Seite 197-205.

[114]

Simmonds, S.H.: 'Effect of Support Movement on Hyperbolic Paraboloid Shells', Journal of Structural Engineering, Vol.115, No.1, 1989, Page 19-31.

[115]

Walford, G.B., Moss, P.J.: 'Tests on Nailed and Glued Layered Timber Cylindrical Shells', Journal of the Structural Division, Vol.106, No.ST1, 1980, Page 247-263.

#### 1D-Verbund - Verstärkungsmaßnahmen

[116]

Bulleit, W.M., Sandberg, L.B., Woods, G.J.: 'Steel-Reinforced Glued Laminated Timber', Journal of Structural Engineering, Vol.115, No.2, 1989, Page 433-444.

[117]

Triantafillou, T.C., Deskovic, N.: 'Prestressed FRP Sheets as External Reinforce-

ment of Wood Members', Journal of Structural Engineering, Vol.118, No.5, 1992, Page 1270-1284.

### Allgemeines

[118]

Carney, J.M.: 'Bibliography on Wood and Plywood Diaphragms', Journal of the Structural Division, Vol.101, No.ST11, 1975, Page 2423-2436.

[119]

Chajes, A., Churchill, J.E.: 'Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods', Journal of Structural Engineering, Vol.113, No.6, 1987, Page 1221-1235.

[120]

Möhler, K.: 'Versuche mit geleimten Holzbiegeträgern mit Holzfaserverleimungen', Mitteilung aus der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der TH Karlsruhe, Seite 49-53.

[121]

Peterson, J.: 'Bibliography on Lumber and Wood Panel Diaphragms', Journal of Structural Engineering, Vol.109, No.12, 1983, Page 2838-2852.

### EDV

---

[122]

ABAQUS Manuals Version 4.8, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Providence, Rhode Island, 1989.

[123]

ABAQUS Manuals Version 5.2, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Providence, Rhode Island, 1992.

[124]

APL 68000 & Micro APL Version 6.0, 1986.

---

# A.

## Anhang

---

### Programmlisting VERBUND2D

---

Das APL-Programm VERBUND2D besteht aus den folgenden sieben Programmteilen. Es ist mit diesem Programm möglich, den nachgiebigen Verbund zwischen geschichteten, flächigen Holzstrukturen zu erfassen.

- HOLZVERBUND

```
HOLZVERBUND INPNSNMN
A
A Preprocessor
XPRE INPNSNMN
A
A Mainprocessor
UMN←(5,NS,0)ρ0
SMN←(8,NS,0)ρ0
DUMN←(3,(NS-1),0)ρ0
DTMN←(3,(NS-1),0)ρ0
A
J←0
ZZ:J←J+1
MM←M[J]
NN←N[J]
PP←P[Z[J]]
XMAIN
→(J<NMN)/ZZ
A
A Postprocessor
P←(1+NTB,NTA)ρ0
U←(5,NS,1+NTB,NTA)ρ0
S←(8,NS,1+NTB,NTA)ρ0
```

```

DU←(3,(NS-1),1+NTB,NTA)ρ0
DT←(3,(NS-1),1+NTB,NTA)ρ0
XI←(0,1NTA)÷NTA
ETA←(0,1NTB)÷NTB
A
J←0
ZZZ:J←J+1
MM←M[J]
NN←N[J]
PP←PZ[J]
XPOST J
→(J<NMN)/ZZZ
A
EXIT:

```

• XPRE

```

XPRE INPNSNMN;XX;XXX
A
NS←INPNSNMN[1] ◊ NMN←INPNSNMN[2]
NTA←1↑2↓4↑INPNSNMN,4 4
NTB←-1↑2↓4↑INPNSNMN,4 4
A←1↑Δ,INPGEO[1;] ◊ B←1↑1↓Δ,INPGEO[1;]
A
A *** INPUT LASTEN ***
XX←INPLAST[1NMN;]
XXX←0 3ρ0 ◊ I←0
ZZ1:I←I+1
XXX←XXX,9↑Δ,XX[I;]
→(I<NMN)/ZZ1
A
M←,XXX[;1]
N←,XXX[;2]
PZ←,XXX[;3]
A
A *** INPUT LAMINATE ***
XX←INPLAM[1NS;]
XXX←0 9ρ0 ◊ I←0
ZZ2:I←I+1
XXX←XXX,9↑Δ,XX[I;]
→(I<NS)/ZZ2
A
ALFAL←,XXX[;1]
TL←,XXX[;2]
CL←0 2↓XXX
A
→(NS≤1)/EXIT
A *** INPUT FUGEN ***
XX←INPFUG[1NS-1;]
XXX←0 4ρ0 ◊ I←0

```



```

ZZ3:I<I+1
XXX<XXX,4↑↓,XX[I;]
→(I<NS-1)/ZZ3
A
ALFAF<,XXXI;1]
CF<0 1↓XXX
A
EXIT:

```

• XMAIN

```

XMAIN
A
A Initialisieren
NS1<NS-1
UMN<UMN,(5,NS,0)ρ0
SMN<SMN,(8,NS,0)ρ0
DUMN<DUMN,(3,NS1,0)ρ0
DTMN<DTMN,(3,NS1,0)ρ0
KSYS<(2ρ5xNS)ρ0
RSYS<(5xNS)ρ0
XSYS<(5xNS)ρ0
A
A Plattenmatrix einbauen
JJJ<0 ◊ BMAT<BMATRIX
Z100:JJJ<JJJ+1
KMAT<(BMAT)+.x(CMAT<CMATRIX JJJ)+.xBMAT
KSYS[(5xJJJ-1)+15;(5xJJJ-1)+15]←KMAT
→(JJJ<NS)/Z100
A
→(NS≤1)/CONTINUE
A Fugenmatrix einbauen
ISIGN<1
JJJ<0
Z200:JJJ<JJJ+1
FMAT<0 FMATRIX JJJ
KSYS[(5xJJJ-1)+110;(5xJJJ-1)+110]←KSYS[(5xJJJ-1)+110;
(5xJJJ-1)+110]+ISIGN×FMAT
→(JJJ<NS-1)/Z200
A
CONTINUE:
A Gleichungssystem loesen
RSYS[3]←-PP
XSYS<RSYSBKSYS
A
A Verformungsamplituden einordnen
UMN<UMN,UUMN<(NS,5)ρXSYS

