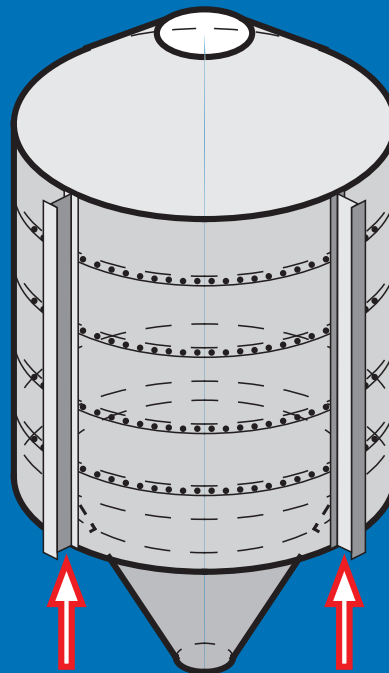


Modellbildung und plastische Tragfähigkeit diskret gelagerter Stahlsilokonstruktionen mit Auflagerlängssteifen



F-5-13/2005

Siegfried Wallner
Institut für Stahlbau und Flächentragwerke
Technische Universität Graz

Modellbildung und plastische Tragfähigkeit diskret gelagerter Stahlsilokonstruktionen mit Auflagerlängssteifen

Dissertation

Fakultät für Bauingenieurwissenschaften
Technische Universität Graz

von

Dipl.-Ing. Dr.techn. Siegfried WALLNER

Betreuer und Begutachter:

A.o. Prof. Dr.techn. Werner GUGGENBERGER
Institut für Stahlbau und Flächentragwerke,
Technische Universität Graz
A-8010 Graz, Lessingstraße 25

Begutachter:

Prof. Dr. J. Michael ROTTER
Department of Civil Engineering, University of Edinburgh
The King's Building, Edinburgh, EH9 3JL, UK

Korrigierte Fassung
Graz, im Dezember 2005

Siegfried Wallner

Modellbildung und plastische Tragfähigkeit diskret gelagerter Stahlsilokonstruktionen mit Auflagerlängssteifen

Printausgabe herausgegeben vom Institut für Stahlbau und Flächentragwerke, E-book herausgegeben vom Institut für Baustatik, Fachbereich Ingenieurbaukunst der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften der Technischen Universität Graz, Lessingstr. 25/II, A-8010 Graz, Österreich.

Von der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften der Technischen Universität Graz genehmigte Dissertation.

Rigorosum am 2. Oktober 2002.

Copyright 2018 Verlag der Technischen Universität Graz
www.ub.tugraz.at/Verlag

ISBN (print 2005): 3-901351-97-3
ISBN (e-book 2018): 978-3-85125-597-3
DOI 10.3217/978-3-85125-597-3



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Bibliografische Information der Deutsche Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie;
detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://www.dnb.de> abrufbar.

Diese e-book - Ausgabe (2018) unterscheidet sich von der print - Ausgabe (2005) durch geringfügige Modifikationen der Seiten II - V (Impressum, Vorwort des Herausgebers und Vorwort des Verfassers).

Vorwort des Herausgebers

Das Thema der vorliegenden Arbeit stellt eine Fortführung und Verfeinerung von Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der technischen Schalenkonstruktionen dar, welche am Institut für Stahlbau und Flächentragwerke seit nahezu vier Jahrzehnten durchgeführt werden. Damit fügt sich diese Arbeit inhaltlich als weiterer markanter Baustein in eine Reihe von Diplomarbeiten, Dissertationen, Habilitationsschriften, die sich mit den vielfältigen Aspekten des Trag- und Beulverhaltens, sowie der Modellbildung, Berechnung und Bemessung von dünnwandigen rotationssymmetrischen Schalenkonstruktionen aus Stahl, insbesondere von Kreiszylinder- und Kegelschalen, befassen (Greiner 1972, 1980, Koller 1980, Guggenberger 1991, 1998, Wallner 1993, Derler 1994, Pircher 1996, Yang 1996, Lesitschnig 1999, Winkler 2000, Linder 2001, Wallner 2002).

Auf Einzelstützen gelagerte dünnwandige Stahlsilokonstruktionen mit durchgehenden Längssteifen über den Auflagern stellen 'zusammengesetzte versteifte Schalenkonstruktionen' dar. Derartige Tragwerkstypen weisen auf Grund ihrer Vielgliedrigkeit meist eine grosse Anzahl voneinander unabhängiger, vielfach aber auch miteinander in Wechselbeziehung stehender Versagensformen auf. Diese Versagensformen sind durch das Erreichen der Grenzzustände der plastischen Tragfähigkeit bzw. der Beultragfähigkeit gekennzeichnet. Ohne umfassende Kenntnis der möglichen lokalen und globalen Versagensformen sind umfangreiche numerische nichtlineare Beulanalysen, mit Berücksichtigung geometrischer und materieller Nichtlinearitäten sowie gegebenenfalls geometrischer Imperfektionen, weder zielführend noch effizient durchführbar. Von dieser Erkenntnis geleitet, wird in dieser Arbeit wie folgt schrittweise vorgegangen: in einem ersten Schritt werden die möglichen baustatischen Modellbildungsoptionen für die einzelnen Systemkomponenten des vielgliedrigen Tragsystems bzw. für das mechanische Zusammenwirken dieser Systemkomponenten untersucht. Unter Modellbildung wird hierbei insbesondere die tragwirkungsbezogene konsistente Zerlegung des Gesamttragsystems in Teiltragsysteme und deren Wiederezusammenbau zum Gesamttragsystem verstanden.

In einem zweiten Schritt wird darauf aufbauend die Vielzahl möglicher plastischer Versagensformen zunächst qualitativ identifiziert und dann an geeignet isolierten Teilsystemen die zugehörigen plastischen Traglasten auf der Basis materiell nichtlinearer numerischer Parameterstudien quantitativ bestimmt. Durch zuvor genannte vereinfachende Modellbildung können approximative analytische Vergleichswerte der numerisch berechneten plastischen Traglasten gewonnen werden und in Abhängigkeit der maßgeblichen Systemparameter dargestellt werden. Begleitend dazu wird ein grundlegendes Verständnis der zugehörigen Tragmechanismen erarbeitet. Die Sensitivitäten der plastischen Versagenslasten in Abhängigkeit der baustatischen Modellbildungsoptionen werden ebenfalls ermittelt. Diese Ergebnisse werden durch Berechnung am Gesamtsystem oder an passend zugeordneten Teilsystemen verifiziert.

In einem dritten Schritt werden auf dieser Basis lineare und nichtlineare Beulanalysen am kombinierten Schaft - Längssteifensystem durchgeführt. Die Parameterkombinationen für die untersuchten Systeme können nun derart festgelegt werden, dass "triviale" plastische Versagensformen gezielt ausgeschlossen werden und maßgebliche Beulversagensformen gezielt angesteuert werden. Damit ist eine rationale und zielführende Methodik aufgezeigt und es ist die Schrittfolge definiert, nach welcher bei umfangreichen nichtlinearen numerischen Beulanalysen komplexer Tragsysteme sinnvollerweise vorgegangen werden soll.

IV

Vorhergehende gründliche Tragwerksanalyse auf der Basis geeigneter Begriffsbildungen und Modellbildungen, das vorgängige Studium des elastischen Kräftespiels sowie die Identifizierung der plastischen Versagensformen und Versagensmechanismen bilden die Basis für umfangreiche nichtlineare Beuluntersuchungen.

Die vorliegende Arbeit steht im Kontext der Zielsetzungen europäischer Forschungsgremien, insbesondere der Technical Working Group 8.4 "Stability of Shells" der European Convention of Constructional Steelwork (ECCS).

Werner Guggenberger
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Graz, 2005 und 2018
Institut für Baustatik (ab April 2014)
Institut für Stahlbau und Flächentragwerke (bis März 2014)

Vorwort des Verfassers

Die vorliegende Arbeit entstand großteils während meiner Zeit als Universitätsassistent am Institut für Stahlbau und Flächentragwerke der TU Graz.

Diese Arbeit reiht sich inhaltlich in eine Reihe von Diplomarbeiten und Dissertationen, welche sich mit der Thematik "Trag- und Beulverhalten, Berechnung und Bemessung dünnwandiger rotationsymmetrischer Metallschalenkonstruktionen" befassen (Greiner 1972 bzw. 1980, Koller 1980, Guggenberger 1991, Derler 1993, Wallner 1993, Pircher 1996, Yang 1996, Guggenberger 1998, Lesitschnig 1999, Winkler 2000, Linder 2001, Wallner 2002).

Die vorliegende Arbeit entstand durch folgende Anregungen: Bezugnehmend auf die Dissertation "*Nichtlineares Beulverhalten von Kreiszyinderschalen unter lokaler Axialbelastung*" von Prof. Guggenberger hat Prof. Bornscheuer (Universität Stuttgart) im Jahr 1994 weitergehende Untersuchungen für den Siloschaft mit durchgehenden Auflagerlängssteifen angeregt. Dabei ergaben sich bald offene Fragestellungen hinsichtlich der zu wählenden Parameterbereiche und der Art der durchzuführenden Berechnungen bzw. der maßgeblichen Versagensformen im jeweiligen konkreten Konstruktions- bzw. zugehörigem Berechnungsfall, d.h. Beulen der Schalenwand versus plastisches Versagen des Auflagerquerschnittes versus elastoplastisches Knicken der Auflagerlängssteife usw.

Die Mitarbeit bei der statischen Überprüfung eines Stahlsilos einer österreichischen Silobaufirma, mit ca. 900 m³ Füllvolumen und 1600 Tonnen Füllgewicht, und der Vergleich mit dem Ausführungsvorschlag einer Konkurrenzfirma gaben die Motivation zur konkreten Durchführung dieser Arbeit und lieferte viele wichtige Anfangserkenntnisse und Wegweisungen, die Untersuchungen in die richtige Richtung zu leiten.

Wesentliche Anregungen und Hilfestellungen, die zum Gelingen der vorliegenden Arbeit führten, kamen von **Prof. Werner Guggenberger**, der auch als Betreuer und Erstbegutachter dieser Dissertation verantwortlich zeichnet. An ihn geht mein besonderer Dank.

Beispielhaft sei hier speziell genannt, unter unzähligem anderem, seine Hilfestellung bei der Abfassung des Anhanges "*Theoretische Berechnungsgrundlagen*". Dort werden die Grundgleichungen der (geometrisch und materiell) linearen Kreiszyinderschale systematisch hergeleitet und übersichtlich in Matrix-orientierter Form dargestellt und mit bekannten Schalengrundgleichungen (insbesondere Flügge, 1932 und 1960, sowie Donnell, 1934) verglichen. Darauf aufbauend werden Modellbildungen vorgenommen, und zwar in systematischer Weise durch Reduktion der Schalensteifigkeiten, umfassend diskutiert, u.a. das sogenannte Semimembran - Schalenmodell, und miteinander verglichen. Diskretisierung mittels Fourieransätzen in Umfangsrichtung führt in allen diesen Fällen auf gewöhnliche Differentialgleichungen 4. Ordnung in der Zylinderlängskoordinate.

Mein zweiter Dank geht an **Prof. J. Michael Rotter** (University of Edinburgh, UK), der keine Mühe gescheut hat, als Zweitbegutachter für diese umfangreiche, in deutscher Sprache verfasste Dissertation zur Verfügung zu stehen.

Mein dritter Dank geht an meine Eltern, meinen Bruder und im besonderen an meine Partnerin **Juliane** und meine Tochter **Sophie**. Sie haben mich unterstützt und in letzter Zeit viel Verständnis für die zeitintensiven Fertigstellungsarbeiten dieser Dissertation aufgebracht.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit "Modellbildung und plastische Tragfähigkeit von diskret gelagerten Stahlsilokonstruktionen mit Auflagerlängssteifen" befaßt sich im generellen mit der baustatischen Modellierung und im speziellen mit der Berechnung eines komplexen Silogesamtsystems, das sich durch über die gesamte Schafthöhe angeordnete Auflagerlängssteifen und eingebaute dreieckige Schottbleche im Auflagerbereich auszeichnet, hinsichtlich seiner plastischen Tragfähigkeit.

Aufbauend auf einer umfassenden Einleitung, in der die Grundlagen und der Stand des Wissens dargestellt werden, und in Anlehnung an die, als Vornormen vorliegenden, Eurocodes ENV 1993-1-6 bzw. 1993-4-1 erfolgt die baustatische Modellierung des Silogesamtsystems anhand herausgelöster Teiltragsysteme bei steter Einhaltung des Gleichgewichtes am Gesamtsystem.

Es werden verfeinerte Modellbildungen der Teiltragsysteme vorgestellt und eingehend untersucht, wie die optionale Trichterauflagerung über den Schottblechen, die Tragfähigkeit des Trichter-Schaft-Überganges bei Berücksichtigung von Membrangrundbeanspruchungen der Schalenteile, die Modellierung des Basisringträgers als sekundäres Tragelement, die Berücksichtigung von Interaktionseffekten im Auflagerkrafteinleitungsbereich und des kraft- und formschlüssigen Zusammenwirkens von Schaft und Auflagerlängssteifen, das mithilfe eines vollständigen analytischen Berechnungsmodelles untersucht wird.

Für die optionale Trichterauflagerung, den Trichter-Schaft-Übergang und den Auflagerkrafteinleitungsbereich werden überdies vollplastische Bemessungsformeln erarbeitet.

Im Anhang A erfolgt die Aufbereitung theoretischer Grundlage wie "Grundgleichungen der Kreiszylinderschale" bzw. "Grundgleichungen des elastischen, räumlich belasteten Kreisbogenträgers".

Abstract

The present work "Modelling and plastic carrying capacity of discretely supported steel silo structures with longitudinal stiffeners" deals with the structural modelling in generalized form and with the structural analysis of a complex silo structure with longitudinal stiffeners along the overall barrel and inserted triangular stiffener plates at the supports with respect to the plastic carrying capacity.

Developing on a comprehensive introduction, showing the basis and present state of knowledge, and according to the draft standards ENV 1993-1-6 and ENV 1993-4-1 the structural modelling of the specific silo structure is done by means of extricated load carrying mechanism under steady fulfillment of equilibrium conditions at the overall silo structure.

Advanced structural modellings are presented and examined thoroughly such as the consideration of optional hopper support conditions related to the inserted triangular stiffener plate, determining the plastic carrying capacity of the transition junction by considering membrane stresses of the shell parts, modelling the base ring girder as secondary load carrying mechanism, consideration of interaction effects in the support area, coupling of the longitudinal stiffeners and the barrel which is fulfilled exactly and investigated by means of an entirely analytical analysis model.

Plastic design formulas are worked out for the optional hopper support conditions, the transition junction and the support area.

Appendix A includes the preparation of theoretical fundamentals such as "basic equations of circular cylindrical shells" and "basic equations of elastic circular ring beams in 3D space".

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung, Stand des Wissens und Problemstellung	1
1.1	Einleitung	4
1.1.1	Charakteristika von Stahlsilokonstruktionen	4
1.1.2	Auflagerungsarten	7
1.1.2.1	Auflagerung in Umfangsrichtung	7
1.1.2.2	Diskrete Auflagerausbildung	8
1.1.2.3	Baustatische Modellbildung diskreter Auflagerungen	9
1.1.3	Versteifungskonstruktionen	12
1.1.4	Traditionelle baustatische Modellbildungen	14
1.1.4.1	Abtragung des rotationssymmetrischen Lastanteiles	18
1.1.4.2	Lastabtragung des nicht-rotationssymmetrischen Anteiles	18
1.1.4.3	Modell 1 — Basisringträgersystem	22
1.1.4.4	Modell 2 — Schaftsystem	25
1.1.4.5	Modell 3 — Kombiniertes Schaft-Basisringträger-System	28
1.2	Stand des Wissens	30
1.2.1	Linear-elastische Spannungsberechnungen	31
1.2.1.1	Isolierter Schaft	31
1.2.1.2	Basisringträger	32
1.2.1.3	Trichter-Schaft-Übergang	32
1.2.1.4	Silogesamtsystem	33
1.2.2	Bemessung bzw. Tragfähigkeitsabschätzung auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen	33
1.2.2.1	Abschätzung der elasto-plastischen Grenztragfähigkeit	34
1.2.2.2	Abschätzung der Beultragfähigkeit	36
1.2.3	Nichtlineare Berechnungen	39
1.2.3.1	Nichtlineare Beulberechnungen für lokale Randauflagerung	39
1.2.3.2	Schaft mit Längsversteifungen	39
1.2.3.3	Materiell nichtlineare Berechnungen des Trichter-Schaft-Überganges	40
1.2.4	Aktuelle Normenregelungen	40
1.2.4.1	Entwurf und Bemessung	40
1.2.4.2	Lastannahmen	43
1.3	Problemstellung	44
1.3.1	Anforderungen an die Siloberechnung	44
1.3.2	Modellbildung	46
1.3.3	Numerische Berechnungsverfahren	47
1.3.4	Analytische Berechnungsverfahren	48

2	Ziel und Umfang der Arbeit	49
2.1	Ziel der Arbeit	52
2.1.1	Entwicklung verfeinerter Berechnungsmodelle für herausgelöste Teiltragsysteme	53
2.1.2	Anwendung verfeinerter Berechnungsmethoden	54
2.1.3	Bereitstellung von Bemessungsmethoden	54
2.2	Umfang der Arbeit	55
2.2.1	Hauptteil — Kapitel 3 bis 8	55
2.2.2	Anhang — Theoretische Berechnungsgrundlagen	63
3	Grundlegende Modellbildungsstrategien für Stahlsilotragwerke	65
3.1	Hierarchie baustatischer Modellbildungsstufen	68
3.1.1	Beispielhafte Darstellung der Modellbildungsstufen	69
3.1.2	Modellbildung des Trichter-Schaft-Überganges	71
3.2	Aktuell vorgenommene Modellbildungen	74
3.2.1	Zerlegung in Teiltragsysteme und deren Kraftwirkungen	77
3.2.1.1	Beschreibung des kräftemäßigen Zusammenwirkens der Teiltragsysteme	77
3.2.1.2	Kinematische Kompatibilität zwischen Trichter und Schaft	81
3.2.2	Zusammenfassender Vergleich aktuell vorgenommener und traditioneller baustatischer Modellbildungen	82
3.2.2.1	Trichter — optionale lokale Schottblechauflagerung	82
3.2.2.2	Trichter-Schaft-Übergang — plastische Interaktion zufolge rotationssymmetrischer Beanspruchungen	82
3.2.2.3	Basisringträger	82
3.2.2.4	Schaft-Längssteifen-System	83
3.3	Baustatische Modellbildung für Einzelkomponenten von Stahlsilokonstruktionen	83
3.3.1	Schalensegmente	84
3.3.2	Ringsteifen und Längssteifen	84
3.3.3	Verbindungen von Schalensegmenten	86
3.3.4	Auflagerungen	87
3.3.5	Schottblech	88

4	Trichter	91
4.1	Einführung	94
4.1.1	Stand des Wissens	95
4.1.2	Lastabtragung am herausgelösten Trichter	95
4.1.3	Auflagerung des Silotrichters	96
4.1.4	Aufteilung der Gesamlastabtragung	98
4.1.4.1	Globale rotationssymmetrische Lastabtragung	98
4.1.4.2	Lokale Lastabtragung	99
4.1.5	Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit	102
4.1.6	Vereinfachte Trichterbelastung	105
4.2	Plastische Grenztragfähigkeit des Trichters bei rotationssymmetrischer Lastabtragung	106
4.2.1	Gleichgewichtsgleichungen der Membranschale	106
4.2.2	Schnittkräfte und Tragfähigkeiten	107
4.2.2.1	Membranschnittkräfte	107
4.2.2.2	Tragfähigkeiten der Membranschale bei rotationssymmetrischer Lastabtragung	108
4.2.2.3	Schnittkräfte im Traglastzustand der Membranschale	108
4.3	Plastische Grenztragfähigkeit des Trichters bei lokaler Lastabtragung	112
4.3.1	Berechnungsmodell	113
4.3.2	Lokale Auflagerung in Meridianrichtung (=Schubkraftlagerung)	114
4.3.2.1	Auflagerungsbedingungen	114
4.3.2.2	Parametervariationen	115
4.3.2.3	Plastische Grenztragfähigkeit bei lokaler Lastabtragung	115
4.3.2.4	Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung	119
4.3.3	Lokale Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung)	121
4.3.3.1	Auflagerungsbedingungen	121
4.3.3.2	Parametervariationen	121
4.3.3.3	Plastische Tragfähigkeit bei lokaler Lastabtragung	122
4.3.3.4	Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung	125
4.3.4	Interaktion von Schubkraftlagerung und Meridiannormalkraftlagerung	128
4.3.4.1	Berechnungsmodell	128
4.3.4.2	Plastische Grenztragfähigkeiten bei lokaler Auflagerung	129
4.3.4.3	Interaktion von rotationssymmetrischer und lokaler Lastabtragung	131
4.4	Entwicklung verfeinerter Bemessungsformeln	133
4.4.1	Lokale Schubkraftlagerung	133
4.4.1.1	Plastische Tragfähigkeit der Schubkraftlagerung	133
4.4.1.2	Berücksichtigung von Interaktionseffekten	133
4.4.1.3	Vergleich mit den MNA-Berechnungen	135

4.4.2	Lokale Meridiannormalkraftlagerung	138
4.4.2.1	Plastische Tragfähigkeit der lokalen Meridiannormalkraftlagerung	138
4.4.2.2	Berücksichtigung von Interaktionseffekten	138
4.4.2.3	Vergleich mit MNA-Berechnungen	140
4.4.3	Lokale Auflagerung in Meridian- und Umfangsrichtung	143
4.5	Tragfähigkeitsabschätzung auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen	144
4.5.1	Lokale Lastabtragung am Trichter	144
4.5.2	Membranschnittkraftverteilungen	145
4.5.2.1	Gleichgewichtsgleichungen	146
4.5.2.2	Graphische Darstellung der Membrankräfte	149
4.5.2.3	Berechnungsbeispiel	152
4.5.3	Linear-elastische Spannungsberechnungen	153
4.5.3.1	Lokale Schubkraftauflagerung (=Schottblechlagerung)	153
4.5.3.2	Lokale Meridiannormalkraftlagerung	157
4.6	Zusammenfassung von Kap. 4	161
5	Trichter-Schaft-Übergang	163
5.1	Einführung	166
5.1.1	Verwendung mitwirkender Breiten	166
5.1.2	Problemstellung	167
5.1.3	Existierende Lösungen für spezielle Fälle	168
5.1.3.1	Plastische mitwirkende Breiten für Kreiszylinderschalen	168
5.1.3.2	Mitwirkende Breiten von Kegelschalen	170
5.1.3.3	Berechnung der Tragfähigkeit von Schalenstößen nach Rotter und Teng	170
5.2	Untersuchung der Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung	172
5.2.1	Rechenmodell und Untersuchungsplan	172
5.2.2	Radiale Ringlast im Schaleninneren	173
5.2.2.1	Symmetrisches Berechnungsmodell	173
5.2.2.2	Spannungsbasierte Berechnung der Tragfähigkeit	174
5.2.2.3	Approximative Berechnung der Tragfähigkeit	176
5.2.2.4	Materiell nichtlineare Berechnungen (MNA)	177
5.2.3	Radiale Ringlast am freien Schalenrand	182
5.2.3.1	Kreiszylinderschale mit freiem Rand	182
5.2.3.2	Spannungsbasierte Berechnung der Tragfähigkeit	182
5.2.3.3	Materiell nichtlineare Berechnungen	184

5.3	Entwicklung “vollplastischer“ Bemessungsformeln	188
5.3.1	Interaktionsformel	188
5.3.2	Abminderungsbeiwerte für mitwirkende Breiten	191
5.3.3	Erweiterung der “effective area method“	193
5.3.3.1	Vorzeichenregelungen	193
5.3.3.2	Mitwirkende Breite für einen Schalenteil	193
5.3.3.3	Eurocode 3 - Teil 1.6	194
5.4	Anwendungsbeispiele	198
5.4.1	Kreiszyylinderförmiger Behälter mit abgestufter Wanddicke	198
5.4.2	Trichter-Schaft-Standzargenanschluß eines Stahlsilos	202
5.5	Zusammenfassung von Kap. 5	
6	Basisringträger	209
6.1	Tragfunktion und Modellbildung	212
6.1.1	Modellbildungsvarianten	214
6.1.2	Untersuchte Tragsysteme	216
6.1.3	Analytische und numerische Lösungsmethoden	218
6.1.3.1	Linear-elastische Spannungsberechnungen	218
6.1.3.2	Numerische Lösung	220
6.2	Linear-elastische Schnittkraft- und Verformungsberechnungen	221
6.2.1	Überblick durchgeführter Berechnungen	221
6.2.2	Vertikalbelastung	224
6.2.2.1	Isolierter Basisringträger — System “R“	224
6.2.2.2	Schaft-Basisringträger-System — Systeme “R+S“, “S“ bzw. “R“	226
6.2.2.3	Vollständiges Schalenmodell — System “Rs+S“	231
6.2.3	Einzeltorsionsmomentenbelastung	235
6.2.3.1	Isolierter Basisringträger — System “R“	235
6.2.3.2	Schaft-Basisringträger-System — Systeme “R+S“ bzw. “R“	237
6.2.3.3	Ringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung	240
6.2.4	Einzelradialkraftbelastung	246
6.2.4.1	Isolierter Basisringträger — System “R“	246
6.2.4.2	Schaft-Basisringträger-System — Systeme “R+S“ bzw. “S“	247
6.3	Spannungsbasierte Tragfähigkeitsberechnung	251
6.3.1	Vereinfachte Schubspannungsberechnung	251
6.3.2	Plastische Querschnittsinteraktion	252
6.3.2.1	Exakte plastische Querschnittsinteraktion	252
6.3.2.2	Vereinfachte plastische Querschnittsinteraktion	254

6.3.3	Vertikalbelastung	256
6.3.3.1	Isolierter Basisringträger — System “R“	256
6.3.3.2	Schaft-Basisringträger-System — System “R+S“, “S“ bzw. “R“	257
6.3.4	Einzeltorsionsmomentenbelastung	258
6.3.4.1	Isolierter Basisringträger — System “R“	258
6.3.4.2	Schaft-Basisringträger-System — System “R+S“ bzw. “R“	259
6.3.5	Kombinierte Einzelradialkraft- und Einzeltorsionsmomentenbelastung	260
6.3.5.1	Lastsituation	260
6.3.5.2	Isolierter Basisringträger — System “R“	261
6.3.5.3	Schaft-Basisringträger-System — System “R+S“	264
6.4	Materiell nichtlineare Berechnungen	265
6.4.1	Vertikalbelastung	267
6.4.1.1	Isolierter Basisringträger — System “Rs“	267
6.4.1.2	Vollständiges Schalenmodell — System “Rs+S“	267
6.4.2	Einzeltorsionsmomentenbelastung	268
6.4.2.1	Isolierter Basisringträger — System “Rs“	268
6.4.2.2	Vollständiges Schalenmodell — System “Rs+S“	268
6.4.2.3	Isolierter Basisringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung (System “R w0“)— starrplastische Berechnung	269
6.4.3	Kombinierte Einzelradialkraft- und Einzeltorsionsmomentenbelastung	274
6.4.3.1	Isolierter Basisringträger	274
6.4.3.2	Vollständiges Schalenmodell	274
6.4.3.3	Isolierter Basisringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung — Analytische starrplastische Berechnung	276
6.5	Vergleich der Tragfähigkeiten	278
6.5.1	Vertikalbelastung	278
6.5.2	Einzeltorsionsmomentenbelastung	279
6.5.3	Kombinierte Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung	280
6.6	Zusammenfassung von Kap. 6	281
7	Auflagerkrafteinleitungsbereich	283
7.1	Aufteilung der Auflagerkraft	286
7.2	Auflagerkrafteinleitung über das Schottblech in die Standzarge	288
7.2.1	Baustatische Modellierung der Auflagerung	288
7.2.2	Berechnungsmodell	290
7.2.3	Vereinfachte Berechnung	291

7.2.4	Materiell nichtlineare FE-Berechnungen	293
7.2.4.1	Unendlich nachgiebige Auflagerung	293
7.2.4.2	Starre Auflagerung	294
7.2.4.3	Zusammenfassender Vergleich	294
7.3	Zusammenfassung von Kap. 7	297
8	Schaft-Längssteifen-System	299
8.1	Teiltragsystem — Schaft und Auflagerlängssteife	302
8.2	Vollständige linear-elastische Systemberechnung	305
8.2.1	Rechenmodell inklusive Stabilitätseffekten	305
8.2.1.1	Analytische Lösungsmethodik mit Doppelfourierreihenansätzen	307
8.2.1.2	Last- und Verschiebungsansätze der Schale	310
8.2.1.3	Grundgleichungen der Schale bei Doppelfourierreihenlösung	311
8.2.1.4	Steifigkeitsmatrix der Schale für eine Axialwellenzahl n	314
8.2.1.5	Last- und Verschiebungsansätze der Längssteife	316
8.2.1.6	Grundgleichungen der Längssteife bei Einfachfourierreihenlösung	317
8.2.1.7	Elastischer nachgiebiger Verbund von Schale und Längssteife	323
8.2.1.8	Assemblierung der Einzelsteifigkeitsmatrizen der beteiligten Systemkomponenten	325
8.2.1.9	Algorithmische Assemblierung der Einzelsteifigkeitsmatrizen bei Verwendung von Zwangsbedingungen	327
8.2.1.10	Belastungen und Starreinspannkkräfte	332
8.2.1.11	Zusammenfassende Bemerkungen zum Rechenmodell	336
8.2.2	Baustatisches Analogiemodell — Doppelbalken mit elastischer Verbundfuge	338
8.2.2.1	Suche nach möglichen baustatischen Analogiemodellen	338
8.2.2.2	Elastisches Verbundbalkenmodell	339
8.2.2.3	Anwendungen des Doppelbalken-Analogiemodelles	344
8.2.3	Linear-elastische Parameterstudien	357
8.2.3.1	Geometrie und Belastung	357
8.2.3.2	Übersicht durchgeführter Parameterstudien	359
8.2.3.3	Parameterstudie 1 — Variation des Längssteife	362
8.2.3.4	Parameterstudie 2 — Variation der Verbundfugennachgiebigkeit	370
8.2.3.5	Parameterstudie 3 — Variation der Exzentrizität der Längssteife	378
8.2.4	Stabilität der Auflagerlängssteife	386
8.3	Anwendungsbeispiel	391
8.3.1	Durchgeführte Berechnungen und Angabeparameter	391
8.3.1.1	Durchgeführte Berechnungen	391
8.3.1.2	Angabeparameter des Anwendungsbeispiels	392
8.3.1.3	Aufteilung der Gesamtauflagerkraft	394
8.3.1.4	Lastfälle	396

8.3.2	Linear-elastische Spannungsberechnungen	397
8.3.2.1	Spannungsbasierte Bestimmung der Tragfähigkeiten	398
8.3.2.2	Vertikallastfälle	400
8.3.2.3	Vertikallastfälle bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten	411
8.3.2.4	Innendruckbelastung	418
8.3.2.5	Berücksichtigung von Imperfektionen	420
8.3.2.6	Abschätzung der Tragfähigkeiten der Längssteife	422
8.3.2.7	Abschätzung der Tragfähigkeiten der Schale	422
8.3.3	Vereinfachte Stabilitätsberechnungen	424
8.3.3.1	Längssteifenknicken	425
8.3.3.2	Schalenbeulen	431
8.3.4	FE-Beulberechnung — lineare Beuleigenwertberechnung	433
8.3.4.1	Darstellung der Beulversagensformen	434
8.3.4.2	Vergleich mit den vereinfachten Stabilitätsberechnungen	437
8.3.4.3	Beullasterhöhender Einfluß des Innendruckes	439
8.3.4.4	Bestimmung der Beultragfähigkeit des Gesamtsystems auf Basis der linearen Beuleigenwertberechnungen	441
8.3.5	Nichtlineare FE—Vergleichsberechnungen	443
8.3.5.1	Übersicht der nichtlinearen Vergleichsberechnungen	443
8.3.5.2	Geometrisch nichtlineare Beulanalysen (GNA)	446
8.3.5.3	Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen (GMNA)	449
8.3.5.4	Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen des imperfekten Systems (GMNIA)	456
8.3.5.5	Vergleich der Tragfähigkeiten	461
8.3.6	Optimale Auflagerkraftaufteilung	464
8.3.7	Zusammenfassung von Kap. 8.3	469
8.4	Plastische Grenztragfähigkeit der Auflagerlängssteife und der Schalenwand	470
8.4.1	Materiell nichtlineare Berechnungen (MNA)	471
8.4.1.1	Herausgelöste Gleichgewichtssysteme	471
8.4.1.2	Materiell nichtlineare Berechnungen	472
8.4.1.3	Darstellung der Ergebnisse	474
8.4.1.4	Zustandsdiagramme	475
8.4.1.5	Lastabhängige Diagramme	479
8.4.2	Geometrisch nichtlineare Berechnungen (GNA + GMNA)	482
8.4.3	Glättungseffekt zufolge Innendruckbelastung	490
8.4.3.1	Berücksichtigung der Innendruckbelastung	490
8.4.3.2	Nichtlineare Beulberechnungen des imperfekten Schaft-Längssteifen-Systems	491
8.4.4	Zusammenfassung von Kap. 8.4	494
8.5	Effekt der elastischen Nachgiebigkeit der Schraubstöße	495
8.5.1	Berücksichtigung der Stöße von geschraubten Silos	495
8.5.1.1	Bestimmung der Steifigkeit der Schraubstöße	497
8.5.1.2	Bestimmung der orthotropen Ersatzsteifigkeiten	499

8.5.2	Linear-elastische Spannungsberechnungen	500
8.5.2.1	Vertikallastfälle	501
8.5.2.2	Abschätzung der Tragfähigkeiten auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen	511
8.5.3	Nichtlineare FE-Vergleichsberechnungen	513
8.5.4	Vergleich der Tragfähigkeiten linearer und nichtlinearer Berechnungen	518
8.5.5	Zusammenfassung von Kap. 8.5	519
9	Zusammenfassung und Ausblick	521
9.1	Zusammenfassung	523
9.2	Ausblick	527
	Anhang Theoretische Berechnungsgrundlagen	529
A.0	3D-Verzerrungen in Zylinderkoordinaten	533
A.1	Grundgleichungen der Kreiszyinderschale	535
A.1.1	3D-Verzerrungen in Zylinderkoordinaten	536
A.1.2	Kinematik der Zylinderschale	537
A.1.3	Verzerrungen der schubnachgiebigen Kreiszyinderschale	538
A.1.3.1	3D-Verzerrungen	538
A.1.3.2	Aufteilung der 3D-Verzerrungsoperatormatrix	539
A.1.3.3	Elimination der Verzerrungen in Dickenrichtung	540
A.1.4	Schalenschnittgrößen	544
A.1.4.1	Kennflächenorientierte Schalenschnittgrößen	544
A.1.4.2	Schalenschnittgrößen als Spannungsdickenintegrale	546
A.1.4.3	Exakte Bestimmung der Schnittgrößen für linear-elastisch orthotropes Materialverhalten	548
A.1.4.4	Konstitutive Gleichungen der Kreiszyinderschale	550
A.1.4.5	Berechnung der Dickenintegrale J_i	554
A.1.4.6	Approximative Integration in Dickenrichtung	554
A.1.4.7	Beschreibung der Materialsteifigkeitsmatrix mittels integraler Ingenieurkonstanten	556
A.1.5	Gleichgewichtsgleichungen in Differentialform	558
A.1.5.1	Gleichgewicht am Schalenelement	558
A.1.5.2	Gleichgewichtsgleichungen in Matrix-Operator-Darstellung	559
A.1.6	Gleichgewichtsgleichungen in Integralform — Prinzip der virtuellen Arbeiten	560
A.1.7	Mathematische Äquivalenz der Differential- und Integralformulierungen des Gleichgewichtes	562
A.1.7.1	Partielle Integration von Matrixprodukten	562
A.1.7.2	Prinzip der virtuellen Arbeiten	563
A.1.7.3	Anwendung an der schubnachgiebigen Kreiszyinderschale	566

A.1.8	Grundgleichungen der Deformationsmethode	568
A.1.8.1	Allgemeiner Fall der schubnachgiebigen Kreiszylinderschale	569
A.1.8.2	Transversal schubstarre Kreiszylinderschale	571
A.1.8.3	Transversal schubstarre und schwach gekrümmte Kreiszylinderschale	575
A.1.8.4	Mängel der Kreiszylinderschalengleichungen nach Flügge	577
A.1.8.5	Vereinfachte Schalenformulierung nach Donnell	582
A.1.9	Semi-analytische Lösung der Schalengrundgleichungen (Deformationsmethode)	584
A.1.9.1	Berechnungsverfahren	584
A.1.9.2	Aufbereitung der Grundgleichungen der schwach gekrümmten Kreiszylinderschale mittels Reihenentwicklung in Umfangsrichtung	586
A.1.10	Ingenieurmäßige Schalenformulierungen	591
A.1.10.1	Grundannahmen für Schalensteifigkeiten	591
A.1.10.2	Formulierungsvarianten	591
A.1.10.3	Formulierungsvarianten auf Basis der Flügge'schen KZS-Gleichungen	595
A.1.10.4	Formulierungsvarianten auf Basis der vereinfachten Donnell'sche KZS-Gleichungen	599
A.1.11	Klassisches Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 1)	600
A.1.11.1	Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen	601
A.1.11.2	Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen	602
A.1.12	Um die Membranschubsteifigkeit erweitertes klassisches Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 2)	602
A.1.12.1	Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen	603
A.1.12.2	Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen	604
A.1.13	Um die Drillsteifigkeit erweitertes Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 2')	605
A.1.13.1	Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen	605
A.1.13.2	Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen	607
A.1.14	Vollständiges Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 3)	608
A.1.14.1	Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen	608
A.1.14.2	Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen	611
A.1.15	Halb-Biegetheorie-Modell (Variante 4)	613
A.1.15.1	Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen	613
A.1.15.2	Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen	614
A.1.16	Matrixorientierte Lösungsmethodik	616
A.1.16.1	Aufteilung der Verschiebungen	616
A.1.16.2	Homogene Schnittgrößen und Deformationsgleichungen	617
A.1.16.3	Steifigkeitsmatrix	619
A.1.16.4	Partikuläre Schnittkräfte und Verformungen	621
A.1.16.5	Gleichungssystem der Deformationsmethode	623
A.1.17	Vollständige Semimembrantheorie — Anwendung der matrixorientierten Lösungsmethodik	624
A.1.17.1	Steifigkeitsmatrix	626
A.1.17.2	Starreinspannzustand	626
A.1.18	Analytische Lösung baustatischer Differentialgleichungen	629

Inhaltsverzeichnis	XIX	
A.2	Grundgleichungen des elastischen räumlich belasteten Kreisbogenträgers	634
A.2.1	Kinematische Annahmen	635
A.2.2	Schnittkräfte des Kreisbogenträgers	637
A.2.3	Grundgleichungen in Matrixform	639
A.2.3.1	Gleichgewichtsdifferentialgleichungen	639
A.2.3.2	Konstitutive Gleichungen	639
A.2.3.3	Grundgleichung der Deformationsmethode	640
A.2.3.4	Elastische Bettung des Kreisbogenträgers	642
A.2.3.5	Sonderfälle des räumlichen Kreisringträgers	647
Literatur		649
Lebenslauf		657

Notation

Berechnungsverfahren

FE	Finite Elemente
MA	Membranberechnung
LA	Lineare Spanungsberechnung
CBEV	lineare Beuleigenwertberechnung
ABEV	approximative Beuleigenwertberechnung (Abschätzung des Beuleigenwertes auf Basis linear-elastischer Spannungsverteilungen)
MNA	Materiell nichtlineare Berechnung
GNA	Geometrisch nichtlineare Berechnung
GNIA	Geometrisch nichtlineare Berechnung des imperfekten Systems
GMNA	Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnung
GMNIA	Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnung des imperfekten Systems

Geometrieparameter

R	Radius des Schaftes bzw. am oberen Trichterrand (Schalenmittelfläche)
r	beliebiger aktueller Radius
r_S	Radius am Schwerpunkt des Kreisringträgers
r_M	Radius am Schubmittelpunkt des Kreisringträgers
L	Schafthöhe, Länge des Trichtermeridians
h_S	Höhe der Standzarge
β	Trichterneigungswinkel gemessen gegen die Vertikale
t	Wanddicke (Indizes $_s$ Standzarge, $_c$ Schaft, $_h$ Trichter)
t_S	Dicke des Schottbleches
d	Lagerbreite der Randlagerung in Umfangsrichtung an Standzarge bzw. Trichter
d_S	Lagerlänge der lokalen Lagerung in Meridianrichtung am Trichter (Schottblechlagerung)
x	Meridiankoordinate (Axialkoordinate)

$\xi = x/R$	bezogene Meridiankoordinate
$\xi = x/L$	bezogene Axialkoordinate
s	Meridiankoordinate des Trichters
Θ	Umfangskoordinate
y	Querschnittskoordinate in radialer Richtung (Kreisringträger)
z	Dickenkoordinate, Querschnittskoordinate in vertikaler Richtung (Kreisringträger) bzw. in Transversalrichtung (Längssteife)
$\zeta = z/R$	bezogene Dickenkoordinate
n, n_{St}	Anzahl der Einzelauflagerungen

Auflagerkräfte

F	Gesamtauflegerkraft
F_L	Auflagerkraft der Auflagerlängssteife
F_Z	Auflagerkraft der Randlagerung der Standzarge
F_S	Auflagerkraft des Schottbleches der Standzarge
T	Auflagerkraft am Trichter zufolge der lokalen Lagerung in Meridianrichtung
F	Auflagerkraft am Trichter zufolge der lokalen Lagerung in Umfangsrichtung

Index y bezieht sich auf die Auflagerkräfte bei Erreichen der Fließtragfähigkeit

Belastungen

p_x	Flächenbelastung in Meridianrichtung an Trichter bzw. Schaft und Standzarge (Wandreibungslast)
p_Θ	Flächenbelastung in Umfangsrichtung an Trichter bzw. Schaft und Standzarge
p_n	Flächenbelastung in Schalennormalenrichtung an Trichter bzw. Schaft und Standzarge (Wanddruckbelastung)
P_x	axiale Linienlast
P_n	radiale Linienlast (Ringlast), Indizes $_{int}$ für innere radiale Linienlast (Umlenkkomponente) bzw. $_{ext}$ für äußere radiale Linienlast

Materialparameter

E	Elastizitätsmodul
ν	Querdehnungsziffer
G	Schubsteifigkeit
f_y	Fließspannung

Berechnungsparameter

Λ	Lastfaktor
EV	Beuleigenwert der linearen Beuleigenwertberechnung (CBEV)
R_{pl}	Plastische Systemtragfähigkeit
R_{CR}	Kritische Systemverzweigungslast
$\bar{\lambda}$	bezogener Schlankheitsgrad
$\bar{\lambda}_{ov}$	bezogener Systemschlankheitsgrad

Spannungen, Schnittkräfte, Verformungen, Belastungen und Verzerrungen

\mathbf{s}	Spannungsvektor
$\mathbf{s}_{3D} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{zz} \ \tau_{x\theta} \ \tau_{xz} \ \tau_{\theta z}]^T$	Spannungsvektor des 3D-Kontinuums
\mathbf{n}	Schnittkraftvektor
$\mathbf{n} = [n_x \ n_\theta \ n_{x\theta} \ m_x/R \ m_\theta/R \ m_{x\theta}/R \ q_x \ q_\theta]^T$	Schnittkraftvektor der Kreiszyinderschale — Meridiankraft, Umfangskraft, Schubkraft, Meridianbiegemoment
$\mathbf{n} = [N \ Q \ M/R]^T$	Schnittkraftvektor der Auflagerlängssteife — Normalkraft, Querkraft und Biegemoment
$\mathbf{n} = [N \ Q_y \ Q_z \ M_t/r_S \ M_y/r_S \ M_z/r_S]^T$	Schnittkraftvektor des Kreisringträgers — Normalkraft, Querkräfte, Torsionsmoment, Biegemomente
\mathbf{u}	Verformungskomponentenvektor allgemein
$\mathbf{u} = [u \ v \ w \ \beta_x \cdot R \ \beta_\theta \cdot R]^T$	Verformungsvektor der Kreiszyinderschale — Meridian(Axial)-, Umfangs- und Radialverschiebung bzw. Biegedrehwinkel

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & w & \beta_y \cdot R \end{bmatrix}^T$$

Verformungsvektor der Längssteife — Axial-, Transversalverschiebung und Biegedrehwinkel

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & v & w & \varphi \cdot r_S & \beta_y \cdot r_S & \beta_z r_S \end{bmatrix}^T$$

Verformungsvektor des Kreisringträgers — Umfangs-, Radial- und Vertikalverschiebung bzw. Torsionsdrehwinkel und Biegedrehwinkel

\mathbf{p} Lastvektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_\theta & p_n & m_x/R & m_\theta/R \end{bmatrix}^T$$