```

```

A
A Schnittkraftamplituden berechnen + einordnen
SSMN←(8,NS)ρ0
JJJ←0
Z101:JJJ←JJJ+1
SSMN[;JJJ]←(CMATRIX JJJ)+.xBMAT+.xUUMN[;JJJ]
→(JJJ<NS)/Z101
SMN←SMN,SSMN
A
→(NS≤1)/EXIT
A Fugenverformungsamplituden berechnen + einordnen
DUUMN←(3,NS-1)ρ0
DTTMN←(3,NS-1)ρ0
JJJ←0
Z201:JJJ←JJJ+1
DUUMN[;JJJ]←(2 FMATRIX JJJ)+.x,DUUMN[;0 1+JJJ]
A
A Fugenkraftamplituden berechnen + einordnen
DTTMN[;JJJ]←(1 FMATRIX JJJ)+.xDUUMN[;JJJ]
A
→(JJJ<NS-1)/Z201
DUMN←DUMN,DUUMN
DTMN←DTMN,DTTMN
A
EXIT:

```

• BMATRIX

```

MAT←BMATRIX
A
MAT←5 8ρ0
MPIA←oMM÷A
NPIB←oNN÷B
A
MAT[1;1]←MPIA
MAT[1;3]←-NPIB
MAT[2;2]←NPIB
MAT[2;3]←-MPIA
MAT[3;7]←-MPIA
MAT[3;8]←-NPIB
MAT[4;4]←MPIA
MAT[4;6]←-NPIB
MAT[4;7]←-1
MAT[5;5]←NPIB
MAT[5;6]←-MPIA
MAT[5;8]←-1
MAT←-MAT
EXIT:

```

• CMATRIX

```

CC←CMATRIX JS;f;c;s;c2;s2;cs
A
A ELASTISCHE ORTHOTROPE 2D MATERIALMATRIX
alfa←ALFAL[JS]
h←TL[JS]
Exx←CL[JS;1]
Eyy←CL[JS;2]
vxy←CL[JS;3]
vyx←CL[JS;4]
Gxy←CL[JS;5]
Gxz←CL[JS;6]
Gyz←CL[JS;7]
A
A IN LOKALEN KOORDINATEN (ANISOTROPE HAUPTRICHTUNGEN)
Q←5 5ρ0
f←1-vxy×vyx
Q[1;1]←Exx
Q[1;2]←Q[2;1]←0.5×(vxy×Exx)+vyx×Eyy
Q[2;2]←Eyy
Q[1 2;1 2]←Q[1 2;1 2]÷f
Q[3;3]←Gxy
AAAA AENDERUNG AM 29.1.1993 (x UND y VERTAUSCHT)
Q[4;4]←Gxz
Q[5;5]←Gyz
AAAA AENDERUNG AM 29.1.1993
A
A TRANSFORMATION
TTMAT←5 5ρ0
c←200alfa÷180 ◊ s←100alfa÷180 ◊ c2←cxc ◊ s2←sxs ◊ cs←cxs
TTMAT[1 2;1 2]←2 2ρc2,s2,s2,c2
TTMAT[1 2;3]←1 -1×cs
TTMAT[3;1 2]←-1 1×2×cs
TTMAT[3;3]←c2-s2
TTMAT[4 5;4 5]←2 2ρc,(-s),s,c
A
A IN GLOBALEN X,Y KOORDINATEN
QMAT←(TTMAT)+.xQ+.xTTMAT
A
A FUER DIE GESAMTE SCHICHT
CC←8 8ρ0
CC[13;13]←h×QMAT[13;13]
CC[3+13;3+13]←(h×h×h÷12)×QMAT[13;13]
CC[7 8;7 8]←h×QMAT[4 5;4 5]
A
EXIT:

```

• FMATRIX

```

FF←INDIC FMATRIX JF
A ;alfa;cx;cy;cz;h2;hk2;c;s
A
alfa←ALFAF[JF]
cx←CF[JF;1]
cy←CF[JF;2]
cz←CF[JF;3]
h2←0.5×TL[JF] ◊ hk2←0.5×TL[JF+1]
A
TKMAT←3 10ρ0
TKMAT[1;1]←TKMAT[2;2]←TKMAT[3;3]←1
TKMAT[1;6]←TKMAT[2;7]←TKMAT[3;8]←-1
TKMAT[1;4]←TKMAT[2;5]←-h2
TKMAT[1;9]←TKMAT[2;10]←-hk2
A
A 1. INDIC = 0 ..... STEIFIGKEIT
A 2. INDIC = 1 ..... KRAEFTE (CKMAT+.xTKMAT)
A 3. INDIC = 2 ..... VERSCHIEBUNGEN (TKMAT)
A
Δ(INDIC≥2) / 'FF←TKMAT ◊ →EXIT'
A
s←100alfa÷180 ◊ c←200alfa÷180
cmat←3 3pcx,0 0 0,cy,0 0 0,cz
tmat←3 3pc,s,0,(-s),c,0 0 0 1
CKMAT←(tmat)+.xcmat+.xtmat
A
Δ(INDIC=1) / 'FF←CKMAT ◊ →EXIT'
A
FF←(tTKMAT)+.xCKMAT+.xTKMAT
A
EXIT:

```

• XPOST

```

XPOST J
A
SS←(100NN×ETA) ◊ .x(100MM×XI)
SC←(200NN×ETA) ◊ .x(100MM×XI)
CS←(100NN×ETA) ◊ .x(200MM×XI)
CC←(200NN×ETA) ◊ .x(200MM×XI)
A
P[;]←P[;]+PP×SS
A
JJ←0
ZZZ:JJ←JJ+1