Lastvektor der Schale — Meridian-, Umfangs- und Normalenflächenbelastung bzw. Momentenbelastungen

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_x & q_z & m/R \end{bmatrix}^T$$

Lastvektor der Auflagerlängssteife — Axial-, Transversalbelastung bzw. Streckenmomentenbelastung

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z & m_t/r_S & m_y/r_S & m_z/r_S \end{bmatrix}^T$$

Lastvektor des Kreisringträgers — Umfangs-, Radial- und Vertikalbelastung bzw. Strecktorsions- und Streckenbiegemomentenbelastungen

\mathbf{r} Starreinspannkkräftevektor

\mathbf{e} Verzerrungsvektor allgemein

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{x\theta} & \gamma_{xz} & \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}^T$$

Verzerrungen des 3D-Kontinuums

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_\theta & \gamma_{x\theta} & \kappa_x R & \kappa_\theta R & \kappa_{x\theta} R & \gamma_{xz} & \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}^T$$

Schalenverzerrungen — Meridian-, Umfangsdehnung und Membranschubverzerrung bzw. Biege- und Drillkrümmungen und Querschubgleitungen

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \bar{\gamma} & \kappa R \end{bmatrix}^T$$

Verzerrungen der Längssteife — Axialdehnung, Querschubverzerrung bzw. Biegekrümmung

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \bar{\gamma}_y & \bar{\gamma}_z & \vartheta r_S & \kappa_y r_S & \kappa_z r_S \end{bmatrix}^T$$

Verzerrungen des Kreisringträgers — Umfangsdehnung, Querschubverzerrungen, Torsionsverdrillung und Biegekrümmungen

Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen

D Materialsteifigkeitsmatrix
Index $_{3D}$ 3D-Kontinuum

K Steifigkeitsmatrix

F Nachgiebigkeitsmatrix

Indizes $_S$ Schale, $_B$ Auflagerlängssteife(Balken), $_C$ elastisches Verbundfugenelement
bzw. $_{II}$ Berechnung nach Theorie 2. Ordnung und $_m$ Umfangswellenzahl bzw. $_n$ Axialwellenzahl

Schalensteifigkeiten

D_x, D_θ, D_v Axial- und Umfangsdehnsteifigkeiten, Querkontraktionsdehnsteifigkeit

$S_{x\theta}$ Membranschubsteifigkeit

K_x, K_θ, K_v Biegesteifigkeiten in Axial- und Umfangsrichtung, Querkontraktionsbiegesteifigkeit

$K_{x\theta}$ Drillsteifigkeit

$S_{\theta z}, S_{xz}$ Querschubsteifigkeiten

$k = K_\theta / (D_x R^2)$ bezogene Umfangsbiegesteifigkeit

$\nu, \rho, \eta, \lambda, \mu, \zeta$ dimensionslose Steifigkeitsparameter (Bezugsgröße ist die Axialdehnsteifigkeit D_x)

Steifigkeiten der elastischen Verbundfuge

C_{II}, C_\perp Steifigkeiten der elastischen Verbundfuge in Axial- und Transversalrichtung

Querschnittsteifigkeiten der Auflagerlängssteife

$D = EA$ Dehnsteifigkeit

GA_S Querschubsteifigkeit

EI_{zz} / R^2 bezogene Biegesteifigkeit

Querschnittsteifigkeiten des Ringträgers

$D = EA$ Dehnsteifigkeit

$S_{ij} = GA_{Sij}$ Querschubsteifigkeiten

$K_{ij} = EI_{ij} / r_S^2$ Biegesteifigkeiten

$S_t = G I_t / r_S^2$ St. Venant'sche Torsionssteifigkeit

$K_w = E I_w / r_S^4$ Wölbsteifigkeit

Differentialoperatoren

$\frac{\partial}{\partial \xi} = ()'_{\xi}$ Ableitung nach der bezogenen Meridiankoordinate (Axialkoordinate)

$\frac{\partial}{\partial \Theta} = ()'_{\Theta}$ Ableitung nach der bezogenen Umfangskoordinate

$\frac{\partial}{\partial \zeta} = ()'_{\zeta}$ Ableitung nach der bezogenen Dickenkoordinate

Differentialoperatormatrizen

B Verzerrungsoperatormatrix

$\tilde{\mathbf{B}}$ Gleichgewichtsoperatormatrix

K Steifigkeitsoperatormatrix

T Transformationsmatrix

1

EINLEITUNG, STAND DES WISSENS UND PROBLEMSTELLUNG

Inhalt von Kapitel 1:

- 1.1 Einleitung**
- 1.2 Stand des Wissens**
- 1.3 Problemstellung**

1.1 Einleitung

Im folgenden erfolgt eine Kurzbeschreibung der Charakteristika von Stahlsilokonstruktionen, die prinzipielle Klassifizierung der Siloauflagerung und folglich die Darstellung der für Silos mit diskreter Auflagerung wesentlichen Auflagerausbildung, weiters die Darstellung verschiedenster Möglichkeiten von Versteifungskonstruktionen und letztendlich eine Übersicht über die grundsätzlich für die Siloberechnung anzuwendenden traditionellen baustatischen Modellbildungen.

1.1.1 Charakteristika von Stahlsilokonstruktionen

Der Zweck von Silokonstruktionen liegt in der Lagerung von Gütern verschiedenster Art in Bereichen von der Rohstoffgewinnung über die rohstoffverarbeitende Industrie bis hin zur Zwischenlagerung vor der Endverarbeitung. Die Größenordnung derartiger Silos reicht vom einfachen Baustellensilo mit z.B. 10 m^3 über mittelgroße Silos (z.B. Silos einer Mischanlage) mit 1000 m^3 bis hin zu Großraumsilos (z.B. Getreide- oder Kohlesilos) mit 10000 m^3 Rauminhalt.

Aus Bedienungsgründen, das heißt passive Entnahme des Lagergutes unter Wirkung der Schwerkraft, ergibt sich vielfach die Notwendigkeit der Anordnung der Stahlsilokonstruktion auf Traggerüsten in beträchtlicher Höhe. Zur Bereitstellung eines technisch hochwertigen Produktes werden vielfach Silos aus Stahl oder Aluminium gebaut. Als alternative Konstruktionsmaterialien kommen fallweise Beton oder Kunststoffe aber auch Holz in Frage. Zumeist kommen Silos mit kreisförmigem Querschnitt zur Ausführung. Der Vorteil liegt darin, daß optimal lastabtragende Konstruktionen in äußerst dünnwandiger Bauweise mit einem Minimum an Versteifungselementen konzipierbar sind.

Die in Bild 1-1 dargestellte Silokonstruktion aus Stahl ist auf Einzelstützen gelagert. Die Gesamtsilokonstruktion besteht aus dem Traggerüst des Silos und dem Silo selbst. Der Silo besteht aus seinen funktionellen Einzelteilen, die in Tab. 1-1 mit ihren deutschen und englischen Bezeichnungen entsprechend ihrer Lage in Bild 1-1 eingeordnet sind.

Der Auslauftrichter und der Schaft dienen zur Lagerung des Silofüllgutes, der Dachkonus bildet den oberen Abschluß des Silos und schützt das Füllgut vor Witterungseinflüssen. In Bild 1-1 ist exemplarisch für eine bestimmte Ausführungsvariante die Ansicht und die Draufsicht dargestellt. Zur Identifikation der Einzelkomponenten des Silos sind diese in ihrer Lage schematisch in Bild 1-1.c dargestellt.

Typische Merkmale von Stahlsilokonstruktionen sind:

- die Dünnwandigkeit der einzelnen Schalenteile
- die diskrete Anordnung von Auflagerungen und Versteifungselementen wie Ring- bzw. Längssteifen

Weiters kann durch den Modulcharakter der einzelnen Konstruktionsteile ein Baukastensystem konzipiert

werden, das transportierbar und vor Ort leicht zusammenbaubar ist. Eine typische komplexe Konstruktionsform ist in Bild 1-1 dargestellt:

- Der Schaft besteht aus Einzelschalensegmenten, die durch horizontale und vertikale Schraubstöße verbunden sind.
- Die über die gesamte Schafthöhe angeordneten Auflagerlängssteifen dienen neben ihrer Tragfunktion zur Einleitung der Auflagerkräfte auch als Beulsteifen und als Stoßlaschen der vertikalen Schalenschraubstöße.

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Silos mit kreisförmigem Querschnitt behandelt.

Tab. 1-1 Beschreibung der Siloeinzelteile entsprechend Bild 1-1

deutsche Bezeichnung		english terminology	
Gesamtsilokonstruktion	Überkonstruktion		optional upper structure (surrounding structure above the silo)
	Silo	kegelförmiges Dach	conical roof
		zylindrischer Schaft	cylindrical barrel
		Trichter-Schaft-Übergang	transition junction
		zylindrische Standzarge (=Teil des Schaftes unter dem Trichteranschluß)	cylindrical skirt (=part of the barrel below the transition junction)
		Basisringblech	annular base ring plate
		kegelförmiger (Auslauf-)Trichter	conical hopper
	Unterkonstruktion (Silotraggerüst)		supporting structure
	global structure	silostucture	

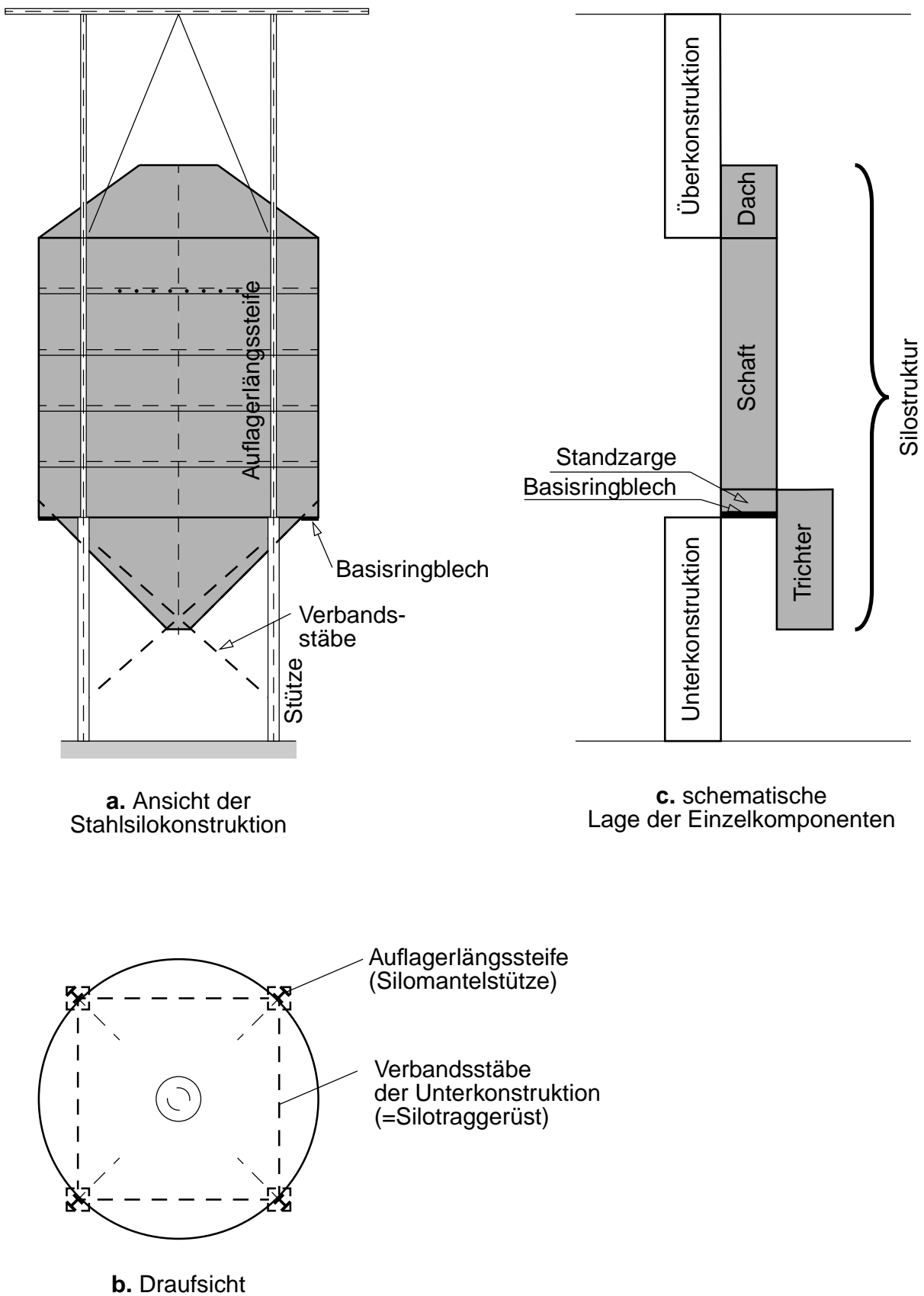


Bild 1-1 Beispiel einer Stahlsilokonstruktion mit diskreter Auflagerung auf Einzelstützen

1.1.2 Auflagerungsarten

Die Auflagerung stellt neben den Versteifungskonstruktionen das wichtigste Charakteristikum einer Stahlsilokonstruktion dar. Die Siloaullagerung wird deshalb im folgenden detailliert besprochen:

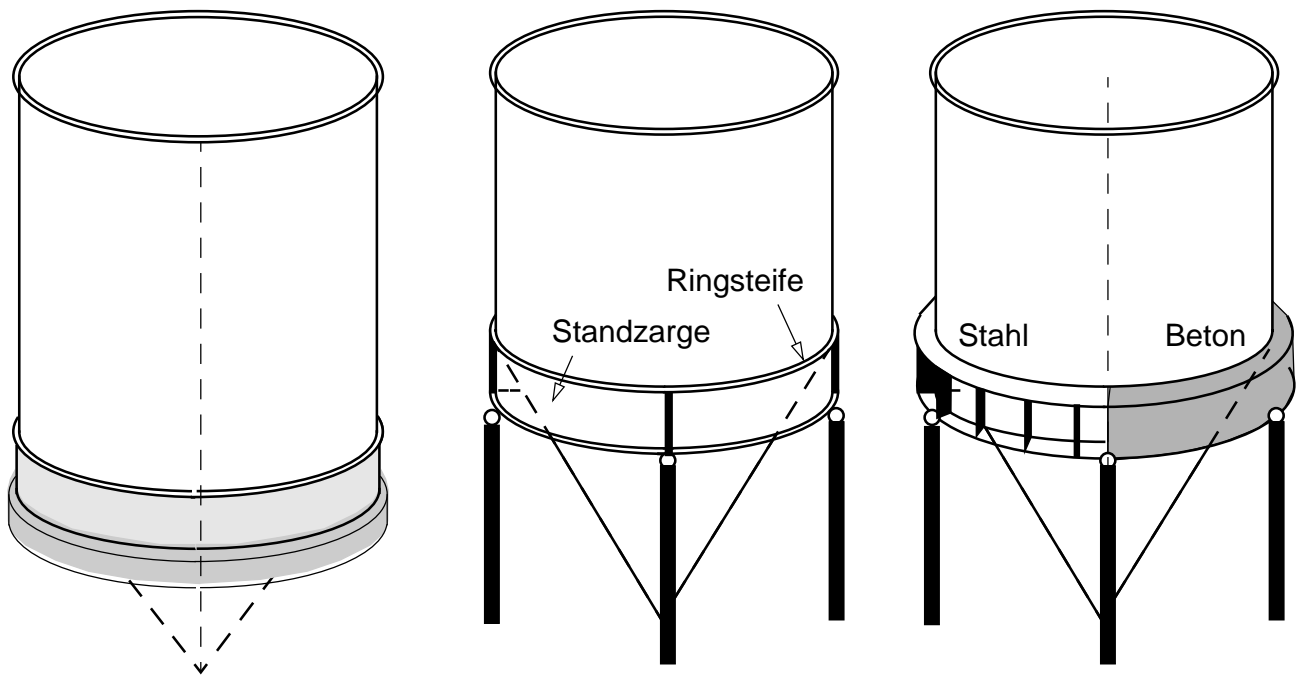
- prinzipielle Auflagerung in Umfangsrichtung
- diskrete Auflagerausbildung
- baustatische Modellbildung diskreter Auflagerungen

1.1.2.1 Auflagerung in Umfangsrichtung

Die wesentliche Unterscheidung der Auflagerung eines Silos geschieht hinsichtlich einer

- kontinuierlichen, rotationssymmetrischen Lagerung oder einer
- diskreten Auflagerung.

Eine Ausführung von abschnittsweise kontinuierlichen Auflagerungsbereichen (bedingt z.B. durch Zugangsöffnungen in Betonfundamenten) ist den diskreten Auflagerungen mit endlicher Auflagerbreite zuzuordnen.



a. kontinuierliche starre Auflagerung (z.B. Betonfundament)

b. leichtes integriertes Gesamtsystem mit Standzarge und Ringsteife

c. nachgiebiger, schwerer (externer) Basisringträger

Bild 1-2 Auflagerungsarten

In Bild 1-2.a ist die kontinuierliche Auflagerung auf einem Betonfundament bzw. die diskrete Einzelauf Lagerung des Silos auf einem Traggerüst (hier Einzelstützen) dargestellt, wobei in Bild 1-2.b der Gesamtsilo an der Lastabtragung über den Einzelstützen mitwirkt. In Bild 1-2.c übernimmt die Lastabtragung der Gesamtvertikalbelastung über den Einzelstützen ein massiver Basisringträger (aus Stahl oder Beton). Der Silo, der über diesem Basisringträger angeordnet ist, kann bei entsprechend steifer Ausführung als kontinuierlich gelagert betrachtet werden und der Basisringträger kann folglich als externer Basisringträger bezeichnet werden. Es sind hierbei aber Kompatibilitätsbeanspruchungen des Silos, die sich zufolge ungleichförmiger Vertikalverformungen des externen Basisringträgers ergeben, zu beachten.

Die zuvor dargestellten Lagerungsarten beziehen sich, wie dargestellt auf eine aufgeständerte Anordnung des Silos. Komplementär dazu kann fallweise eine hängende Lagerung des Silos zur Ausführung kommen, auf die im weiteren jedoch nicht eingegangen wird.

1.1.2.2 Diskrete Auflagerausbildung

Die Einleitung der Auflagerkräfte bei diskret gelagerten Silos kann neben der direkten Einleitung der Lagerkräfte in den Zylinderschaft auch indirekt über zusätzliche Versteifungskonstruktionen (=Krafteinleitungssteifen) erfolgen.

In Bild 1-3 ist eine von mehreren denkbar möglichen Auflagerausbildungen dargestellt. Die Mechanismen der Auflagerkrafteinleitung dieser exemplarischen Ausbildung stellen sich wie folgt dar:

- Auflagerkrafteinleitung über die lokale oder durchgehende Auflagerlängssteife (Fläche A_L)
- Auflagerkrafteinleitung über die lokale Randauf Lagerung des Schaftes (=Zargenauf Lagerung — Fläche A_Z)
- Auflagerkrafteinleitung über das Schottblech (Fläche A_S), das im vorliegenden Fall im Verschneidungsbereich von Schaft und Trichter in den Auflagermeridianen angeordnet ist und kraftschlüssig mit Schaft, Trichter und Basisringblech verbunden ist.

Die Auflagernettofläche rekrutiert sich aus den vorhandenen Teilflächen $A = A_L + A_Z + A_S$, entsprechend der anteilmäßig einzuleitenden Auflagerteilkräfte im Falle gleicher Materialfestigkeit (=Fließgrenze) aller Lasteinleitungskomponenten:

$$F = F_L + F_Z + F_S = f_y \cdot (A_L + A_Z + A_S) = f_y \cdot A \quad (1-1)$$

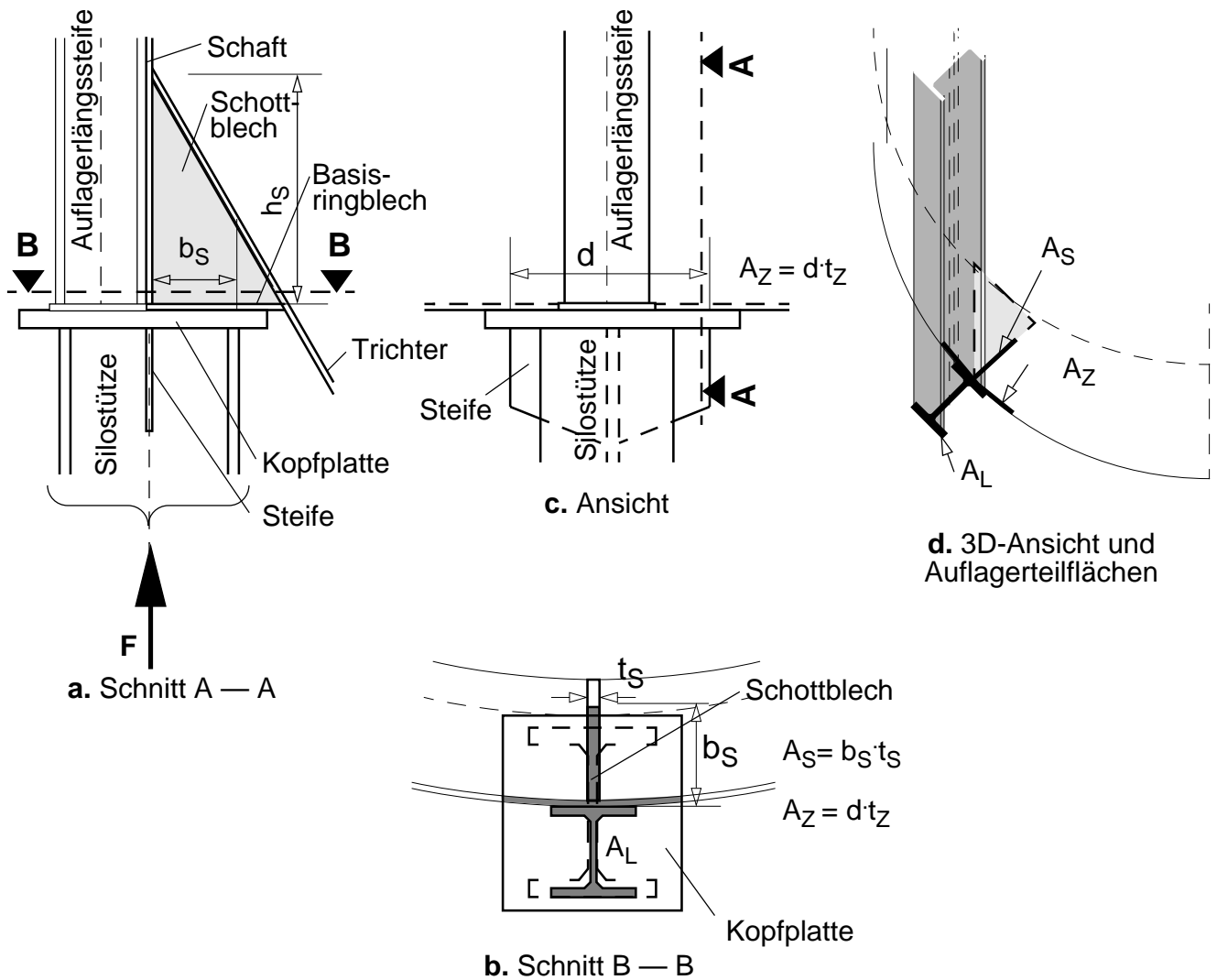


Bild 1-3 Auflagerausbildung

1.1.2.3 Baustatische Modellbildung diskreter Auflagerungen

Die baustatische Modellierung diskreter Auflagerungen kann prinzipiell, wie in Bild 1-4 dargestellt, erfolgen:

- starre Auflagerung
- (elastisch) nachgiebige Auflagerung
- unendlich nachgiebige Auflagerung durch die Vorgabe von Kräftegleichgewichtsgruppen

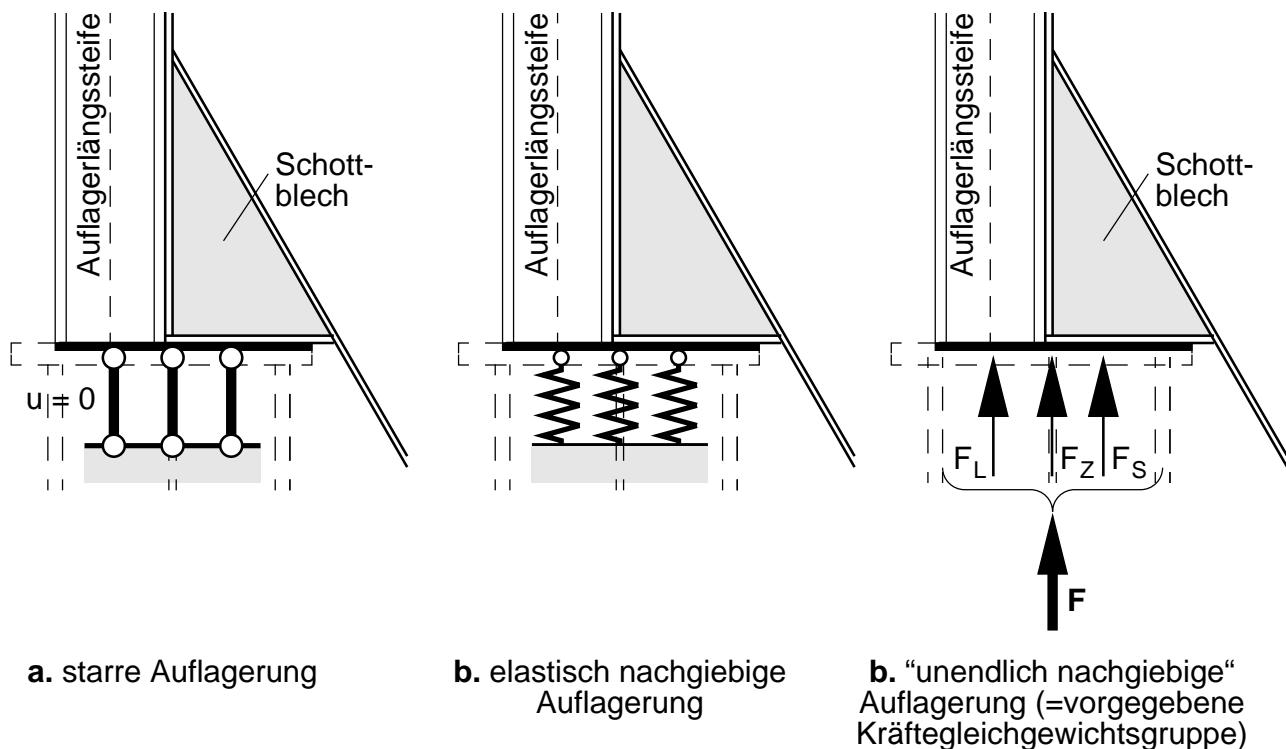


Bild 1-4 Lagerungsbedingungen

Starre Auflagerung

Die Auflagerung des Silos auf Einzelstützen bedingt bei entsprechender Ausführung eine Verhinderung der Verschiebungen in axialer Richtung ($u = 0$). Am Stützenkopf ist in Bild 1-3 eine ausgesteifte Kopfplatte angeordnet. Durch diese Ausführung kann angenommen werden, daß die Verschiebungsverhinderung in Bild 1-4.a in der gesamten Auflagerfläche perfekt zutrifft. Diese Siloaullagerung kann somit im Grenzfall als starr angesehen werden.

Elastisch nachgiebige Auflagerung

Die Nachgiebigkeit der Auflagerfläche bzw. die Nachgiebigkeit des Silotragerüstes kann durch die Modellierung mit perfekt elastisch nachgiebigen Lagerfedern in Bild 1-4.b mit unterschiedlichen Federsteifigkeiten erfolgen. Die Kräfteaufteilung erfolgt somit entsprechend den Steifigkeitsverhältnissen der Lagerfedern, welche ihrerseits von den Steifigkeiten der Auflagerkomponenten abhängen. Den einzelnen Auflagerfedern könnte gegebenenfalls auch eine nichtlineare Charakteristik zugewiesen werden. Außerdem könnten die Federsteifigkeiten über die Profilmittellinien der Auflagerquerschnitte als kontinuierlich verteilt angenommen werden.

Vorgegebene statisch bestimmte Kraftgleichgewichtsgruppen

Die dritte Möglichkeit stellt die Vorgabe einer "unendlich nachgiebigen" Auflagerfläche dar. Durch die Vorgabe von Kräftegleichgewichtsgruppen — hier durch drei statisch bestimmt aufgeteilte

Auflagerteilkräfte — kann dieser Grenzfall realisiert werden und es wird auf die tatsächliche Nachgiebigkeit des Auflagerdetails nicht eingegangen.

Entsprechend der anteiligen Lagerfläche kann in Bild 1-4.c eine Aufteilung der Gesamtlagerkraft in Auflagerteilkräfte erfolgen.

Für das vorliegende Auflagerdetail wird die Lagerkraft F in drei Auflagerteilkräfte $F = F_L + F_S + F_Z$ folgendermaßen aufgeteilt:

- Auflagerkraft F_L der Längssteife
- Auflagerkraft F_S des Schottbleches
- Auflagerkraft F_Z der lokalen Randauflagerung des Schaftes

In Bild 1-5 sind zur Verdeutlichung nochmals die Einleitungen dieser Komponenten der Auflagerkraft dargestellt:

- zentrische Einleitung in die Längssteife (Bild 1-5.a)
- Einleitung mit konstant verteilten Meridiankräften innerhalb der lokalen Randlagerung des Schaftes (Bild 1-5.b)
- Einleitung mit konstant verteilten Schubkräften über das Schottblech in den Schaft (Bild 1-5.c)

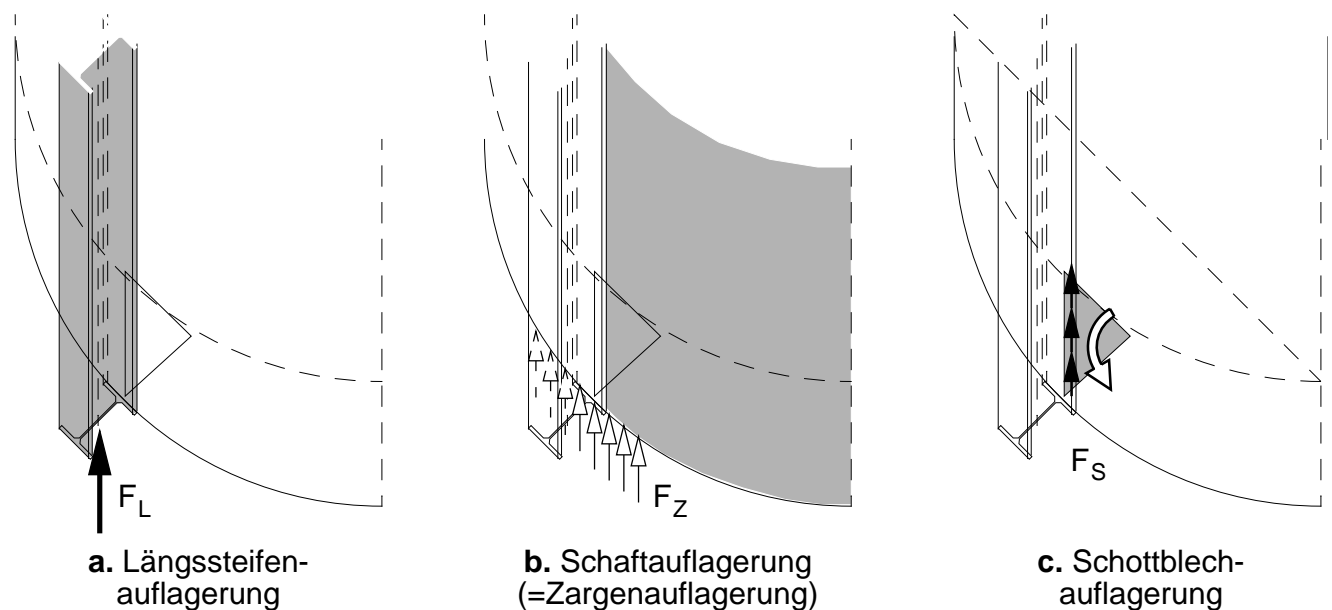


Bild 1-5 Einleitung der Auflagerteilkräfte

In Bild 1-5.c ist noch zusätzlich ein aus Gleichgewichtsgründen — bedingt durch die Exzentrizität der Schottblechlagerkraft und den Einleitungskräften in den Schaft — notwendiges Haltemoment am Schottblech dargestellt. Über die konsequente statische Abtragung dieser Kraftkomponente wird in Kap. 3 genauer eingegangen.

1.1.3 Versteifungskonstruktionen

Die dominierenden konzentrierten Kraftwirkungen stellen bei einzelgestützten Silokonstruktionen die vertikalen Auflagerkräfte dar. Die Einleitung dieser Lagerkräfte kann zumeist aufgrund ihrer Größenordnung nicht ausschließlich direkt über die lokale Randlagerung in den Schaft des Silos erfolgen (Kraft F_Z in Bild 1-5). Neben der Bereitstellung der erforderlichen Auflagerfläche (siehe Kap. 1.1.2.2) müssen gegebenenfalls zusätzliche Versteifungselemente wie Längssteifen bzw. Ringsteifen zur Gewährleistung einer ausreichenden Tragfähigkeit — respektive der Beultragfähigkeit — angeordnet werden. Verschiedenste Versteifungskonstruktionen, bestehend aus einer kombinierten Anordnung von Längssteifen und Ringsteifen, können zur Erfüllung der gestellten Anforderungen gewählt werden.

Obligatorische Versteifungselemente für den Siloschaft sind zunächst ein oberer und unterer Randring. Sie stellen am zylindrischen Schaft im Grenzfall perfekte Endquerschottbedingungen (=starre Querscheiben) her. Vor allem bei ungleichförmigen Belastungen sind sie wesentlich zur Erzielung eines tragfähigen Zylinderschaftes (Öry (1984), Greiner (1984)) bzw. folglich einer tragfähigen Gesamtstruktur. Der obere Randring kann in seiner Tragwirkung zur Gewährleistung der Endquerschottbedingungen auch durch den Dachkonus gegeben sein. Der untere Randring kann auch durch ein integriertes Basisringblech, das wie in Bild 1-3 dargestellt optional an den Trichter angebunden ist, realisiert werden.

In Bild 1-6 sind exemplarisch einige Möglichkeiten der Anordnung von integrierten Versteifungselementen, geordnet nach zunehmender Auflagertragfähigkeit, dargestellt:

- Den Basisfall stellt in Bild 1-6.a der nur durch obere und untere Randringe versteifte Schaft dar. Die Auflagerkräfte werden durch die lokale Randlagerung des Schaftes und des Trichters in das Gesamtsystem eingeleitet. Der untere Randring, der am Trichter-Schaft-Übergang angeordnet ist, kann neben der Aufnahme der radial gerichteten Umlenkkomponente je nach Querbiegesteifigkeit (=Tragwirkung senkrecht zur Ringebene) auch anteilmäßig zur Abtragung der Vertikalbelastung beitragen.
- Vorgebundene lokale Auflagerlängssteifen in Bild 1-6.b erhöhen die Auflagernettofläche, die Kräfte werden nun zum Teil zusätzlich auch über Schubkräfte in den Schaft eingeleitet. Obendrein ist durch die Längssteife eine Beulaussteifung der Schaftwandung oberhalb des Auflagerbereiches gegeben.
- Die zusätzliche Anordnung von ringsumlaufenden Ringsteifen am oberen Ende der lokalen Längssteifen in Bild 1-6.c stellt die nächst tragfähigere Aussteifungsmöglichkeit dar. Es wird dabei ein sogenannter integrierter Basisringträger, der zusammen mit einem Teil der Schaft- und der Trichterwandung die Abtragung der Vertikallasten übernimmt, geschaffen. Durch die optionale volle Anbindung des Basisringbleches an den Trichter entsteht in diesem Fall ein dreieckförmiger Hohlkastenträger. Bei entsprechender Ausführung könnte dieser Basisringträger die Abtragung der Vertikallasten über den Einzelstützen alleine (isoliert) übernehmen. Der Schaft und der Trichter müssen dann nur mehr rotationssymmetrisch verteilte Lasten abtragen. Aus Kompatibilitätsgründen entstehen durch die ungleichmäßige Vertikalverformung des Basisringträgers jedoch lokal erhöhte Druckmeridianbeanspruchungen im Schaft, welche im Fall der Betrachtung eines isolierten (integrierten) Basisringträgers

vernachlässigt werden. Diese lokalen Zusatzbeanspruchungen sind hinsichtlich der Beultragfähigkeit des Gesamtsystems im allgemeinen, zumindest bei größeren Silos, mitzubedenken.

- Eine äußerst tragfähige Silokonstruktion stellt die alternative Anordnung von durchgehenden Auflagerlängssteifen dar (Bild 1-6.d). Über diese Längssteifen wird ein Großteil der vertikalen Lagerkräfte in den Silo eingeleitet. Überdies dienen sie zur Beulaussteifung des Schaftes und bilden darüber hinaus ein stabilisierendes Korsett für die aus verschraubten Einzelsegmenten zusammengefügte Silokonstruktion.

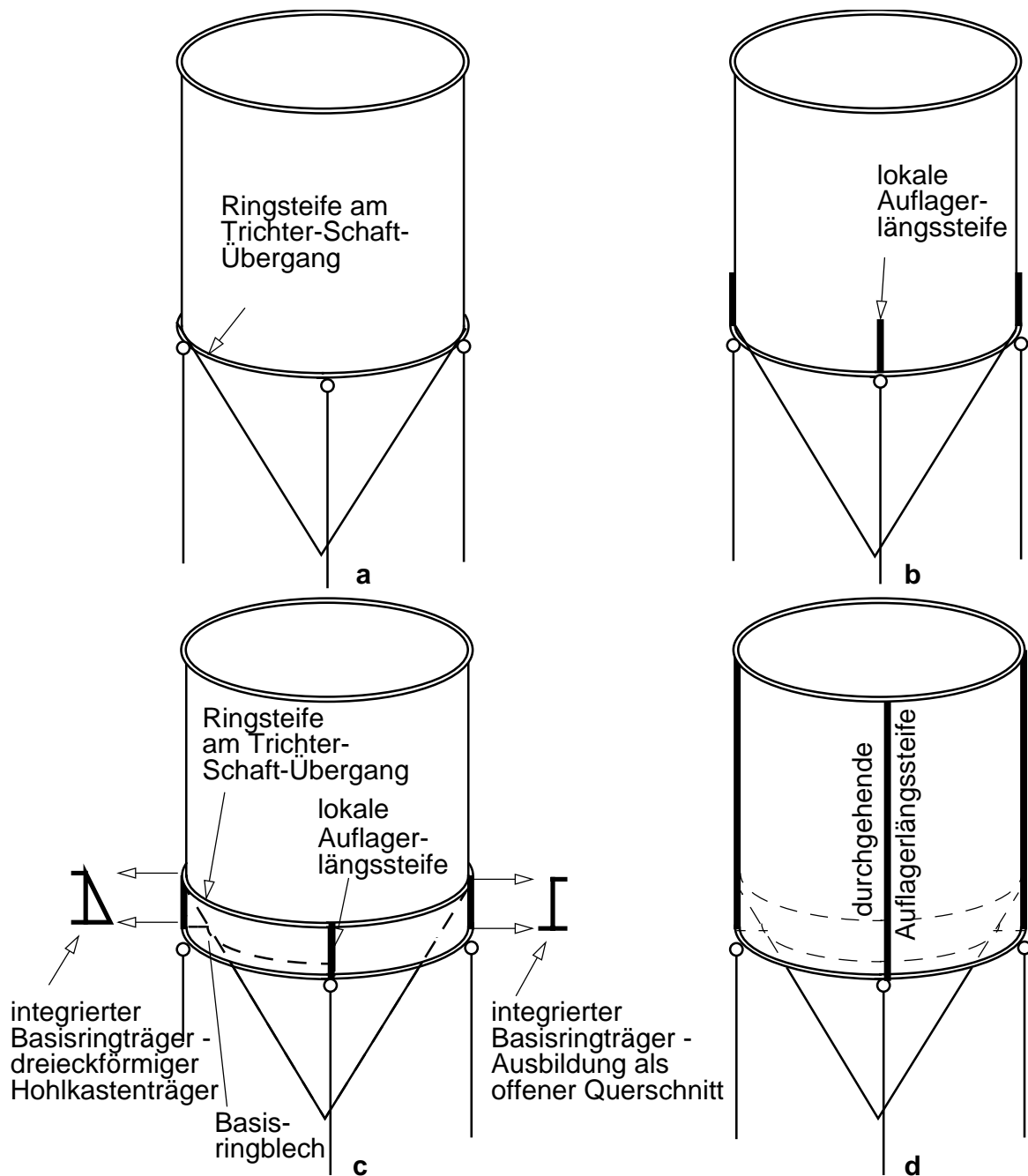


Bild 1-6 Siloverstärkungskonstruktionen, geordnet nach zunehmender Auflagertragkraft — **a.** unverstärkter Schaft, **b.** lokale Auflagerlängssteifen, **c.** integrierter Basisringträger und **d.** durchgehende Auflagerlängssteifen

1.1.4 Traditionelle baustatische Modellbildungen

Traditionelle baustatische Modellbildungen im Rahmen einer Siloberechnung, die nachfolgend systematisch dargestellt werden, befassen sich mit:

- Strukturzerlegung in elementare Einzelkomponenten
- Lastzerlegung in elementare Einzelkomponenten

Das unausgesprochene, implizit zugrunde liegende Ziel dieser traditionellen Modellbildungen ist und war es stets eine möglichst analytische Behandlung der Siloeinzelteile durch eine entsprechende Strukturzerlegung bzw. eine entsprechende Lastzerlegung in einfache Einzelkomponenten durch Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung zu erreichen. Dies kann zumindest rückblickend festgestellt werden.

In Bild 1-7 ist diese typische Vorgehensweise der traditionellen Modellbildung schematisch dargestellt.

Die Strukturzerlegung zielt darauf hin, nicht–rotationssymmetrische Strukturteile wie diskrete Auflagerungen oder Längsversteifungen durch die Berücksichtigung als Gleichgewichtskräftegruppen ersatzweise zu erfassen, wie in Bild 1-8 und Bild 1-9 dargestellt:

- für die lokale Randlagerung des Siloschaftes (=Zargenlagerung) in Bild 1-8.a bzw. Bild 1-9.a
- für die Anordnung einer lokalen Auflagerlängssteife (Bild 1-8.b bzw. Bild 1-9.b)
- für die Anordnung von durchgehenden Auflagerlängssteifen (Bild 1-8.c bzw. Bild 1-9.c)

Die nun am rotationssymmetrischen Strukturmodell wirkenden lokalen Auflagerkräfte bedeuten eine nicht–rotationssymmetrische Belastung. Diese kann, wie bereits erwähnt, aber ebenso für eine analytische Berechnung durch eine entsprechende Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung abgebildet werden.