```



```

U[1;JJ;;]←U[1;JJ;;]+UMN[1;JJ;J]×CS
U[2;JJ;;]←U[2;JJ;;]+UMN[2;JJ;J]×SC
U[3;JJ;;]←U[3;JJ;;]+UMN[3;JJ;J]×SS
U[4;JJ;;]←U[4;JJ;;]+UMN[4;JJ;J]×SC
U[5;JJ;;]←U[5;JJ;;]+UMN[5;JJ;J]×CS
A
S[1;JJ;;]←S[1;JJ;;]+SMN[1;JJ;J]×SS
S[2;JJ;;]←S[2;JJ;;]+SMN[2;JJ;J]×SS
S[3;JJ;;]←S[3;JJ;;]+SMN[3;JJ;J]×CC
S[4;JJ;;]←S[4;JJ;;]+SMN[4;JJ;J]×SS
S[5;JJ;;]←S[5;JJ;;]+SMN[5;JJ;J]×SS
S[6;JJ;;]←S[6;JJ;;]+SMN[6;JJ;J]×CC
S[7;JJ;;]←S[7;JJ;;]+SMN[7;JJ;J]×CS
S[8;JJ;;]←S[8;JJ;;]+SMN[8;JJ;J]×SC
→(JJ<NS)/ZZZZ
A
→(NS≤1)/EXIT
JJ←0
ZZZZ:JJ←JJ+1
DU[1;JJ;;]←DU[1;JJ;;]+DUMN[1;JJ;J]×CS
DU[2;JJ;;]←DU[2;JJ;;]+DUMN[2;JJ;J]×SC
DU[3;JJ;;]←DU[3;JJ;;]+DUMN[3;JJ;J]×SS
A
DT[1;JJ;;]←DT[1;JJ;;]+DTMN[1;JJ;J]×CS
DT[2;JJ;;]←DT[2;JJ;;]+DTMN[2;JJ;J]×SC
DT[3;JJ;;]←DT[3;JJ;;]+DTMN[3;JJ;J]×SS
→(JJ<NS-1)/ZZZZ
A
EXIT:

```

## Programmlisting VERBUND1D

---

### Reduktion von VERBUND2D

Aus dem Programm VERBUND2D läßt sich durch Reduktion der Zusammenhänge auf den geschichteten Balken schließen. Es ergibt sich somit das Programm VERBUND1D. Mit diesem Programm wurden Kontrollberechnungen durchgeführt. Diese sind im Kapitel 7 dargestellt.

- HOLZVERBUND

```
HOLZVERBUND INPNSNMN
A
A Preprocessor
XPRES INPNSNMN
A
A Mainprocessor
NS1←NS-1
UMN←(3,NS,0)ρ0
SMN←(3,NS,0)ρ0
DUMN←(2,(NS1),0)ρ0
DTMN←(2,(NS1),0)ρ0
A
J←0
ZZ:J←J+1
MM←M[J]
PP←PZ[J]
XMAIN
→(J<NMN)/ZZ
A
A Postprocessor
P←(1+NTA)ρ0
U←(3,NS,1+NTA)ρ0
S←(3,NS,1+NTA)ρ0
DU←(2,(NS-1),1+NTA)ρ0
DT←(2,(NS-1),1+NTA)ρ0
XI←(0,1NTA)÷NTA
A
J←0
ZZZ:J←J+1
MM←M[J]
PP←PZ[J]
XPOST J
→(J<NMN)/ZZZ
A
EXIT:
```

• XPRE

```

XPRE INPNSNMN;XX;XXX
A
NS<INPNSNMN[1] ◊ NMN<INPNSNMN[2]
NTA<~1↑3↑INPNSNMN,4 A default = 4 Teile
A<1↑↓,INPGEO[1;] ◊ B<1↑1↓↓,INPGEO[1;]
A
A *** INPUT LASTEN ***
XX<INPLAST[1NMN;]
XXX<0 2ρ0 ◊ I<0
ZZ1:I<I+1
XXX<XXX,2↑↓,XX[I;]
→(I<NMN)/ZZ1
A
M<,XXX[;1]
PZ<,XXX[;2]
A
A *** INPUT LAMINATE ***
XX<INPLAM[1NS;]
XXX<0 3ρ0 ◊ I<0
ZZ2:I<I+1
XXX<XXX,3↑↓,XX[I;]
→(I<NS)/ZZ2
A
TL<,XXX[;1]
CL<0 1↓XXX
A
A *** INPUT FUGEN ***
→(0=NS-1)/EXIT
XX<INPFUG[1NS-1;]
XXX<0 2ρ0 ◊ I<0
ZZ3:I<I+1
XXX<XXX,2↑↓,XX[I;]
→(I<NS-1)/ZZ3
A
CF<XXX
A
EXIT:

```

• XMAIN

```

XMAIN
A
A Initialisieren
KSYS<(2ρ3×NS)ρ0
RSYS<(3×NS)ρ0
XSYS<(3×NS)ρ0
A

```

```

A Plattenmatrix einbauen
JJJ<0
Z100:JJJ<JJJ+1
BMAT<BMATRIX 0
BMATT<BMATRIX 1
CMAT<CMATRIX JJJ
KMAT<BMATT+.xCMAT+.xBMAT
KSYS[(3xJJJ-1)+13;(3xJJJ-1)+13]<KMAT
→(JJJ<NS)/Z100
A
A Fugenmatrix einbauen
→(0=NS-1)/CONTINUE
JJJ<0
Z200:JJJ<JJJ+1
FMAT<0 FMATRIX JJJ
KSYS[(3xJJJ-1)+16;(3xJJJ-1)+16]<KSYS[(3xJJJ-1)+16;(3xJJJ-1)
+16]+FMAT
A
A Gleichungssystem loesen
CONTINUE:
RSYS[2]<-PP
XSYS<RSYS#KSYS
A
A Verformungsamplituden einordnen
UMN<UMN,UUMN<#(NS,3)#XSYS
A
A Schnittkraftamplituden berechnen + einordnen
SSMN<(3,NS)#0
JJJ<0
Z101:JJJ<JJJ+1
SSMNI;JJJ]<(CMATRIX JJJ)+.x(BMATRIX 0)+.xUUMNI;JJJ]
→(JJJ<NS)/Z101
SMN<SMN,SSMN
A
A Fugenverformungsamplituden berechnen + einordnen
DUUMN<(2,NS-1)#0
DTTMN<(2,NS-1)#0
A
→(0=NS-1)/EXIT
A
JJJ<0
Z201:JJJ<JJJ+1
DUUMNI;JJJ]<(2 FMATRIX JJJ)+.x,UUMNI;0 1+JJJ]
A
A Fugenkraftamplituden berechnen + einordnen
DTTMNI;JJJ]<(1 FMATRIX JJJ)+.xDUUMNI;JJJ]
A
→(JJJ<NS-1)/Z201
DUMN<DUMN,DUUMN
DTMN<DTMN,DTTMN
A
EXIT:

```



• BMATRIX

```

MAT<BMATRIX NINDIC
A
MAT<3 3p0
MPIA<0MM÷A
NSIGN<-1 0 1(NINDIC≥1) / 'NSIGN<-1'
A
MAT[1;1]<MPIA
MAT[2;3]<-MPIA
MAT[3;2]<MPIA
MAT[3;3]<NSIGN
1(NINDIC≤0) / 'MAT<MAT'
EXIT:

```

• CMATRIX

```

CC<CMATRIX JS;f;c;s;c2;s2;cs
A
A ELASTISCHE ORTHOTROPE 2D MATERIALMATRIX
A alfa<ALFAL[JS]
h<TL[JS]
Exx<CL[JS;1]
Gxz<CL[JS;2]
A
A IN LOKALEN KOORDINATEN (ANISOTROPE HAUPTRICHTUNGEN)
Q<2 2p0
Q[1;1]<Exx
Q[2;2]<Gxz
A
A TRANSFORMATION
TTMAT<2 2p1 0 0 1
A
A IN GLOBALEN X,Y KOORDINATEN
QMAT<(TTMAT)+.xQ+.xTTMAT
A
A FUER DIE GESAMTE SCHICHT
CC<3 3p0
CC[1;1]<QMAT[1;1]
CC[2;2]<(h×h÷12)×QMAT[1;1]
CC[3;3]<QMAT[2;2]
CC<B×h×CC
A
EXIT:

```

• FMATRIX

```

FF<INDIC FMATRIX JF;alfa;cx;cy;cz;h2;hk2;c;s
A
A alfa<ALFAF[JF]
cx<CF[JF;1]
cz<CF[JF;2]
h2<0.5xTL[JF] ◊ hk2<0.5xTL[JF+1]
A
TKMAT<2 6ρ0
TKMAT[1;1]←TKMAT[2;2]←1
TKMAT[1;3]←-h2
TKMAT[1;4]←TKMAT[2;5]←-1
TKMAT[1;6]←-hk2
A
A 1. INDIC = 0 ..... STEIFIGKEIT
A 2. INDIC = 1 ..... KRAEFTE (CKMAT+.xTKMAT)
A 3. INDIC = 2 ..... VERSCHIEBUNGEN (TKMAT)
A
Δ(INDIC≥2) / 'FF←TKMAT ◊ →EXIT'
A
CKMAT<2 2ρcx,0 0,cz
A
Δ(INDIC=1) / 'FF←CKMAT ◊ →EXIT'
A
FF←(◊TKMAT)+.xCKMAT+.xTKMAT
A
EXIT:

```

• XPOST

```

XPOST J
A
SS<100MMxXI
CC<200MMxXI
A
P[1]←P[1]+PPxSS
A
JJ<0
ZZZ:JJ←JJ+1
U[1;JJ;1]←U[1;JJ;1]+UMN[1;JJ;J]xCC
U[2;JJ;1]←U[2;JJ;1]+UMN[2;JJ;J]xSS
U[3;JJ;1]←U[3;JJ;1]+UMN[3;JJ;J]xCC
A
S[1;JJ;1]←S[1;JJ;1]+SMN[1;JJ;J]xSS
S[2;JJ;1]←S[2;JJ;1]+SMN[2;JJ;J]xSS
S[3;JJ;1]←S[3;JJ;1]+SMN[3;JJ;J]xCC
→(JJ<NS) / ZZZ
A

```

```
→(0=NS-1)/EXIT
A
JJ←0
ZZZZ:JJ←JJ+1
DU[1;JJ;]←DU[1;JJ;]+DUMN[1;JJ;J]×CC
DU[2;JJ;]←DU[2;JJ;]+DUMN[2;JJ;J]×SS
A
DT[1;JJ;]←DT[1;JJ;]+DTMN[1;JJ;J]×CC
DT[2;JJ;]←DT[2;JJ;]+DTMN[2;JJ;J]×SS
→(JJ<NS-1)/ZZZZ
A
EXIT:
```

## Programm HOLZBALKEN - Verbund1D

```

OUTPUT←HOLZBALKEN INPUT;x
A
E←INPUT[1] A E-MODUL
GS←INPUT[2] A SCHUBMODUL
B←INPUT[3] A BREITE
HTOT←INPUT[4] A HOEHE DES GESAMTEN BALKENS
CII←INPUT[5] A SCHICHTSCHUBSTEIFIGKEIT
CQQ←INPUT[6] A SCHICHTQUERSTEIFIGKEIT
NS←INPUT[7] A ANZAHL GLEICHER SCHICHTEN
L←INPUT[8] A LAENGE DES BALKENS
M←INPUT[9] A WELLENZAHL
QM←1↑9↓INPUT,1 A QUERLASTAMPLITUDE
A
H←HTOT÷NS A HOEHE DER EINZELSCHICHT (KONSTANT)
A
CBALKEN←3 3ρ0
CBALKEN[1;1]←E×B×H
CBALKEN[2;2]←GS×B×H
CBALKEN[3;3]←E×B×H×H×H÷12
A
MM←ρM÷L
BBALKEN←3 3ρMM×-1 0 0 0 1 0 0 0 1
BBALKEN[2;3]←-1
A
KBALKEN←(ρBBALKEN)+.xSBALKEN←CBALKEN+.xBBALKEN
A
AFUGE←2 6ρ1 0 0 -1 0 0 0 1 0 0 -1 0
AFUGE[1;3]←AFUGE[1;6]←-H÷2
CFUGE←2 2ρCII,0 0,CQQ
A
ISIGN←1
KFUGE←ISIGN×(ρAFUGE)+.xCFUGE+.xAFUGE
A
KSYSTEM←(2ρ3×NS)ρ0
RSYSTEM←((3×NS),1)ρ0 ◊ RSYSTEM[2;1]←QM
I←0
BALKEN:I←I+1
IRANGE←(3×I-1)+13
KSYSTEM[IRANGE;IRANGE]←KSYSTEM[IRANGE;IRANGE]+KBALKEN
→(I<NS)/BALKEN
A
→(NS≤1)/CONTINUE
I←0
FUGEN:I←I+1
IRANGE←(3×I-1)+16
KSYSTEM[IRANGE;IRANGE]←KSYSTEM[IRANGE;IRANGE]+KFUGE
→(I<NS-1)/FUGEN