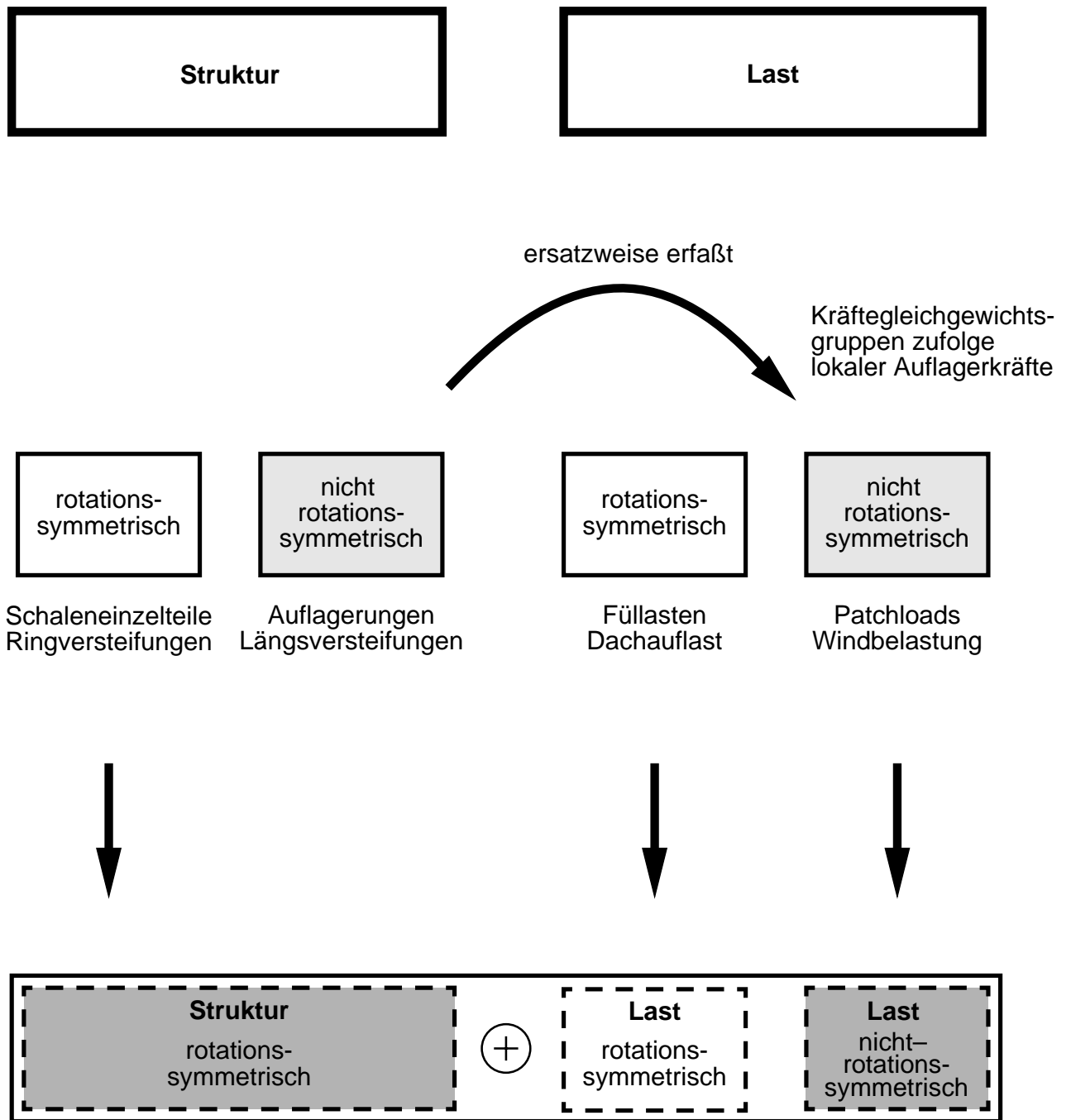


Bild 1-7 Strukturzerlegung und Lastzerlegung im Sinn der traditionellen baustatischen Modellbildung

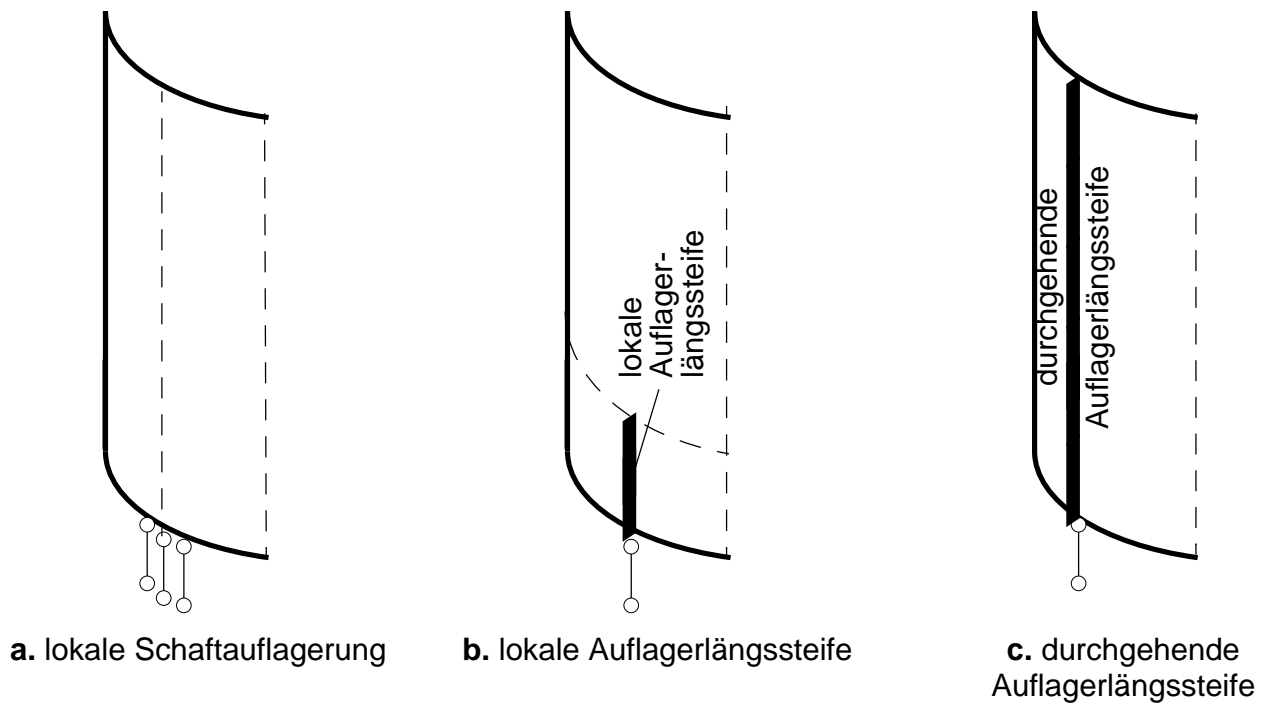


Bild 1-8 Diskrete Auflagerungen ohne und mit Auflagerlängssteifen

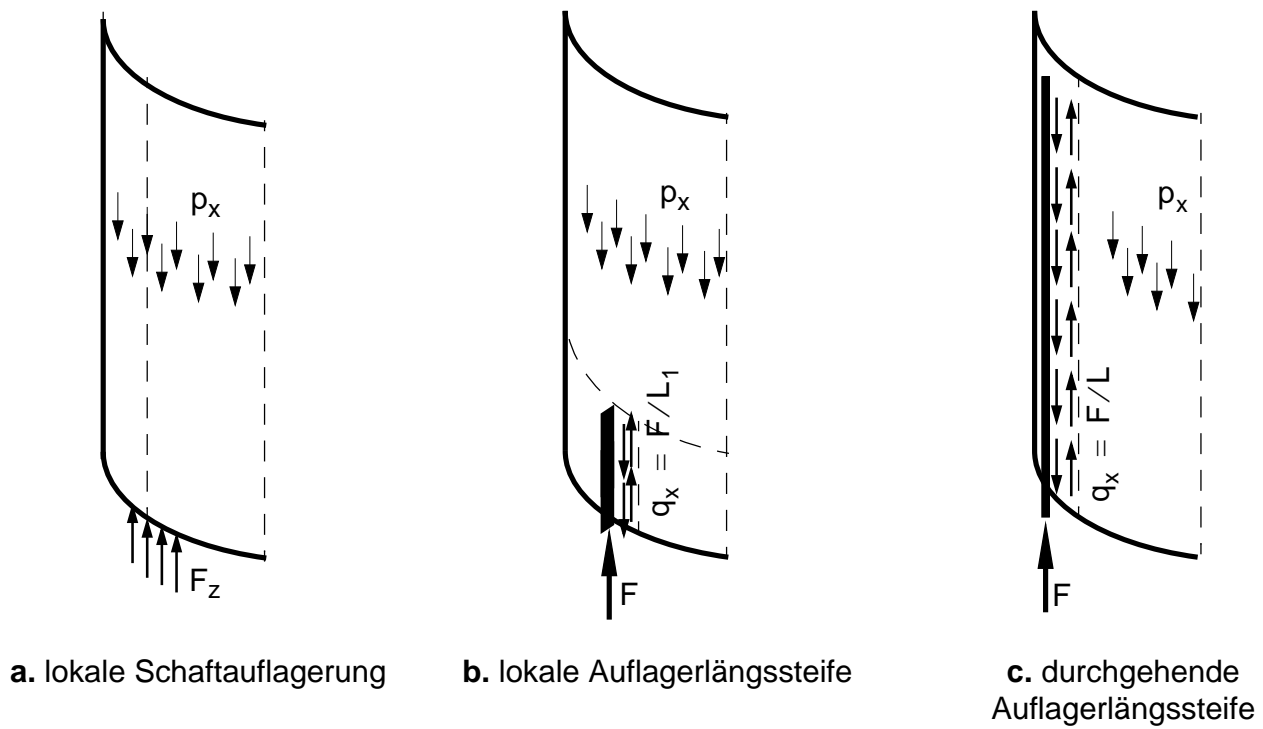


Bild 1-9 Kräftegleichgewichtsgruppen zur vereinfachten modellhaften Wiedergabe von diskreten Auflagerungen bzw. Auflagerlängsversteifungen

Die folgenden Strukturteile werden, wie in Bild 1-10 dargestellt, im Zuge der traditionellen Modellbildung für den nicht-rotationssymmetrischen Anteil der Lastabtragung bevorzugt herangezogen:

- der Basisringträger (Bild 1-10.a)
als räumlich abtragender stabförmiger Ringträger
- der Schaft (Bild 1-10.b),
wobei die analytische baustatische Berechnung nun durch die Modellierung als Membranschale bzw. als Semi-Membranschale durch spezielle Steifigkeitsannahmen möglich ist (siehe Anhang A.1)

Der Trichter hingegen wird aber bevorzugt als rotationssymmetrisch abtragender Strukturteil behandelt (Bild 1-10.d).

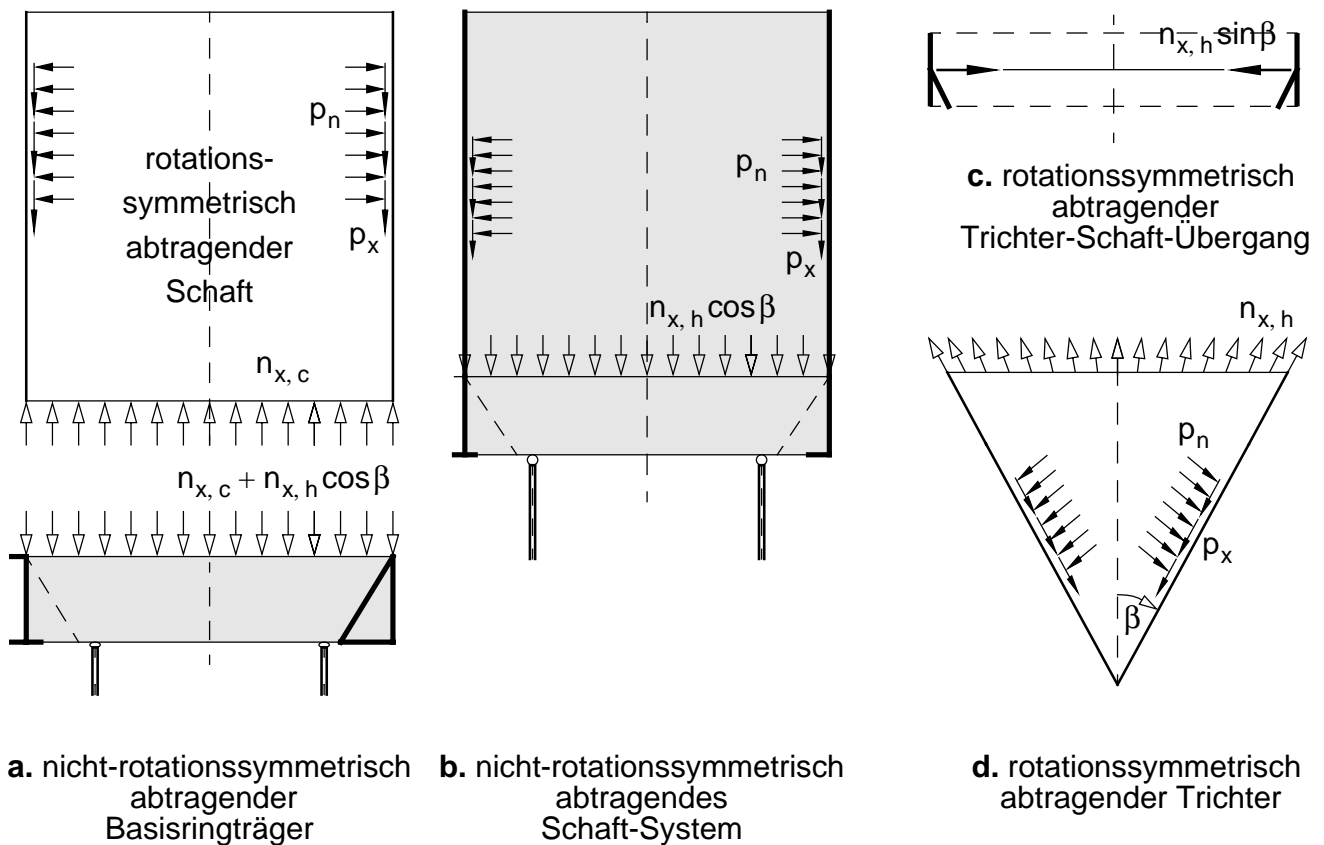


Bild 1-10 Abtragungsvarianten des nicht-rotationssymmetrischen Lastanteiles über den diskreten Auflagerungen

1.1.4.1 Abtragung des rotationssymmetrischen Lastanteiles

Die Lastabtragung des rotationssymmetrischen Lastanteiles erfolgt als Membranschale durch:

- den Trichter
- den Schaft inklusive optionaler Standzarge
- den Dachkonus

Die Bestimmung der Schnittkraftverläufe erfolgt in einfachster Weise durch die direkte Lösung der Membrangleichgewichtsgleichungen.

Der Trichter-Schaft-Übergang nimmt die radialen Umlenkkomponenten der Meridiankräfte des Trichters auf, die Abtragung erfolgt durch die lokalen Biegewirkungen der beteiligten Schalenteile (Trichter, Schaft, Standzarge). Die Berechnung erfolgt auf der Basis der mitwirkenden Breiten der Schalenteile als äquivalenter rotationssymmetrischer Ringträger.

1.1.4.2 Lastabtragung des nicht-rotationssymmetrischen Anteiles

Einleitung

Im folgenden wird die prinzipielle Zerlegung in Teiltragsysteme gezeigt. Dies erfolgt in exemplarischer Form für die in Bild 1-1 dargestellte Stahlsilokonstruktion mit diskreter Auflagerung und durchgehenden Auflagerlängssteifen. Weiters werden dafür die klassischen Varianten der nicht-rotationssymmetrischen Lastabtragungsmodelle der traditionellen baustatischen Modellbildungen vorgestellt.

Zerlegung in Teiltragsysteme

Die baustatische Modellierung durch das Herauslösen von Einzelteilen zur Abtragung des nicht-rotationssymmetrischen Lastanteiles (Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen) ist in Bild 1-11 mit der Zerlegung in folgende Einzelsysteme dargestellt:

- Traggerüst-System in Bild 1-11.b, das im vorliegenden Fall aus der Silounterkonstruktion, den integrierten Silo-Längssteifen und der Überkonstruktion besteht
- Schaft-System, das in Bild 1-11.c aus dem Schaft-Längssteifen-System (Bild 1-11.b) durch die Behandlung des kräfte- und verformungsmäßigen Zusammenwirkens von Auflagerlängssteife und Schaft mittels äquivalenter Kräftegleichgewichtsgruppen (Bild 1-9.c) hervorgeht
- Trichter
- Trichter-Schaft-Übergang
- Basisringträger-System

Aus der Überkonstruktion abzutragende Lasten werden bei integrierten Längssteifen über das Schaft-Längssteifen-System in die Unterkonstruktion weitergeleitet. Eine vereinfachte baustatische Modellierung führt auf das Traggerüst-System, bei dem das kraft- und formschlüssige Zusammenwirken von Schaft und integrierten Längssteifen nicht berücksichtigt wird. Für den Silo selbst wird das Traggerüst idealisiert als vertikale Lagerungsbedingung berücksichtigt, bzw. die Auflagerlängssteifen mit ihrer Wirkung als verteilte Lagerkräfte erfaßt.

Varianten der nicht-rotationssymmetrischen Lastabtragungsmodelle

Die Abtragung des nicht-rotationssymmetrischen Anteiles der Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen wird in klassischer Weise mit folgenden, aus dem Gesamtsystem reduzierten baustatischen Modellen behandelt:

- Modell 1: Basisringträger-System
- Modell 2: Schaft-System
- Modell 3: kombiniertes Schaft-Basisringträger-System

In Bild 1-12 ist das globale Gleichgewicht der herausgelösten Teiltragsysteme durch wechselweise wirkende Randkräfte in Abhängigkeit der Modellbildung dargestellt. In Bild 1-12.a ist die Abtragung der Vertikalbelastung über den Einzelauflagerungen durch den Basisringträger, in Bild 1-12.b durch das Schaft-System und in Bild 1-12.c durch das kombinierte Schaft-Basisringträger-System dargestellt. Kennzeichnend ist für alle drei Varianten, daß der Trichter idealisiert als rotationssymmetrisch abtragender Bauteil erfaßt wird (repräsentiert durch die konstanten, rotationssymmetrischen Randkräfte $n_{x, h}$ in Bild 1-13).

Im Fall des Basisringträger-Systems (Modell 1) wird auch der Schaft als rotationssymmetrisch abtragender Bauteil erfaßt. Dies ist in Bild 1-12.c durch die konstanten Randkräfte $n_{x, c}$ repräsentiert.

Der Trichter-Schaft-Übergang dient in allen Fällen zur Aufnahme der radial gerichteten Umlenkkomponenten zufolge der meridional gerichteten Trichterrandkräfte (Bild 1-13).

Der Basisringträger ist in Bild 1-12.c für zwei mögliche Ausführungsvarianten dargestellt. Die erste Variante stellt einen offenen Basisringträger-Querschnitt dar, das Basisringblech ist mit dem Trichter weder kraft- noch verformungsschlüssig verbunden. Die zweite Variante stellt einen geschlossenen Basisringträger-Querschnitt dar, der sich bei Vorliegen einer kraft- und verformungsschlüssigen Verbindung des Basisringbleches mit dem Trichter ergibt. In traditioneller Weise wird der Basisringträger als stabförmiger Ringträger modelliert.

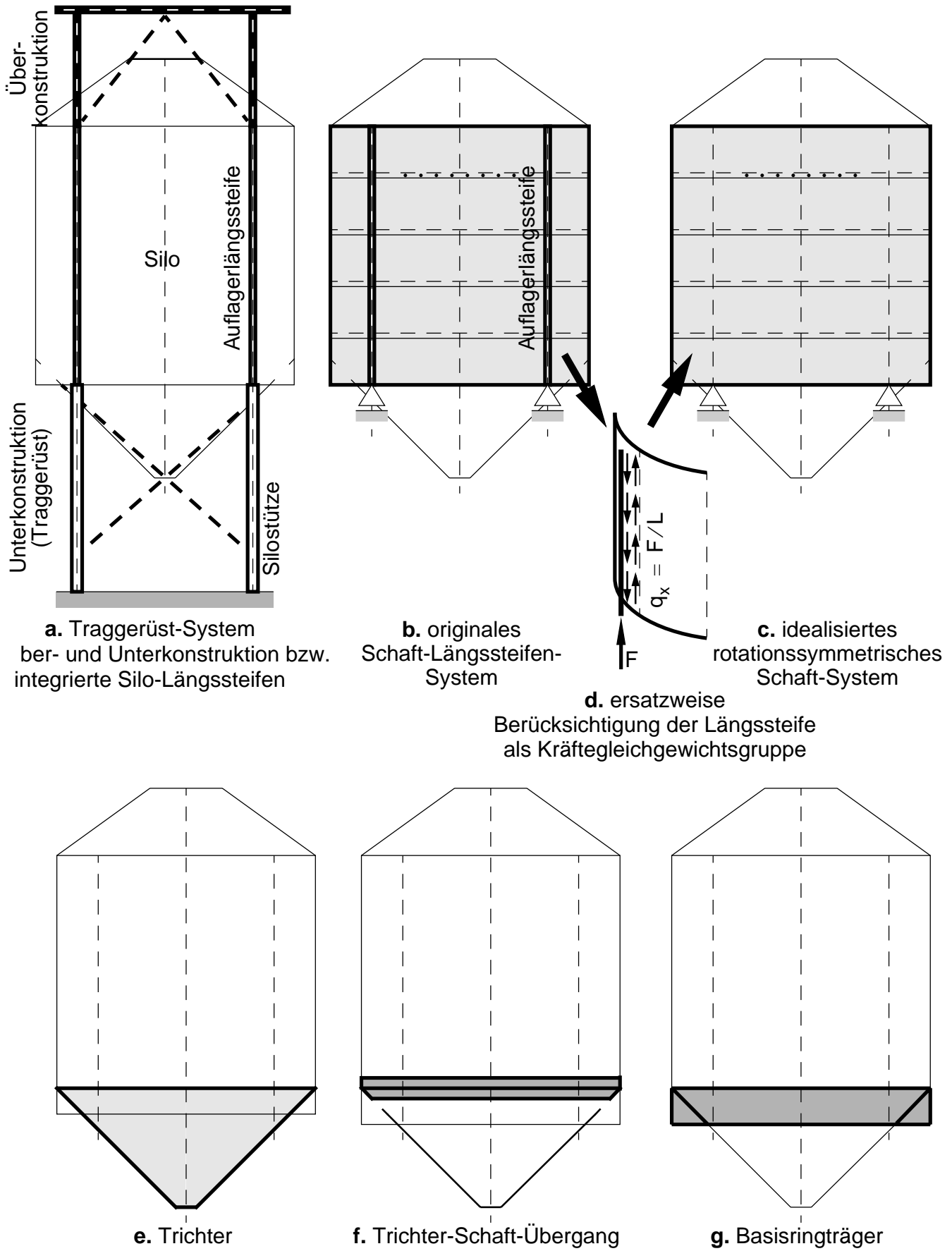


Bild 1-11 Silokonstruktion mit diskreter Einzelauflagerung - Darstellung herausgelöster isolierter Teiltragsysteme