```



```

A
CONTINUE:
USYSTEM←(NS,3)ρ,RSYSTEM#KSYSTEM
A
SSYSTEM←(NS,3)ρ0
I←0
SCHNITTKRAEFTE:I←I+1
SSYSTEM[I;]←SBALKEN+.xUSYSTEM[I;]
→(I<NS)/SCHNITTKRAEFTE
x←'          U-m          W-m          BETA-m'
OUTHEAD1←1 72ρ72↑x,'          N-m          Q-m          M-m'
OUTPUT←OUTHEAD1_T((6ρ12 4),(6ρ12 2))ϕUSYSTEM,SSYSTEM
A
→(NS≤1)/EXIT
NS1←NS-1
UINTERFACE←SINTERFACE←(NS1,2)ρ0
I←0
INTERFACE:I←I+1
SINTERFACE[I;]←-CFUGE+.xUINTERFACE[I;]←AFUGE+.x,
→(I<NS1)/INTERFACE          USYSTEM[0 1+I;]
x←'          ΔU-m          ΔW-m          '
OUTHEAD2←e2 72ρ144↑x,'          T-m          S-m'
OUTPUT←OUTPUT_TOUTHEAD2
OUTPUT←OUTPUT_T12φ(24 8 12 8 24 2 12 2)ϕUINTERFACE,
A          SINTERFACE
EXIT:

```



---

# B.

## Anhang

---

### ABAQUS - Input-Files

Für die Kontrollberechnungen zu dieser Arbeit stand das FE-Programm ABAQUS Vers. 4.9.1 und Vers. 5.2 zur Verfügung. Nachfolgend sind die Input-Files zu den durchgeführten Berechnungen des Kapitels 7 aufgelistet und beschrieben.

#### Input-File 'plate-254.inp'

Es handelt sich hierbei um eine Kontrollberechnung, wobei die Materialkennwerte eines Faser-Verbund-Werkstoffes herangezogen wurden.

```
*HEADING
TWO LAYER COMPOSITE PLATE -45/+45 DEG ORIENTATION
**
**Eingabe der Randkontenpunkte und Knotengenerierung
**Plattenabmessung 10.0*10.0 inch
**
*NODE
  1, 0., 0., 0.
 33, 10., 0., 0.
1601, 0., 10., 0.
1633, 10., 10., 0.
*NSET, NSET=MID, GENERATE
 801, 817
*NGEN, NSET=BOT
  1, 33
*NGEN, NSET=TOP
1601, 1633
*NFILL, NSET=ALL
BOT, TOP, 32, 50
```

```
*NSET, NSET=YPAR, GEN
  1, 1601, 50
  33, 1633, 50
*NSET, NSET=XPAR, GEN
  1, 33
  1601, 1633
**
**Ausgabedefinition generiertes Netz
**
*PLOT
*VIEWPOINT
  0.40825, -0.40825, 0.81650, 0., 0., 1
*ZOOM, FACTOR=.75
*DRAW, NODENUM
**
**Definition des Elementtypes S9S5-Schalenelement
**Definition des Masterelementes und Elementgenerierung
**
*ELEMENT, TYPE=S9R5
  1, 1, 5, 205, 201, 3, 105, 203, 101, 103
*ELGEN, ELSET=PLATE
  1, 8, 4, 1, 8, 200, 8
*ELSET, ELSET=PR
  28, 29, 36, 37
**
**Querschnittsdefinition für die Verbundplatte
**Zwei Schichten mit je t = 0.1 inch, Layer1 und Layer2
**
*SHELL SECTION, ELSET=PLATE, COMPOSITE
  0.1, 3, LAMINA, LAYER1
  0.1, 3, LAMINA, LAYER2
*TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS
  5.0E7, 5.0E7
**
**Materialdefinition
**Eingabe der Materialkennwerte für die Schichten
**
*MATERIAL, NAME=LAMINA
*ELASTIC, TYPE=LAMINA
  40.E6, 1.E6, .25, .5E6, .5E6, .5E6
**
**Angabe der Schichtorientierung - Faserorientierung
**
*ORIENTATION, NAME=LAYER1, SYSTEM=R
  1., 0., 0., 0., 1., 0.
  3, -45.
*ORIENTATION, NAME=LAYER2, SYSTEM=R
  1., 0., 0., 0., 1., 0.
  3, 45.
**
```



```
**Berechnungsschritt linear-elastisch
**
*RESTART, WRITE
*STEP
*STATIC
**
**Randbedingungen, umfangsgelenkige Lagerung
**
*BOUNDARY
  XPAR, 2, 3
  YPAR, 1
  YPAR, 3
**
**Belastungseingabe, Gleichlast q = 100.0 lb/in.2
**
*DLOAD
  PLATE, P, 100.0
**
**Ausgabedefinition
**
*EL PRINT, POSITION=AVERAGED AT NODES, ELSET=PR
SF,
*EL FILE, POSITION=AVERAGED AT NODES, ELSET=PR
SF,
*NODE FILE, NSET=MID
  U,
*NODE PRINT
  U,
*END STEP
```