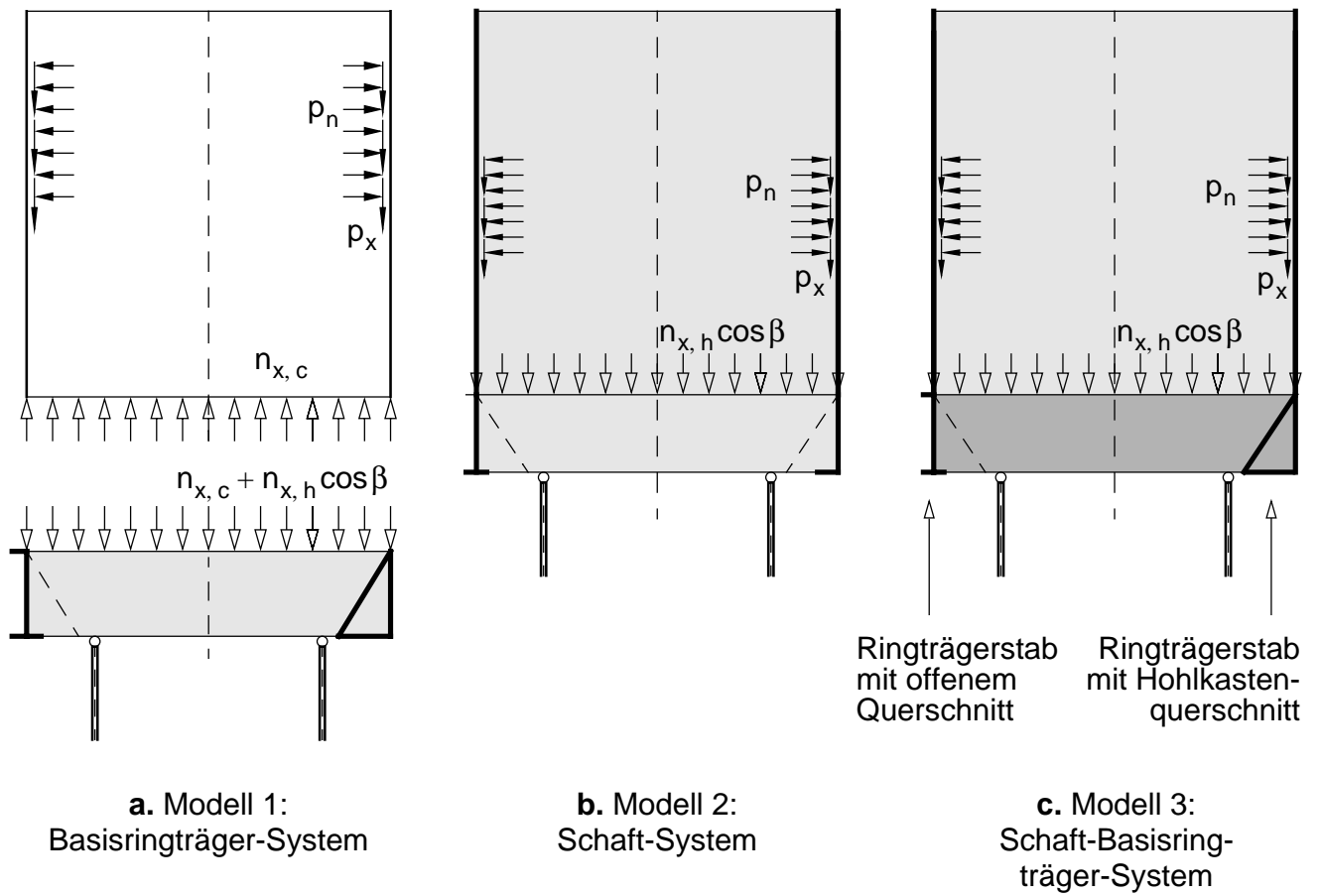


Bild 1-12 Traditionelle baustatische Modellbildungen für den nicht-rotationssymmetrischen Anteil der Lastabtragung

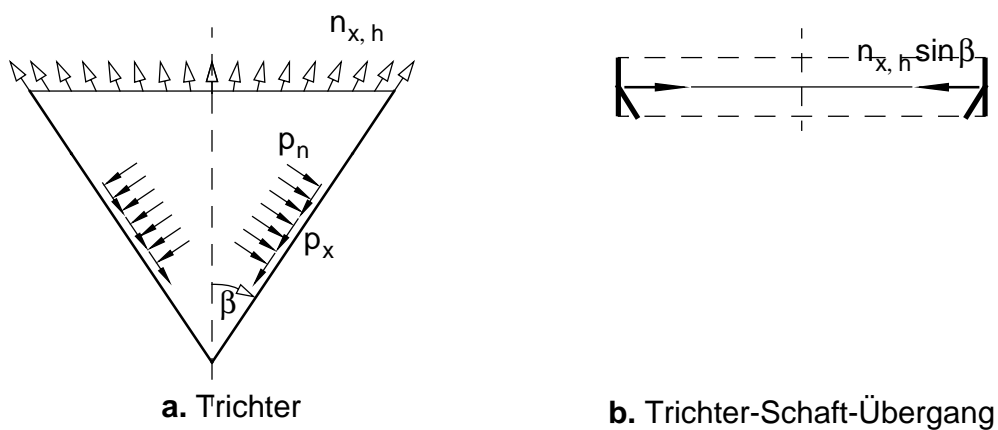


Bild 1-13 Traditionelle baustatische Modellbildung — rotationssymmetrischer Anteil der Lastabtragung
a. des Trichters und **b.** des Trichter-Schaft-Überganges

1.1.4.3 Modell 1 — Basisringträgersystem

Die Lastabtragung der Gesamtvertikalbelastung über diskrete Einzelauflagerungen durch den Basisringträger stellt die einfachste Berechnungsvariante, im Fall der Abwesenheit jeglicher Längsversteifungselemente, dar. Am Gesamtsystem treten aufgrund dieser Modellierungsannahmen Inkompatibilitäten — vor allem wie in Bild 1-14 dargestellte axiale Klaffungen — zwischen Schaft und Basisringträger auf. Am Gesamtsystem bedeutet das Verhindern dieser Klaffungen, daß der Schaft durch axiale Druckmembrankräfte beansprucht wird, die hinsichtlich der Beultragfähigkeit nicht zu vernachlässigen sind (vergleiche Modell 2 in Kap. 1.1.4.4).

Die Modellierung als Schaft-Basisringträger-System (Modell 3 in Kap. 1.1.4.5) bedeutet, daß nun der Schaft und der integrierte Basisringträger anteilig entsprechend dem Steifigkeitsverhältnis an der Abtragung der Gesamtvertikalbelastung gemeinsam zusammenwirken. Zwischen Trichter und Schaft-Basisringträger-System treten weiterhin Inkompatibilitäten — hier vor allem Klaffungen in Meridian- und Umfangsrichtung — auf. Für das Gesamtsystem bedeutet dies, daß am Trichter ungleichförmig verteilte Meridiankräfte auftreten. Die angenommenen konstanten Meridianrandkräfte (siehe Bild 1-13) können aber gegebenenfalls im plastischen Grenzzustand auftreten. Der Trichter weist Zugbeanspruchungen in Meridian- und Umfangsrichtung auf und es tritt daher, abgesehen vom Trichter-Schaft-Übergangsbereich, keine Limitierung der Tragfähigkeit durch Erreichen der Beultragfähigkeit ein.

Die strukturmechanische Modellierung des Basisringträgers kann dabei nach wie vor als räumlich abtragender Ringträger (Greiner (1984)) oder als Schale (Greiner und Guggenberger (1990)) erfolgen.

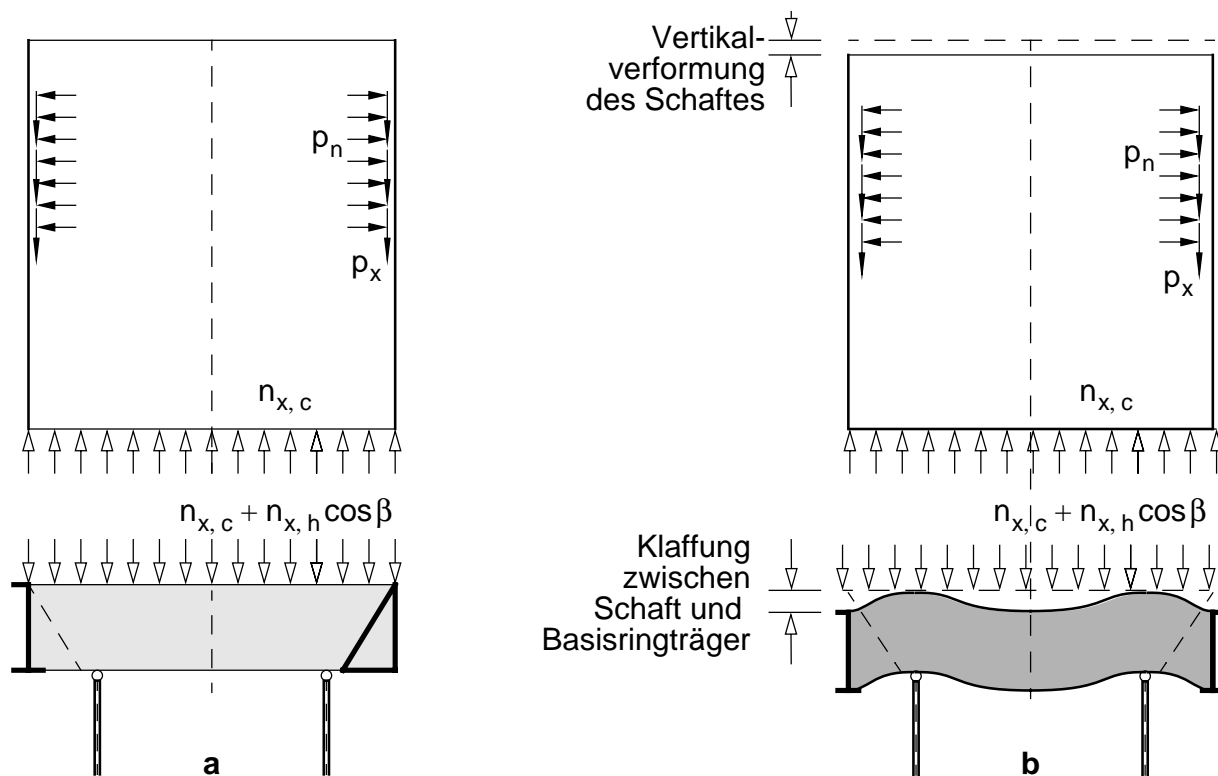


Bild 1-14 Lastabtragung des nicht rotationssymmetrischen Anteiles durch den **a.** Basisringträger und **b.** folgende Klaffungen zwischen Basisringträger und Schaft

Die Vertikalbelastung des Basisringträger-Systems besteht aus der konstanten Gleichlast q_z ($q_z = n_{x,c} + n_{x,h} \cos\beta$) und n äquidistanten Auflagerkräften F , die am Lastradius r — hier dem Schafradius — und dem Auflagerradius r_1 angreifen. Die somit exzentrische Vertikalbelastung in wird dabei in drei Einzelanteile (Bild 1-15) aufgesplittet und zwar:

- in den Schubmittelpunkt transformierte — nun zentrische — Vertikalbelastung
- Einzeltorsionsmomente M_T zufolge den exzentrischen Lagerkräften
- konstante Stülpmomente m_t zufolge der exzentrischen Gleichlast q_z .

Die Berechnung der Schnittkraftverläufe beruht für die zentrische Vertikalbelastung auf den Ausarbeitungen von Unold (1922) und für die exzentrische Vertikalbelastung auf den Ausarbeitungen in Greiner und Guggenberger (1990) bzw. den Formeln in Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999).

Im folgenden können für die vorliegende Belastung die Schnittkräfte direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen berechnet werden. Das Torsionsmoment M_t des Basisringträgers stellt dabei das Gesamttorsionsmoment (=St. Venant'sches Torsionsmoment + Wölb-torsionsmoment) dar. Generell weist der Basisringträger nur Schnittkräfte zugehörig zur Trägerrosttragwirkung auf. Es entstehen die Querkraft Q_z in vertikaler Richtung, das Biegemoment M_y um die horizontale Querschnittsachse des Basisringträgers und das Torsionsmoment M_t (siehe Anhang A.2).

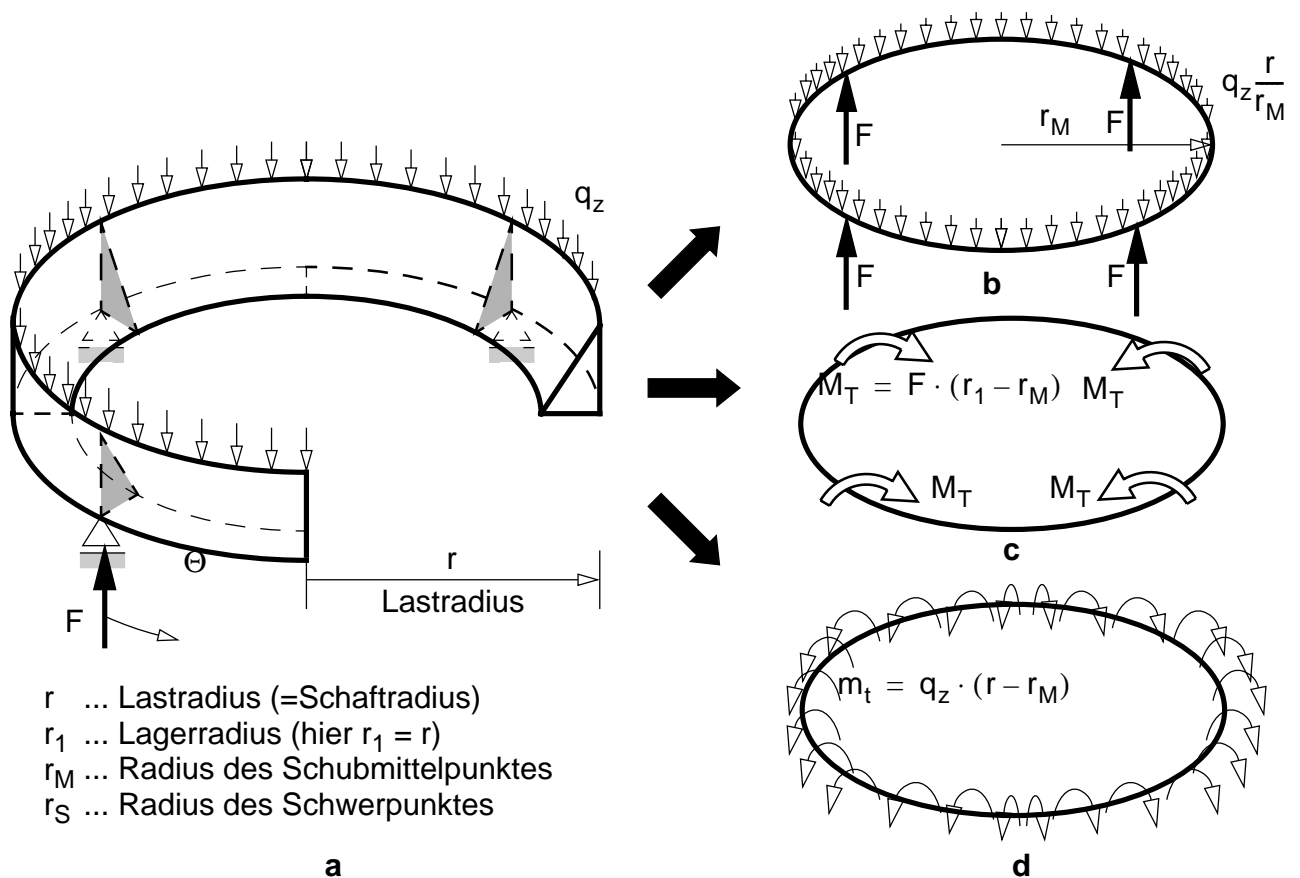


Bild 1-15 Isolierter Basisringträger — Lastabtragung der **a.** exzentrischen Vertikalbelastung als **b.** zentrische Vertikalbelastung und zusätzliche Momentenbelastungen — **c.** Einzeltorsionsmomente bzw. **d.** Stülpmomente — des Basisringträgers

Zentrische Vertikalbelastung

Der Verlauf der Schnittkräfte für die rein zentrische Vertikalbelastung innerhalb von $0 \leq \Theta \leq 2\pi/n$ ist in Gl. (1-2) formelmäßig angegeben.

$$\begin{bmatrix} Q_z \\ \frac{M_y}{r_s} \\ \frac{M_t}{r_s} \end{bmatrix} = \frac{F}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Theta}{\pi/n} \\ -\frac{n}{\pi} + \frac{\cos \Theta}{\tan(\pi/n)} + \sin \Theta \\ \frac{\Theta}{\pi/n} - 1 + \cos \Theta - \frac{\sin \Theta}{\tan(\pi/n)} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

Die angegebenen Schnittkraftverläufe in Gl. (1-2) treffen für den Fall einer Einzelkrafteinleitung zu - die Lagerbreite d ist Null. In Bild 1-16 sind die Schnittkraftverläufe in bezogener Form für 4 Auflagerungen des Kreisringträgers dargestellt.

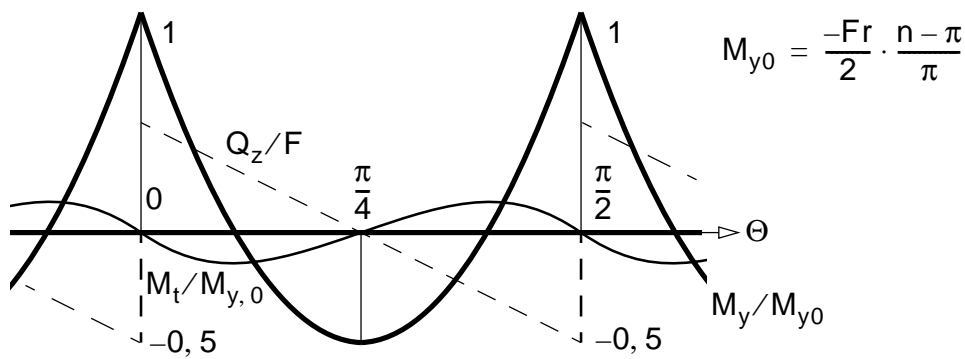


Bild 1-16 Isolierter Basisringträger — Schnittkräfteverlauf in dimensionsloser Darstellung bei zentraler Vertikalbelastung zwischen zwei Auflagerungen ($n = 4$)

Einzeltorsionsmomentenbelastung

Für den Lastfall der angreifenden Einzeltorsionsmomente können die auftretenden Schnittkräfte M_y und M_t ebenfalls direkt angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_t \end{bmatrix} = \frac{M_T}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos \Theta}{\tan \pi/n} + \sin \Theta \\ -\frac{\sin \Theta}{\tan \pi/n} + \cos \Theta \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

Das Biegemoment M_y in den Auflagerpunkten ist von der Stützenanzahl n abhängig, das Torsionsmoment M_t beträgt immer die Hälfte des angreifenden Torsionsmomentes M_T . Der Maximalwert des Biegemomentes M_y wird in der Mitte zwischen den Lagerpunkten ($\Theta = \pi/n$) erreicht. In Bild 1-17 ist der Verlauf der Biege- und Torsionsmomente bei 4 angreifenden Einzeltorsionsmomenten dargestellt.

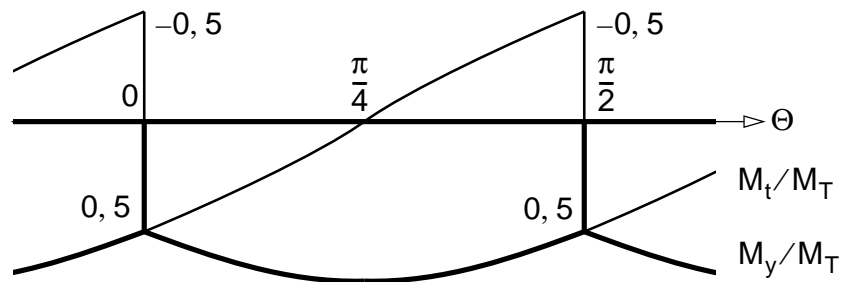


Bild 1-17 Momentenverlauf des Basisringträgers in dimensionsloser Darstellung bei Einzeltorsionsmomentenbelastung ($n = 4$)

Stülpmomentenbelastung zufolge der exzentrischen Vertikalbelastung

Die konstante exzentrische Vertikalbelastung ergibt am Ringträger eine konstante Stülpmomentenbelastung. Als einzige Schnittgröße entsteht ein konstantes Biegemoment M_y :

$$M_y = m_t \cdot r \quad (1-4)$$

1.1.4.4 Modell 2 — Schaftsystem

Schaft mit lokaler Randlagerung (=Zargenlagerung)

Die einfachst mögliche Lagerungsart eines Silos auf diskreten Einzelstützen stellt die lokale Randlagerung entlang der Schaftunterkante in Umfangsrichtung dar (siehe Bild 1-6).

Die lokale Randlagerung, die in Bild 1-18 dargestellt ist, verursacht an der herausgelösten Schale Druckaxialspannungen entlang der Auflagermeridiane, die in weiterer Folge von wesentlicher Bedeutung für die Bestimmung der Beultragfähigkeiten sind (Guggenberger (1991), Knödel und Ummenhofer (1998), Rotter und Teng (1990b)).

Diese Art der Auflagerkrafteinleitung bewirkt ungleichförmig verteilte Axial, Radial- und Tangentialverformungen der Schale. Die größten Radial- und Axialverschiebungen treten dabei naturgemäß entlang der Lagermeridiane auf.

Schaft mit lokalen Auflagerlängssteifen

In einer klassischen Modellierungsvariante werden lokale Längssteifen ersatzweise nur mit ihren äquivalenten globalen Kraftwirkungen an der Schale erfaßt, das heißt es werden die Auflagerkräfte mittels konstant verteilter Schubkräfte in das Schaft-System eingeleitet. Dieses Vorgehen wird z.B. von Greiner (1984) gewählt. Die Spannungsverteilungen des Schaftes können, wiederum analog der Vorgehensweise beim randgelagerten Schaft, durch die Lastzerlegung der konstant verteilt angenommenen Auflagersteifenschubkräfte mittels einer Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung bestimmt werden.