**Input-File 'plate-4x4-02.inp'**

```
*HEADING
TWO LAYER COMPOSITE TIMBER PLATE -45/+45 DEG ORIENTATION
*NODE
**
**Eingabe der Randknotenpunkte und Kontengenerierung
**Plattenabmessung 4000*4000 mm
**
      1,      0.0,      0.0, 0.0
     33, 4000.0,      0.0, 0.0
    1601,      0.0, 4000.0, 0.0
    1633, 4000.0, 4000.0, 0.0
*NSET, NSET=MID, GENERATE
      801, 817
*NGEN, NSET=BOT
      1, 33
*NGEN, NSET=TOP
    1601, 1633
*NFILL, NSET=ALL
      BOT, TOP, 32, 50
*NSET, NSET=YPAR, GEN
      1, 1601, 50
      33, 1633, 50
*NSET, NSET=XPAR, GEN
      1, 33
    1601, 1633
**
**Ausgabedefinition generiertes Netz
**
*PLOT
**VIEWPOINT
**0.40825, -0.40825, 0.81650, 0.0, 0.0, 1.0
*ZOOM, FACTOR=0.75
*DRAW, NODENUM
**
**Definition des Elementtypes S9R5-Schalenelement
**Definition des Masterelementes und Elementgenerierung
**
*ELEMENT, TYPE=S9R5
      1, 1, 5, 205, 201, 3, 105, 203, 101, 103
*ELGEN, ELSET=PLATE
      1, 8, 4, 1, 8, 200, 8
*ELSET, ELSET=PR
      28, 29, 36, 37
**
**Querschnittsdefinition für die Verbundplatte
**Zwei Schichten mit je t = 22.0 mm, Schicht1 und Schicht2
**
```

```
*SHELL SECTION, ELSET=PLATE, COMPOSITE
22.0, 3, LAMINA, LAYER1
22.0, 3, LAMINA, LAYER2
*TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS
5.0E7, 5.0E7
**
**Materialdefinition
**Eingabe der Materialkennwerte für die Schichten
**
*MATERIAL, NAME=LAMINA
*ELASTIC, TYPE=LAMINA
11000.0, 370.0, 0.45, 690.0, 690.0, 70.0
**
**Angabe der Schichtorientierung - Faserorientierung
**
*ORIENTATION, NAME=LAYER1, SYSTEM=R
1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0
3, 45.0
*ORIENTATION, NAME=LAYER2, SYSTEM=R
1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0
3, -45.0
**
**Berechnungsschritt linear-elastisch
**
*RESTART, WRITE
*STEP
*STATIC
**
**Randbedingungen, umfangsgelenkige Lagerung
**
*BOUNDARY
XPAR, 2, 3
YPAR, 1
YPAR, 3
**
**Belastungseingabe, Gleichlast q = 1.0 KN/m2
**
*DLOAD
PLATE, P, -0.001
**
**Ausgabedefinition
**
*EL PRINT, POSITION=AVERAGED AT NODES, ELSET=PR
SF
*EL FILE, POSITION=AVERAGED AT NODES, ELSET=PR
SF
*NODE FILE, NSET=MID
U
*NODE PRINT
U
*END STEP
```

**Input-File 'cyl-tim-lit3.inp'**

Mit dem nachfolgenden Input-File 'cyl-tim-lit3.inp' wurde die lineare FE-Analyse der dreischichtigen, zylinderförmigen Holzschale durchgeführt.

```
*HEADING
tests on nailed and glued layered timber cylindrical shells
**
**node definition**
**
*NODE
  1, 0.0,  -3.0, 81.8
2001, 0.0, 1216.2, 81.8
2101, 0.0,  -50.8,  0.0
2501, 0.0,   0.0,  0.0
4101, 0.0,  -50.8, 48.6
4401, 0.0,  -12.7, 69.3
4501, 0.0,   0.0, 76.2
7501, 0.0,  -6.0, 87.4
**
**node definition - shell elements**
**
*NGEN, NSET=NCIRC01, LINE=C
  1, 2001, 100, , 0.0, 606.6, -1039.6
*NCOPY, CHANGE NUMBER=80, OLD SET=NCIRC01, NEW SET=NCIRC80, SHIFT
2438.4, 0.0, 0.0

*NFILL, NSET=NSHELL
  NCIRC01, NCIRC80, 80
**
**node definition - 3D-solid elements**
**
*NGEN, NSET=NSOLU1
  2101, 2501, 100
*NGEN, NSET=NSOLU2
  4101, 4501, 100
*NGEN, NSET=NSOLU
  4101, 4401, 100
*NGEN, NSET=NMPC1
  4501, 7501, 500
*NCOPY, CHANGE NUMBER=3000, OLD SET=NSOLU, NEW SET=NSOLO, SHIFT
  0.0, 0.0, 14.4

*NFILL, NSET=NSOLBEAM
  NSOLU1, NSOLU2, 4, 500
*NFILL, NSET=NSOLSH
  NSOLU, NSOLO, 6, 500
*NSET, NSET=NSOLID01
  NSOLSH, NSOLBEAM, NMPC1
*NCOPY, CHANGE NUMBER=80, OLD SET=NSOLID01, NEW SET=NSOLID80, SHIFT
  2438.4, 0.0, 0.0
```



---

## ABAQUS - Input-Files

---

```
*NFILL, NSET=NSOLID1
NSOLID01, NSOLID80, 80
*NCOPY, CHANGE NUMBER=10000, OLD SET=NSOLID1, NEW SET=NSOLID2,
0.0, 606.6, 0.0, 2438.4, 606.6, 0.0 REFLECT=MIRROR
0.0, 606.6, 1000.0
**
**element definition - shell elements**
**
*ELEMENT, TYPE=S4R5
1, 1, 3, 203, 201
*ELGEN, ELSET=ELCYL
1, 40, 2, 1, 10, 200, 50
*SHELL SECTION, ELSET=ELCYL, COMPOSITE
4.23, , TIMSHELL, ORS00
4.23, , TIMSHELL, ORS90
4.23, , TIMSHELL, ORS00
**
**element definition - solid elements**
**
*ELEMENT, TYPE=C3D8
501, 2101, 2103, 2303, 2301, 3101, 3103, 3303, 3301
701, 4101, 4103, 4303, 4301, 5101, 5103, 5303, 5301
801, 5101, 5103, 5303, 5301, 6101, 6103, 6303, 6301
**
1001, 12301, 12303, 12103, 12101, 13301, 13303, 13103, 13101
1201, 14301, 14303, 14103, 14101, 15301, 15303, 15103, 15101
1301, 15301, 15303, 15103, 15101, 16301, 16303, 16103, 16101
**
*ELGEN, ELSET=ELSOLBE1
501, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 1000, 100
*ELGEN, ELSET=ELSOLBE2
1001, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 1000, 100
*ELSET, ELSET=ELSOLBEA
ELSOLBE1, ELSOLBE2
**
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH1
701, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 2000, 200
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH2
801, 40, 2, 1, 2, 200, 50
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH3
1201, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 2000, 200
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH4
1301, 40, 2, 1, 2, 200, 50
*ELSET, ELSET=ELSOLSH
ELSOLSH1, ELSOLSH2, ELSOLSH3, ELSOLSH4
**
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH1, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH1
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH2, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH2
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH3, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH3
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH4, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH4
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLBEA, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORBEA
**
**material definition - shell elements**
**
*MATERIAL, NAME=TIMSHELL
*ELASTIC, TYPE=LAMINA
8000.0, 300.0, 0.38, 500.0, 500.0, 40.0
**
```

```
**definition of a local cylindrical coordinate system**
**x-axis (1-direction) perpendicular to the shell surface**
**
*ORIENTATION, SYSTEM=CYLINDRICAL, NAME=ORS00
  0.0, 606.6, -1039.6, 2438.4, 606.6, -1039.6
  1, 0.0
*ORIENTATION, SYSTEM=CYLINDRICAL, NAME=ORS90
  0.0, 606.6, -1039.6, 2438.4, 606.6, -1038.6
  1, 90.0
**
**material definition - solid elements**
**global and local rectangular coordinate system**
**
*MATERIAL, NAME=TIM3D
*ELASTIC, TYPE=ENGINEERING CONSTANTS
  11500.0, 300.0, 300.0, 0.01227, 0.01227, 0.38, 500.0, 500.0
  40.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH1
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.5436
  3, 90.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH2
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.5436
  3, 0.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH3
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -0.5436
  3, 90.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH4
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -0.5436
  3, 0.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORBEA
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0
  3, 0.0
**
**boundary definition**
**definition of the boundary node set**
**
*NSET, NSET=NBSH1E, GENERATE
  1, 81, 2
*NSET, NSET=NBS11E, GENERATE
  4501, 4581, 2
*NSET, NSET=NBS13E, GENERATE
  5501, 5581, 2
*NSET, NSET=NBS15E, GENERATE
  6501, 6581, 2
*NSET, NSET=NBS17E, GENERATE
  7501, 7581, 2
**
*NSET, NSET=NBSH2E, GENERATE
  2001, 2081, 2
*NSET, NSET=NBS21E, GENERATE
  14501, 14581, 2
*NSET, NSET=NBS23E, GENERATE
  15501, 15581, 2
*NSET, NSET=NBS25E, GENERATE
  16501, 16581, 2
*NSET, NSET=NBS27E, GENERATE
  17501, 17581, 2
**
```

```

*MPC
  SSLINEAR, NBSH1E, NBS11E, NBS13E, NBS15E, NBS17E
  SSLINEAR, NBSH2E, NBS21E, NBS23E, NBS25E, NBS27E
**
**degree of freedom for the shell edges v=w=0**
**
*BOUNDARY
  NCIRC01, 2, 3
  NCIRC80, 2, 3
  2301, 1, 3
  2381, 2, 3
  12301, 1, 3
  12381, 2, 3
**
*RESTART, WRITE, F=2
**
**mesh plot definition**
**
*PLOT, COLORS=16
  test on glued three-layered timber cylindrical shells
  13.2, 10.7, 13.0, 10.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5
  0.24, 0.1, 10.6, , 1.0, 2.0, 0.12, 0.01
*PLOT MODE, FILL=YES, NODE=YES
*COLOR SET, COLOR= 4, ELSET=ELSOLSH
*COLOR SET, COLOR=12, ELSET=ELSOLBEA
*COLOR SET, COLOR=16, ELSET=ELCYL
*VIEWPOINT
  0.8, 0.8, 0.6
*DRAW
**
**history definition**
**
*STEP
*STATIC, DIRECT
  0.1, 1.0
*DLOAD
  ELCYL, P, -7.664E-3
**
**plot output definition**
**
*PLOT, COLORS=16, F=2
  test on glued three-layered timber cylindrical shells - u
  13.2, 10.7, 13.0, 10.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5
  0.24, 0.1, 10.6, , 1.0, 2.0, 0.12, 0.01
*VIEWPOINT
  0.8, 0.8, 0.6
*DISPLACED, DCOLOR=4, UCOLOR=16
  U
**
**print definition**
**
*PRINT, SOLVE=YES, F=2
*NODE PRINT
  U
  RF
*EL PRINT, F=0
*END STEP