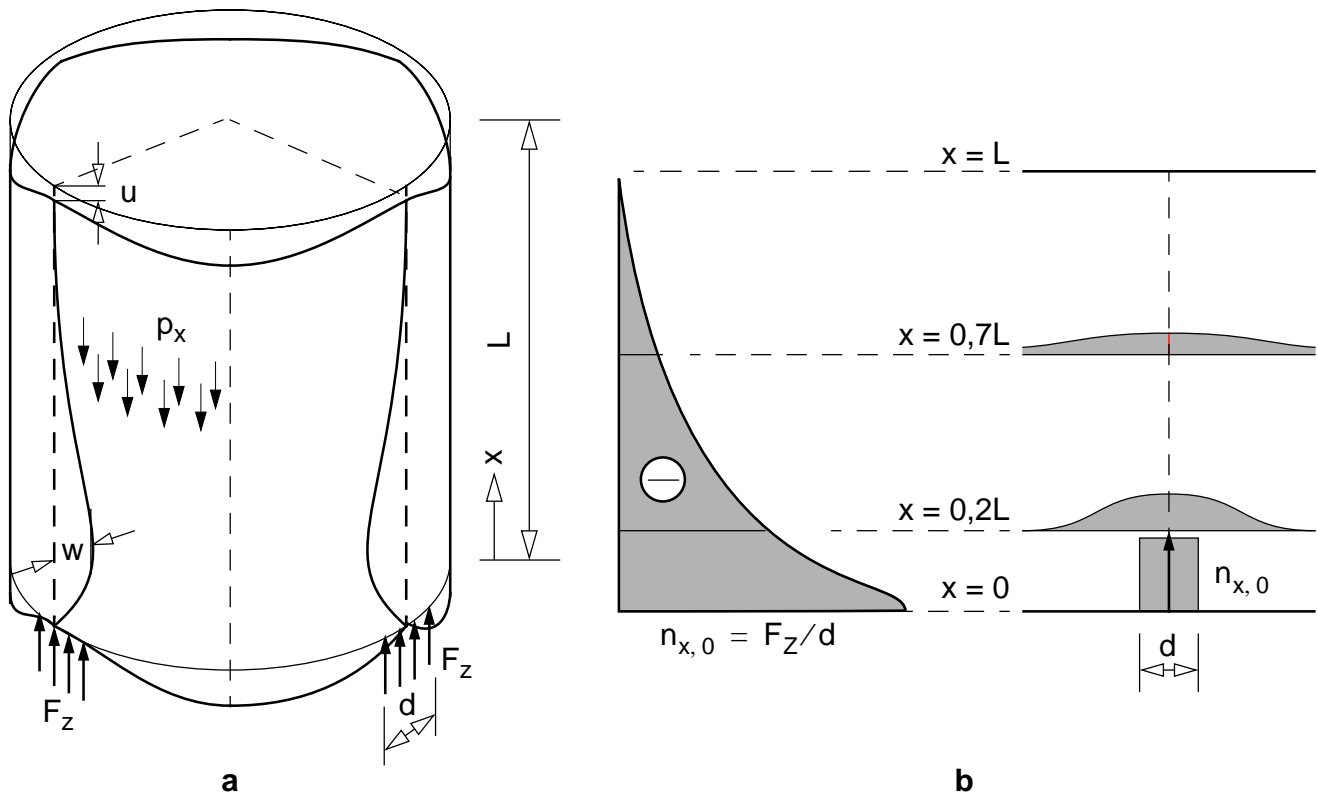


Bild 1-18 Randlagerung des Zylinderschaftes — **a.** Verformungen und **b.** Meridiankraftverteilungen entlang des Auflagermeridianes und entlang ausgewählter Horizonte in Umfangsrichtung

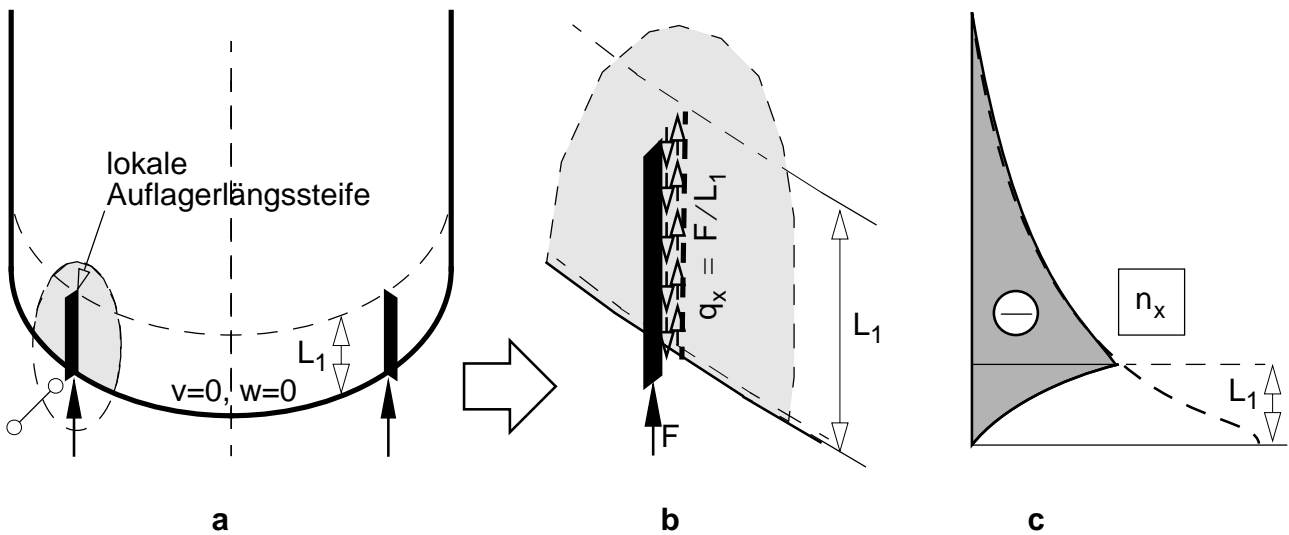


Bild 1-19 **a.** Schaft mit vorgebundenen lokalen Auflagerlängssteifen, **b.** Einleitung der Auflagerkraft und **c.** meridionaler Membrankraftverlauf entlang des Auflagermeridianes (vereinfacht)

Schaft mit durchgehenden Längssteifen (Grenzfall)

Wird der Schaft durch eine konstante Wandschubbelastung p_x (die hier vereinfacht die Gesamtvertikalbelastung repräsentiert) und die Längssteifen zentrisch durch gegengerichtete Lagerkräfte F belastet, kann der in Bild 1-20 dargestellte, einfachst mögliche Schubmembranspannungszustand das Gleichgewicht erfüllen.

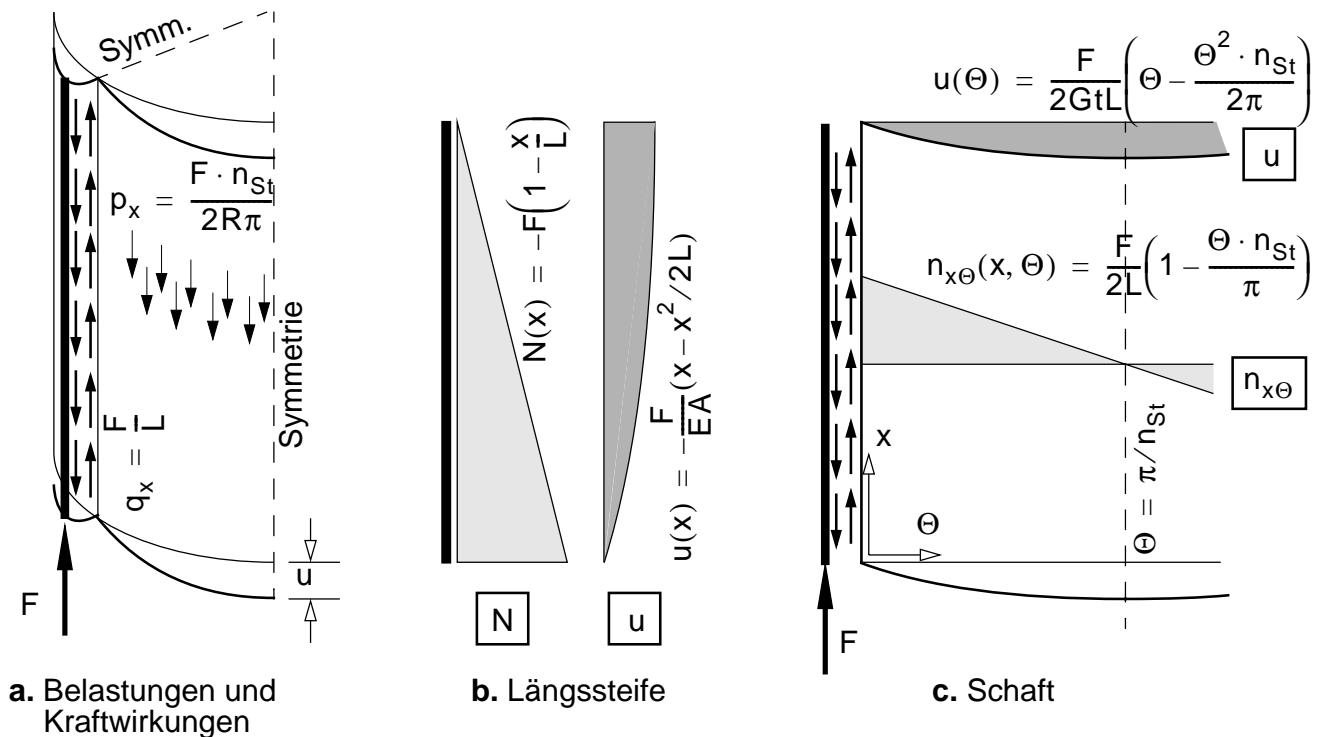


Bild 1-20 Idealer Schubmembranspannungszustand — **a.** Kräftewirkungen, **b.** Normalkraft- und Axialverschiebungsverlauf in der Längssteife, **c.** Schubkräfte und Axialverschiebungen im Schaft

Zwischen Längssteife und Zylinderschale wirken in den Längssteifenmeridianen die modellhaft als konstant angenommenen Verbundschubkräfte (=Koppelkräfte) q_x . In der Schale treten dann konsequenterweise nur Membranschubkräfte $n_{x\theta}$ auf. Ihr Verlauf ist in axialer Richtung konstant und in Umfangsrichtung linear veränderlich. Daraus resultieren nur axiale Verschiebungen mit konstantem Verlauf in axialer Richtung bzw. mit quadratischem Verlauf in Umfangsrichtung. In den Längssteifenmeridianen werden die Axialverschiebungen identisch zu Null.

Die Schubkraft q_x greift in entgegengesetzter Richtung an der Längssteife an und ist mit der Kraft F am Auflagersteifenfuß im Gleichgewicht. Aus ihr resultiert eine Verkürzung der Längssteife mit quadratischem Verlauf.

Die Anwendung dieses Gleichgewichtsmodelles erfolgte seinerzeit auch im Flugzeugbau zur Ermittlung der Beanspruchungen in dem durch Ringe und Spanten ausgesteiften röhrenförmigen Flugzeugrumpf (Schnell (1955)).

Diese einfache Modellierungsvariante erscheint attraktiv. Wie jedoch in dieser Arbeit gezeigt werden wird, entstehen durch die axiale Nachgiebigkeit der Längssteife ungünstige Verhältnisse in der Längssteife bzw.

der seitlich anschließenden Schalenwandung. Am kombinierten Schaft-Längssteifen-System entstehen ungleichförmig verteilte Koppelschubkräfte zwischen Schaft und Längssteife. Diese führen zu einer zusätzlichen Biegemomentenbeanspruchung der Längssteife. Obendrein führen diese aus Kompatibilitätsgründen entstehenden Koppelschubkräfte zu hohen Schubspannungskonzentrationen in der Schalenwand (siehe Kap. 8).

1.1.4.5 Modell 3 — Kombiniertes Schaft-Basisringträger-System

Die Weiterentwicklung der vorstehend angeführten traditionellen baustatischen Modellbildungen (Modelle 1 und 2) führt durch die Berücksichtigung des kraft- und verformungsschlüssigen Zusammenwirkens von Schaft und Basisringträger auf das kombinierte Schaft-Basisringträger-System in Bild 1-21.

In Bild 1-21 ist die Modellierung als Schaft-Basisringträger-System in traditioneller Form durch die Berücksichtigung des Basisringträgers als Kreisringträgerstab dargestellt. Zum besseren Verständnis der Modelleigenschaften der unterschiedlichen Modellierungsstufen sind für die jeweiligen Tragsysteme Analogiemodelle dargestellt. Der Zylinderschaft wird dabei als Semi-Membranschale baustatisch modelliert. Das Analogiemodell (Greiner (1984)) ist ein elastisch gebetteter Balken, wobei die Umfangsbiegesteifigkeit der Schale die elastische Verschiebungsbettung und die axiale Dehnsteifigkeit die Biegesteifigkeit des Analogiebalkens ergibt.

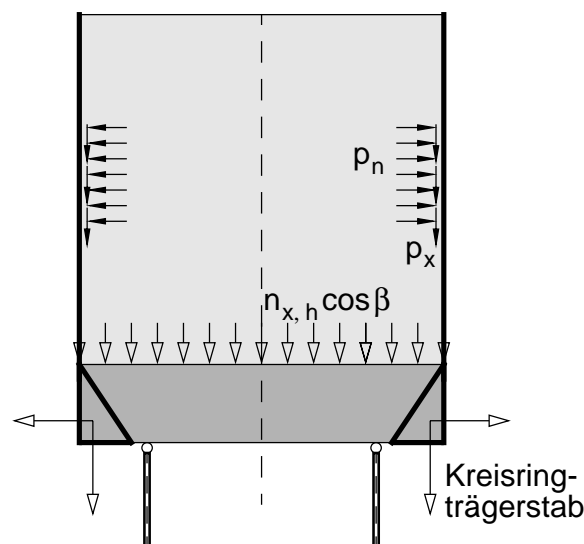


Bild 1-21 Modellierung des kombinierten Schaft-Basisringträger-System in traditioneller Form als gekoppeltes Zylinderschalen-Ringträgerstab-Modell

In Bild 1-22 sind die Modellierungsvarianten für das Schaft-Basisringträger-System und die zugehörigen Analogiemodelle dargestellt. Die baustatische Modellierung als isoliert herausgelöstes Schaft-System ist in Bild 1-22.a, als kombiniertes Schaft-Ringträgerstab-System in Bild 1-22.b und eine über die traditionelle Modellbildung hinausgehende Modellierung als Schaft-Trichter-System ist in Bild 1-22.c dargestellt.

Der Basisringträger wird in traditioneller Form als stabförmiger Kreisringträger modelliert. Am Analogiemodell ist er als gekoppelte Dreh- und Verschiebungsfeder repräsentiert. Die Standzarge, der obere Trichterteil im Bereich der Standzarge und das Basisringblech bilden im vorliegenden Fall den Basisringträger, welcher somit einen dreieckförmigen Hohlkastenquerschnitt aufweist.

Diese traditionelle Modellierung führt naturgemäß auf eine steifigkeitsmäßige Überbewertung des Basisringträgers.

Bei der weiterführenden Modellierung als Schaft-Trichter-System in Bild 1-22.c wird auch die Schalenverformung der Standzarge und des oberen Trichterteiles in realitätsnaher Weise mitberücksichtigt. Der Trichter (bzw. der obere Trichterteil) ist im Analogiemodell durch eine gekoppelte Axial- und Tangentialfeder am Trichter-Schaft-Übergang repräsentiert.

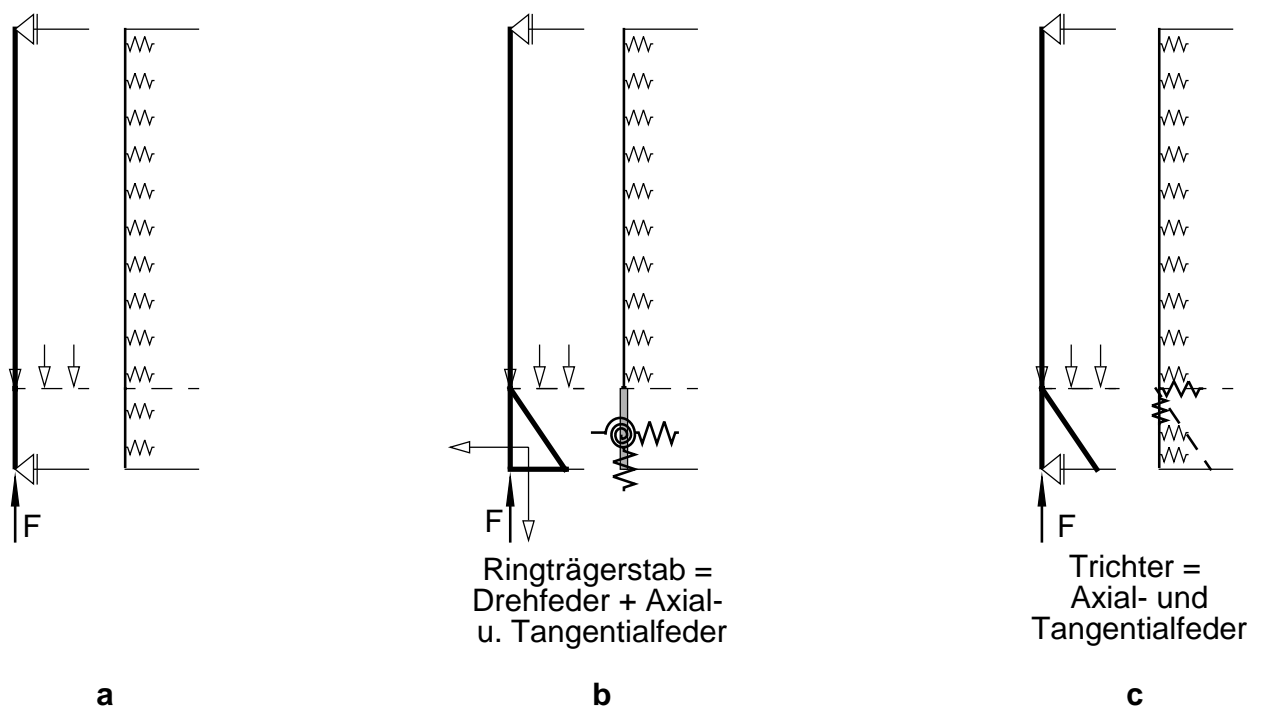


Bild 1-22 Analogiemodelle für die Modellierungsvarianten des Schaft-Basisringträger-Systems —
a. Schaft-System und elastisch gebetteter Balken, **b.** kombiniertes Schaft-Basisringträger-System und elastisch gebetteter Balken mit exzentrisch angeschlossenem Ringträgerstab (=Drehfeder und Axial- bzw. Tangentialfeder) und **c.** Schaft-Trichter-System und elastisch gebetteter Balken und diskrete Trichterfedern

1.2 Stand des Wissens

Im folgenden wird ein Überblick des derzeitigen Standes der Technik gegeben, die Vorgaben zur Bestimmung der Tragfähigkeiten bzw. zum Entwurf von Stahlsilokonstruktionen beinhalten und zwar hinsichtlich der:

- traditionellen baustatischen Modellbildungen für die Berechnung von Stahlsilokonstruktionen
- durchgeführten Untersuchungen zum Tragverhalten von Stahlsiloschalen
- aktuellen Normenregelungen

Dabei erfolgt eine thematische Unterteilung, was die jeweils angestellten Berechnungen und Untersuchungen betrifft, in:

- linear-elastische Spannungsberechnungen
- nichtlineare Berechnungen

Eine generelle Unterteilung hinsichtlich der Untersuchung von isolierten Teilen oder des Gesamtsystems wird in der folgenden Auflistung nicht vorgenommen. Zumeist sind Teilaspekte an isolierten Teiltragsystemen behandelt. Untersuchungen von Silogesamtsystemen liegen nur in geringem Ausmaß vor.

Die angegebenen Literaturstellen beziehen sich primär auf das Tragverhalten von Siloschäften mit diskreter Auflagerung, des axialsymmetrischen Silotrichters und Trichter-Schaft-Überganges sowie des isolierten Basisringträgers. Umfassendere Literaturangaben sind in Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999) bzw. Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) zu finden.

Im folgenden werden unsymmetrische Belastungszustände von Silokonstruktionen, wie nicht-rotationssymmetrische Fülllasten, Windlasten, Erdbebenlasten, obwohl technisch sicherlich relevant, in dieser Arbeit nicht untersucht. Das Hauptaugenmerk liegt, wie bereits erwähnt, auf der Untersuchung von Silos mit Einzelauflagerung unter rotationssymmetrischer Axial- und Radialbelastung. Da hier planmäßig hohe Druckkräfte in Meridianrichtung zufolge der Gesamtbelastung (vor allem Silofüllung) am Schaft auftreten, nehmen zusätzliche Druckbeanspruchungen oft eine untergeordnete Rolle ein.

Rotter (2001) zeigt exemplarisch die Relevanz von unsymmetrischen Belastungszuständen auf, die sich bei exzentrischer Entleerung ergeben und denen nach dem heutigen Stand der Technik in der alltäglichen Entwurfspraxis sicherlich zu wenig Augenmerk geschenkt wird und nach wie vor ein offenes Problem darstellt (siehe z.B. Rotter (1996) bzw. Guggenberger und Wallner (1996)).

Nachfolgend werden nun vorhandene Literaturstellen zitiert und diskutiert, welche sich mit der Problematik des Tragverhaltens dünnwandiger Stahlsilokonstruktionen befassen, und zwar geordnet nach folgenden Themenkreisen:

- linear-elastische Spannungsberechnungen
- Bemessung und Tragfähigkeitsabschätzung auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen
- nichtlineare Berechnungen
- aktuelle Normenregelungen

1.2.1 Linear-elastische Spannungsberechnungen

1.2.1.1 Isolierter Schaft

Die in den nachfolgend angeführten Arbeiten durchgeführten linearen Berechnungen sind thematisch zweizuteilen:

- Erklärung des Tragverhaltens des Schaftsystems (isolierter kreiszylindrischer Siloschaft)
- Parameterstudien zur Entwicklung von Berechnungsformeln zur Bestimmung der Spannungsverteilungen im Schaft

Greiner (1984) untersucht das linear-elastische Tragverhalten von Silos am isolierten Schaft hinsichtlich der Wirkung verschiedenster Längs- und Ringversteifungen (Modell 3 in Kap. 1.1.4.5). Ausgangspunkt ist der unversteifte Schaft (Modell 2 in Kap. 1.1.4.4), der durch die Anordnung von lokalen Längssteifen bzw. durch die Anordnung von Längssteifen und Ringsteifen zunehmend an Tragfähigkeit gewinnt. Die Ringversteifungen bilden gemeinsam mit dem unteren Schaftteil einen Basisringträger. Die Längssteifen werden dabei steifigkeitsmäßig nicht erfaßt, sie sind durch die Einleitung der Auflagerkräfte mittels konstant verteilter Schubkräfte im Berechnungsmodell enthalten. Weiters wird die Wichtigkeit des oberen Abschlusses durch einen Ring bzw. durch eine starre Dachscheibe hervorgehoben.

Öry et al (1984) führt ähnliche Berechnungen am isolierten Schaft mit und ohne der Anordnung von Ringversteifungen durch. Die Lagerkräfte des Silos werden im Schaftmodell über die lokale Randlagerung in Umfangsrichtung eingeleitet. Das Tragverhalten in Abhängigkeit der oberen Randbedingung des Schaftes wird anhand von Modellen veranschaulicht. Öry und Greiner legen ihren Berechnungen die mechanische Modellierung der Schale entsprechend der sogenannten Semi-Membran-Theorie der Kreiszyinderschale (siehe Anhang A.1) zugrunde. Die Lösung erfolgt durch Fourierreihenansatz in Umfangsrichtung und die verbleibende analytische Berechnung beschränkt sich auf die Verläufe in Meridianrichtung.