```

**Input-File 'cyl-tim-lit4.inp'**

Mit dem nachfolgenden Input-File 'cyl-tim-lit4.inp' wurde eine geometrisch nicht-lineare FE-Analyse der dreischichtigen, zylinderförmigen Holzschale durchgeführt.

```
*HEADING
tests on nailed and glued layered timber cylindrical shells
**
**node definition**
**
*NODE
  1, 0.0, -3.0, 81.8
2001, 0.0, 1216.2, 81.8
2101, 0.0, -50.8, 0.0
2501, 0.0, 0.0, 0.0
4101, 0.0, -50.8, 48.6
4401, 0.0, -12.7, 69.3
4501, 0.0, 0.0, 76.2
7501, 0.0, -6.0, 87.4
**
**node definition - shell elements**
**
*NGEN, NSET=NCIRC01, LINE=C
  1, 2001, 100, , 0.0, 606.6, -1039.6
*NCOPY, CHANGE NUMBER=80, OLD SET=NCIRC01, NEW SET=NCIRC80, SHIFT
2438.4, 0.0, 0.0

*NFILL, NSET=NSHELL
  NCIRC01, NCIRC80, 80
**
**node definition - 3D-solid elements**
**
*NGEN, NSET=NSOLU1
  2101, 2501, 100
*NGEN, NSET=NSOLU2
  4101, 4501, 100
*NGEN, NSET=NSOLU
  4101, 4401, 100
*NGEN, NSET=NMPC1
  4501, 7501, 500
*NCOPY, CHANGE NUMBER=3000, OLD SET=NSOLU, NEW SET=NSOLO, SHIFT
0.0, 0.0, 14.4

*NFILL, NSET=NSOLBEAM
  NSOLU1, NSOLU2, 4, 500
*NFILL, NSET=NSOLSH
  NSOLU, NSOLO, 6, 500
*NSET, NSET=NSOLID01
  NSOLSH, NSOLBEAM, NMPC1
*NCOPY, CHANGE NUMBER=80, OLD SET=NSOLID01, NEW SET=NSOLID80, SHIFT
2438.4, 0.0, 0.0
```



```

*NFILL, NSET=NSOLID1
NSOLID01, NSOLID80, 80
*NCOPY, CHANGE NUMBER=10000, OLD SET=NSOLID1, NEW SET=NSOLID2,
0.0, 606.6, 0.0, 2438.4, 606.6, 0.0 REFLECT=MIRROR
0.0, 606.6, 1000.0
**
**element definition - shell elements**
**
*ELEMENT, TYPE=S4R5
1, 1, 3, 203, 201
*ELGEN, ELSET=ELCYL
1, 40, 2, 1, 10, 200, 50
*SHELL SECTION, ELSET=ELCYL, COMPOSITE
4.23, , TIMSHELL, ORS00
4.23, , TIMSHELL, ORS90
4.23, , TIMSHELL, ORS00
**
**element definition - solid elements**
**
*ELEMENT, TYPE=C3D8
501, 2101, 2103, 2303, 2301, 3101, 3103, 3303, 3301
701, 4101, 4103, 4303, 4301, 5101, 5103, 5303, 5301
801, 5101, 5103, 5303, 5301, 6101, 6103, 6303, 6301
**
1001, 12301, 12303, 12103, 12101, 13301, 13303, 13103, 13101
1201, 14301, 14303, 14103, 14101, 15301, 15303, 15103, 15101
1301, 15301, 15303, 15103, 15101, 16301, 16303, 16103, 16101
**
*ELGEN, ELSET=ELSOLBE1
501, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 1000, 100
*ELGEN, ELSET=ELSOLBE2
1001, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 1000, 100
*ELSET, ELSET=ELSOLBEA
ELSOLBE1, ELSOLBE2
**
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH1
701, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 2000, 200
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH2
801, 40, 2, 1, 2, 200, 50
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH3
1201, 40, 2, 1, 2, 200, 50, 2, 2000, 200
*ELGEN, ELSET=ELSOLSH4
1301, 40, 2, 1, 2, 200, 50
*ELSET, ELSET=ELSOLSH
ELSOLSH1, ELSOLSH2, ELSOLSH3, ELSOLSH4
**
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH1, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH1
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH2, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH2
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH3, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH3
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLSH4, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORSH4
*SOLID SECTION, ELSET=ELSOLBEA, MATERIAL=TIM3D, ORIENTATION=ORBEA
**
**material definition - shell elements**
**
*MATERIAL, NAME=TIMSHELL
*ELASTIC, TYPE=LAMINA
8000.0, 300.0, 0.38, 500.0, 500.0, 40.0
**

```

---

## B. Anhang

---

```
**definition of a local cylindrical coordinate system**
**x-axis (1-direction) perpendicular to the shell surface**
**
*ORIENTATION, SYSTEM=CYLINDRICAL, NAME=ORS00
  0.0, 606.6, -1039.6, 2438.4, 606.6, -1039.6
  1, 0.0
*ORIENTATION, SYSTEM=CYLINDRICAL, NAME=ORS90
  0.0, 606.6, -1039.6, 2438.4, 606.6, -1038.6
  1, 90.0
**
**material definition - solid elements**
**global and local rectangular coordinate system**
**
*MATERIAL, NAME=TIM3D
*ELASTIC, TYPE=ENGINEERING CONSTANTS
  11500.0, 300.0, 300.0, 0.01227, 0.01227, 0.38, 500.0, 500.0
  40.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH1
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.5436
  3, 90.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH2
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.5436
  3, 0.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH3
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -0.5436
  3, 90.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORSH4
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -0.5436
  3, 0.0
*ORIENTATION, SYSTEM=RECTANGULAR, NAME=ORBEA
  1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0
  3, 0.0
**
**boundary definition**
**definition of the boundary node set**
**
*NSET, NSET=NBSH1E, GENERATE
  1, 81, 2
*NSET, NSET=NBS11E, GENERATE
  4501, 4581, 2
*NSET, NSET=NBS13E, GENERATE
  5501, 5581, 2
*NSET, NSET=NBS15E, GENERATE
  6501, 6581, 2
*NSET, NSET=NBS17E, GENERATE
  7501, 7581, 2
**
*NSET, NSET=NBSH2E, GENERATE
  2001, 2081, 2
*NSET, NSET=NBS21E, GENERATE
  14501, 14581, 2
*NSET, NSET=NBS23E, GENERATE
  15501, 15581, 2
*NSET, NSET=NBS25E, GENERATE
  16501, 16581, 2
*NSET, NSET=NBS27E, GENERATE
  17501, 17581, 2
**
```

```

*MPC
  SSLINEAR, NBSH1E, NBS11E, NBS13E, NBS15E, NBS17E
  SSLINEAR, NBSH2E, NBS21E, NBS23E, NBS25E, NBS27E
**
**degree of freedom for the shell edges v=w=0**
**
*BOUNDARY
  NCIRC01, 2, 3
  NCIRC80, 2, 3
    2301, 1, 3
    2381, 2, 3
  12301, 1, 3
  12381, 2, 3
**
*RESTART, WRITE, F=5
**
**mesh plot definition**
**
*PLOT, COLORS=16
  test on glued three-layered timber cylindrical shells
  13.2, 10.7, 13.0, 10.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5
  0.24, 0.1, 10.6, , 1.0, 2.0, 0.12, 0.01
*PLOT MODE, FILL=YES, NODE=YES
*COLOR SET, COLOR= 4, ELSET=ELSOLSH
*COLOR SET, COLOR=12, ELSET=ELSOLBEA
*COLOR SET, COLOR=16, ELSET=ELCYL
*VIEWPOINT
  0.8, 0.8, 0.6
*DRAW
**
**history definition**
**
*STEP, NLGEOM, INC=50
*STATIC
  0.1, 1.0, , 0.1
*DLOAD
  ELCYL, P, -7.664E-3
**
**plot output definition**
**
*PLOT, COLORS=16, F=5
  test on glued three-layered timber cylindrical shells - u
  13.2, 10.7, 13.0, 10.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5
  0.24, 0.1, 10.6, , 1.0, 2.0, 0.12, 0.01
*VIEWPOINT
  0.8, 0.8, 0.6
*DISPLACED, DCOLOR=4, UCOLOR=16
  U
**
**print definition**
**
*NSET, NSET=NCIRC41, GENERATE
  41, 2041, 200
*PRINT, SOLVE=YES, F=5
*NODE PRINT, NSET=NCIRC41
  U
*EL PRINT, F=0
*END STEP

```