Für die Berechnung des isolierten Siloschaftes mit durchgehenden Auflagerlängssteifen kann das

Gleichgewichtsmodell von Schnell (1955), bei dem das kräfte- und verformungsschlüssige Zusammenwirken von Schaft und Auflagerlängssteife durch konstant vorgegebene Koppelschubkräfte berücksichtigt wird, angewandt werden (siehe Kap. 1.1.4.4). Den linearen Spannungsberechnungen wird nun der rotationssymmetrische Schaft (Modell 2 in Kap. 1.1.4.4), der durch die nicht-rotationssymmetrischen Koppelschubkräfte belastet wird, zugrundegelegt. Die Anwendung dieses Gleichgewichtsmodells erfolgte seinerzeit auch im Flugzeugbau zur Ermittlung der Beanspruchungen in dem durch Ringe und Spanten ausgesteiften röhrenförmigen Flugzeugrumpf.

Knödel und Ummerhofer (1998) ermöglichen die vereinfachte Berechnung der Meridianspannungsverteilungen für punktgestützte Zylinderschalen (Modell 2 entsprechend Kap. 1.1.4.4) mithilfe von Lastausbreitungswinkeln. Dabei wird auch teilweise die Steifigkeit des Basisringträgers bzw. unteren Randringes des Schaftes miteinbezieht (Modell 3 entsprechend Kap. 1.1.4.5). Damit kann näherungsweise die Beultragfähigkeit durch Führen des Beulnachweises am maßgebenden Horizont des isolierten unversteiften Schaftes bestimmt werden.

1.2.1.2 Basisringträger

Das linear-elastische Tragverhalten des isolierten Basisringträgers wird von Greiner und Guggenberger (1990) hinsichtlich der Modellierung als balkenförmiger Ringträger oder als Schalentragswerk untersucht und verglichen. Dabei werden verschiedene Ausführungsformen des Ringträgers als doppelsymmetrischer I-Querschnitt, als U-Querschnitt oder als dreieckförmiger Hohlkastenträger zugrundegelegt. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß — wie immer der Ringträger selbst auch modelliert wird — der folgenreichste Modellierungsschritt, nämlich durch die Herauslösung des Basisringträgers bereits vorab erfolgt ist und daher diese Untersuchungen der Modellierung des isolierten Basisringträgers gewissermaßen als “Kosmetik“ zu betrachten ist.

Die Ausarbeitungen von Unold (1922) gelten für doppelsymmetrische Querschnitte bei zentrischer Vertikalbelastung. Dabei wird die Aufteilung des Gesamt-torsionsmomentes in den St. Venant'schen Anteil und Wölbkraft-torsionsanteil exakt berücksichtigt.

Schnittkraftformeln für die Berechnung des Basisringträgers als stabförmiges Element sind auch in Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999) aufgenommen worden. Dabei werden für exzentrische Vertikalbelastung die Verläufe der Biege- und Gesamt-torsionsmomente wiedergegeben. Die “innere“ Aufteilung des Gesamt-torsionsmomentes wird jedoch nicht angegeben. Der Kreisringträger ist je nach konkreter Situation entweder als offener oder geschlossener Querschnitt zu behandeln.

1.2.1.3 Trichter-Schaft-Übergang

Beim Trichter-Schaft-Übergang werden die axialsymmetrischen Biegebeanspruchungen der angrenzenden Schalenteile zufolge der Wirkung der axialsymmetrischen radialen Trichtermembrankraftkomponente isoliert behandelt. Die baustatische Berechnung kann zum Beispiel mithilfe der mitwirkenden Breiten der angrenzenden Schalenteile erfolgen.

Zur Lösung des axialsymmetrischen elastischen Spannungsproblems gibt Guggenberger (1997) ein

baustatisches Analogiemodell an — ein Schalenteil wird unter Bezugnahme auf seine mitwirkende Breite als Zweipunktquerschnitt wiedergegeben. Die Berechnung erfolgt an einem rotationssymmetrischen Ringträger, dessen Querschnitt sich aus der Summe der Zweipunktquerschnitte der angrenzenden Schalenteile und dem allfällig vorhandenen Ringquerschnitt zusammensetzt. Eine umfassende Aufbereitung der theoretischen Grundlagen und der Anwendung dieses Berechnungsmodelles gibt Linder (2001).

Die Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit des Trichter-Schaft-Überganges erfolgt durch die Berechnung eines effektiven Ringquerschnittes, dem die plastischen mitwirkenden Breiten der angrenzenden Schalenteile zugrunde liegen (Rotter (1987), Rotter und Teng (1991a,b)).

Eine befriedigende Lösung erfolgt in Kap. 5 durch eine Erweiterung durch die Hinzunahme und Berücksichtigung von Membranbeanspruchungseffekten in Meridian- und Umfangsrichtung.

1.2.1.4 Silogesamtsystem

Rotter und Teng (1990, 1992) zeigen exemplarisch die gemeinsame Lastabtragung von Schaft und Trichter an zwei ausgewählten Entwurfsbeispielen in Abhängigkeit der Ausführung des Schaftes mit Wellblechsegmenten oder zylindrisch gekrümmten ebenen Blechen.

Generell ist hier zu bemerken, daß hier noch wesentliche Arbeit zu leisten ist. Insbesondere was das kraft- und verformungsschlüssige Zusammenwirken des Schaftes mit dem Trichter betrifft. Dies bezieht sich sowohl auf linear-elastische Spannungsberechnungen als auch auf elasto-plastische Berechnungen des Gesamtsystems.

1.2.2 Bemessung bzw. Tragfähigkeitsabschätzung auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung von kreiszylindrischen Stahlsilokonstruktionen hinsichtlich der:

- elasto-plastischen Grenztragfähigkeit
- Beultragfähigkeit

Die grundlegende Basis zur Abschätzung dieser elasto-plastischen Tragfähigkeiten kann optional näherungsweise mithilfe von linear-elastischen Spannungsberechnungen erfolgen, und zwar im folgenden aufbauend auf den Regelungen von Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) (siehe Kap. 1.2.4).

Zu bemerken ist, daß in dieser Arbeit die Beultragfähigkeit nur für das kombinierte Schaft-Längssteifen-System in Kap. 8 begleitend mituntersucht wird.

1.2.2.1 Abschätzung der elasto-plastischen Grenztragfähigkeit

Die näherungsweise Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen erfolgt durch die Superposition der Spannungskomponenten zufolge der auftretenden Schnittkräfte und Schnittmomente. Dabei kann die mögliche Ausbildung von plastischen Zonen über Teilbereiche der Schale nicht berücksichtigt werden.

Die Eingangsgrößen zur Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit sind per Definition die "Primärspannungen", die sich aus den primären Schnittkräften und Schnittmomenten ergeben, die zur Erfüllung des Gleichgewichtes notwendig sind. Bei allgemeiner rotationssymmetrischer Belastung sind neben den Membrankräften n_x , n_θ und $n_{x\theta}$ auch die Biegemomente m_x , m_θ und $m_{x\theta}$ bzw. Querkräfte q_x und q_θ zur Erfüllung des Gleichgewichtes notwendig. "Primäre Schnittgrößen" müssen untereinander statisch kompatibel sein. Es besteht daher die Möglichkeit reduzierte Steifigkeitsmodelle für die Schalenberechnung zugrunde zu legen. Dadurch können untergeordnete Schnittgrößen von vornherein ausgeblendet werden.

Zur Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit können folgende Vergleichskriterien, wie in Tab. 1-2 dargestellt, herangezogen werden:

- Fließen des maßgebenden, stärkst beanspruchten Punktes an den Schalenoberflächen, das Fließkriterium wird ausgedrückt in Schalenspannungen
- Ilyushin-Fließkriterium (Berücksichtigung plastischer Spannungsverteilungen über die Schalendicke), das Fließkriterium wird ausgedrückt in Schalenschnittkräften
- Fließen des maßgebenden Punktes der Schalenmittelfläche (Membranfließen), dies stellt ein approximatives (inkonsistentes und inkonservatives) Fließkriterium dar.

Das Fließen des maßgebenden, stärkst beanspruchten Punktes an den Schalenoberflächen auf Basis der elastischen Spannungsverteilungen (Mises-Vergleichspannungskriterium) stellt den konservativsten Grenzfall zur Abschätzung der plastischen Tragfähigkeit dar. Plastische Umlagerungseffekte werden weder über einen größeren Schalenbereich (plastische Zone) noch in einem singulären Punkt der Schale über die Schalendicke erfaßt.

Die Berechnung der plastischen Grenztragfähigkeit auf Basis der linear-elastischen Spannungsverteilungen – siehe Zeile 1 in Tab. 1-2 — liefert somit einen unteren Grenzwert.

Bei Anwendung des Ilyushin-Fließkriteriums werden plastische Umlagerungseffekte zumindest für einen singulären Punkt der Schale aufgrund der plastischen Interaktion der Schalenschnittgrößen berücksichtigt (siehe Zeile 2 in Tab. 1-2).

Ähnlich der Berechnung der plastischen Tragfähigkeit von Rechtecksquerschnitten bei Momenten- und Normalkraftbeanspruchung wird unter der vereinfachten Voraussetzung einer linearen Interaktion zwischen den Schalenmembrankräften und den Schalenbiegemomenten, deren Verteilungen nunmehr entsprechend des plastischen Grenzzustandes angenommen werden, der maßgebend beanspruchte Punkt an den Schalenoberflächen bestimmt.

Bei Anwendung des Membranfließens als Versagenskriterium erfolgt eine Vernachlässigung jeglicher Biegeeffekte, dies kann zu einer unsicheren Abschätzung der plastischen Tragfähigkeit führen, wenn in

Wirklichkeit Biegeeffekte auftreten.

Dies stellt somit eine stark vereinfachte Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit auf Basis der Membrankräfte (siehe Zeile 3 in Tab. 1-2) bei allgemeiner Belastung dar. Die Tragfähigkeit wird somit durch das Erreichen der Fließgrenze im stärkst beanspruchten Punkt der Schalenmittelfläche erreicht. Die Schalenbiegemomente werden somit bewußt vernachlässigt, auch wenn sie zu Primärspannungen führen. Im Fall rotationssymmetrischer Schalen bei Vorliegen rotationssymmetrischer Belastungen ist dies zulässig, da die Schalenbiegemomente aus Kompatibilitätsgründen an den Schalenrändern bzw. Schalenübergängen (Wanddickensprünge) bzw. Belastungsrändern auftreten.

Sind die Biegemomente für das Gleichgewicht wesentlich — wie im Fall eines Schalensegmentes mit einseitiger Einspannung und drei freien Rändern (=Kragarmsystem) — führt dies zu einer eklatant unsicheren und somit falschen Abschätzung der Tragfähigkeit. Hier ist also Vorsicht geboten!

Ein konsistentes Vorgehen zur Vernachlässigung von Schalenbiegemomenten stellt die baustatische Modellierung als Semi-Membran-Schale dar (siehe Anhang A.1). Dabei wird in der Anwendung auf dünnwandige Schalen ein Teil der Biegemomente, Biegemoment m_x in Meridianrichtung bzw. das Drillmoment $m_{x\theta}$ zu Null gesetzt, und nur das zur Lastverteilung wesentliche Umfangsbiegemoment m_θ berücksichtigt. Für Kreiszylinderschalen wurde dieses Modell unter anderem von Greiner (1984) und Öry (1984) angewandt.

Tab. 1-2 Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen analog Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999)

Versagensform	Versagenskriterium	
Fließen des stärkst beanspruchten Punktes an den Schalenoberflächen	Mises-Vergleichsspannung	$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x}{t^2/6}, \sigma_\theta = \frac{n_\theta}{t} \pm \frac{m_\theta}{t^2/6},$ $\tau_{x\theta} = \frac{n_{x\theta}}{t} \pm \frac{m_{x\theta}}{t^2/6}$ $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x \sigma_\theta + 3\tau^2} \leq f_y$
Fließen des stärkst beanspruchten Punktes unter Berücksichtigung von plastischen Schalenbiegewirkungen (keine Momentenumlagerung erfaßt)	Ilyushin-Fließkriterium	$\sigma_x = \frac{n_x}{t} \pm \frac{m_x}{t^2/4}, \sigma_\theta = \frac{n_\theta}{t} \pm \frac{m_\theta}{t^2/4},$ $\tau_{x\theta} = \frac{n_{x\theta}}{t} \pm \frac{m_{x\theta}}{t^2/4}$ $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x \sigma_\theta + 3\tau^2} \leq f_y$
Fließen des stärkst beanspruchten Punktes der Schalenmittelfläche (nur für reine Membranschnittkraftzustände zutreffend)	Membran-Fließen	$n_{eq} = \sqrt{n_x^2 + n_\theta^2 - n_x n_\theta + 3n_{x\theta}^2} \leq f_y t$

1.2.2.2 Abschätzung der Beultragfähigkeit

Die im folgenden dargestellte Abschätzung der Beultragfähigkeit stellt einen Vorschlag einer praktischen Vorgehensweise dar, welcher in Anlehnung an Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) für kreiszylindrische Stahlsilokonstruktionen mit und ohne Längsversteifungen (lokale bzw. durchgehende Längsversteifungen) anwendbar ist.

Die Beurteilung der Beultragfähigkeit kann näherungsweise basierend auf linear-elastischen Spannungsberechnungen durch die Beurteilung der Membranspannungen (σ_x , σ_θ und $\sigma_{x\theta}$) bzw. Membrankräfte (n_x , n_θ und $n_{x\theta}$) entlang der sogenannten "Beulmeridiane" bzw. an den beulrelevanten Stellen erfolgen.

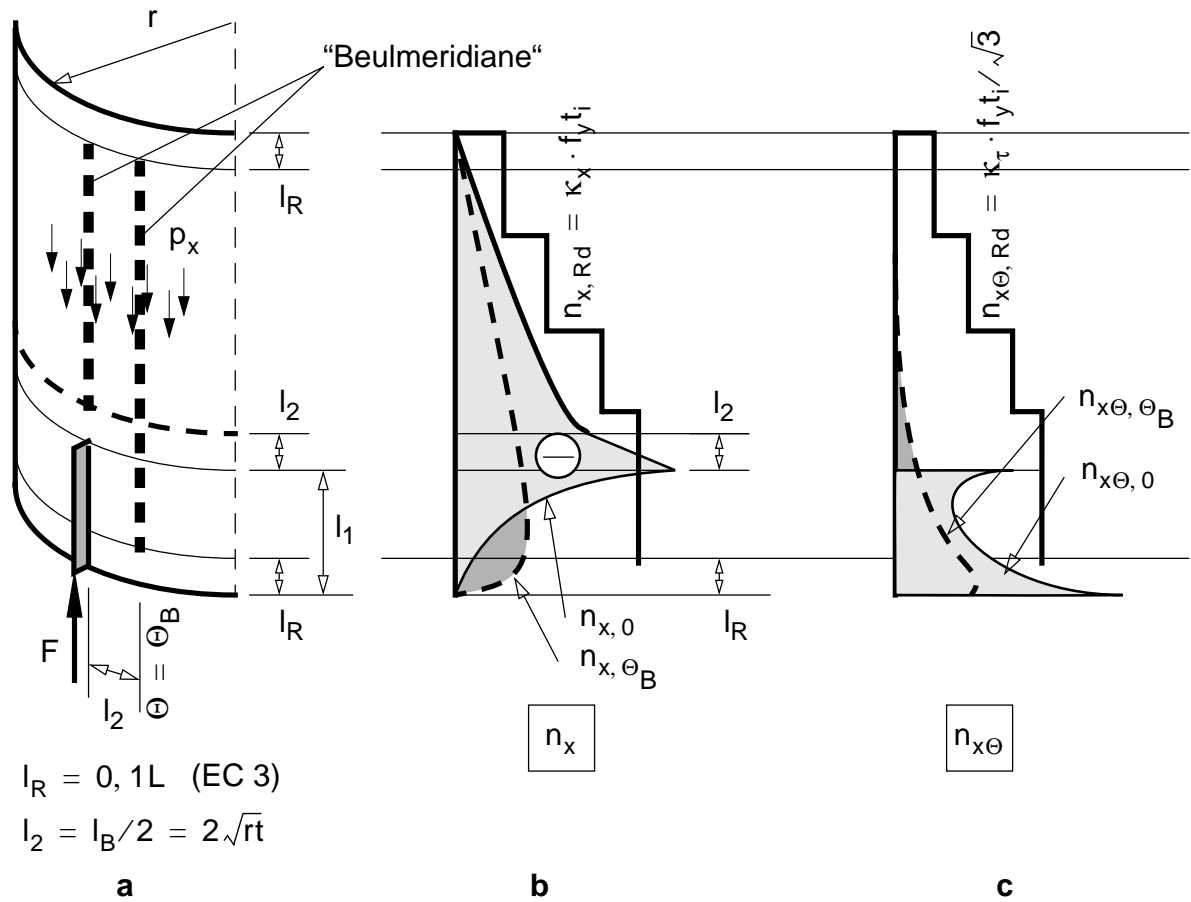
Diese Beulmeridiane sind in Bild 1-23 in Anlehnung an den Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) festgelegt, wobei die Lage des seitlichen Beulmeridianes und die Lage der maßgebenden Umfangslinie so festgelegt wird, daß die Orte des Beulnachweises im zu erwartenden Beulzentrum zu liegen kommen. Als Bezugsbeulabmessung wird die reale Beulengröße der Axialbeulung ($l_B = 4\sqrt{rt}$), die vielfach dominierend ist, verwendet. Die Abstände vom oberen und unteren Schalenrand werden entsprechend den Vorgaben von Eurocode 3 - Teil 1.6 gewählt.

Im Auflagermeridian wird im Fall des skizzierten Beispiels in Bild 1-23 — Siloschaft mit Auflagerkrafteinleitung über eine lokale Längssteife — aufgrund der Symmetrieverhältnisse nur der Nachweis hinsichtlich Axialbeulung erbracht (Bild 1-23.b). Im seitlich gelegenen Beulmeridian muß die Interaktion der vorhandenen Axial- und Schubkräfte entsprechend der Regeln nach Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) oder DIN 18800 - Teil 4 (1990) zur Berechnung der Beultragfähigkeit berücksichtigt werden (Bild 1-23.c).

Durch die lastverteilende Wirkung der Längssteife und die auftretenden Radialverformungen des Schaftes im Bereich der lokalen Auflagerlängssteife ist als Stabilitätsversagen ein Durchschlagsversagen zu erwarten (siehe Guggenberger (1991)). Die Anwendung der Beulabminderungsfaktoren, die für die klassischen Beulfälle bei konstanten Spannungsverteilungen (zB. konstante Axialdruckbelastung) gelten, führen im allgemeinen zu konservativen Abschätzungen der Beultragfähigkeit.

In Bild 1-24 ist die Lage des Beulmeridianes für einen Siloschaft mit durchgehenden Auflagerlängssteifen dargestellt. Durch das Verhindern einer Beulenausbildung im Auflagermeridian erfolgt nun die Abschätzung der Beultragfähigkeit nur mehr im Beulmeridian neben der Auflagerlängssteife.

Die versteifende Wirkung der Auflagerlängssteifen und den damit generell kleineren Verformungen des Schaftes läßt auf eine bessere Anwendbarkeit der Beulabminderungsfaktoren, die für konstante Spannungsfelder gelten, schließen.



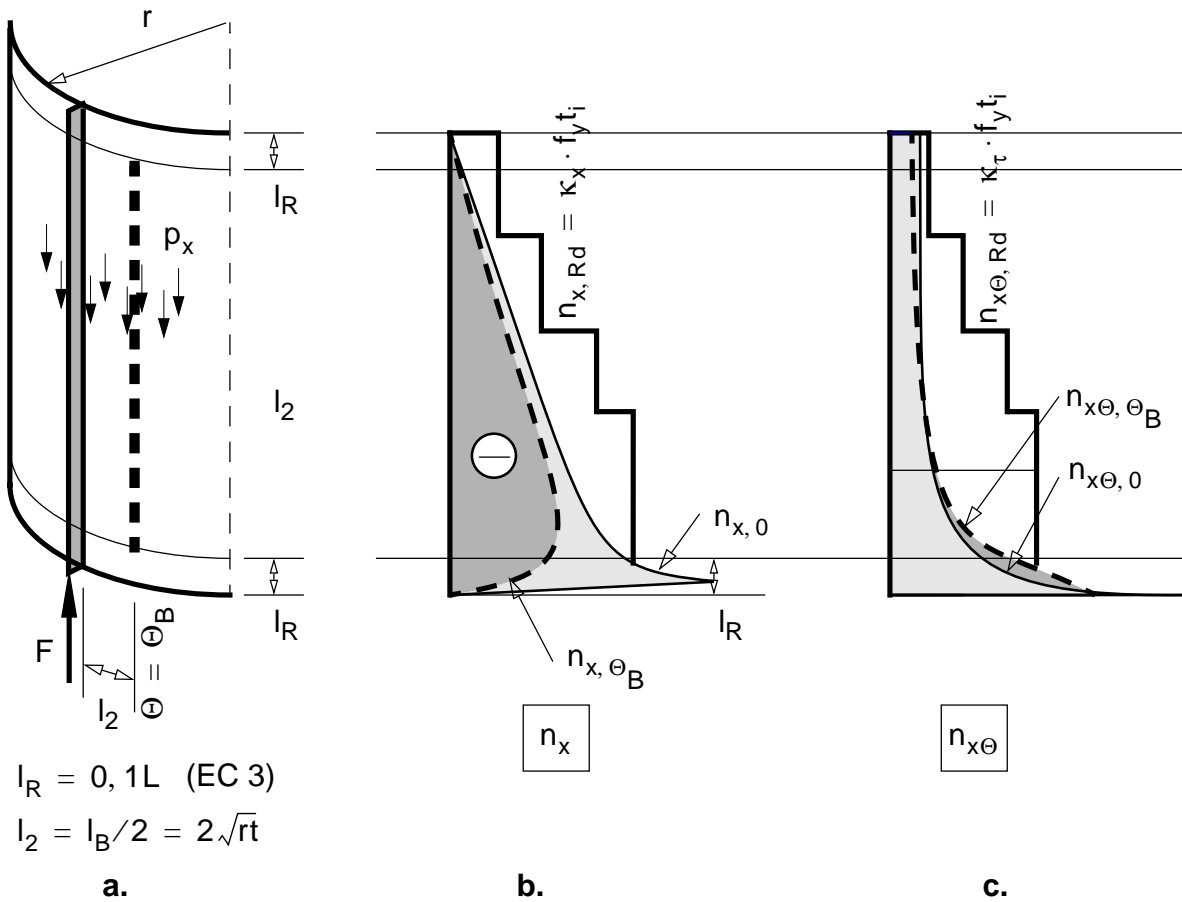
Abschätzung der Beultragfähigkeit im Auflagermeridian ($\Theta = 0^\circ$):

$$(x \geq l_1 + l_2, \Theta = 0): \frac{n_{x,0}}{n_{x,Rd}} \leq 1$$

Abschätzung der Beultragfähigkeit im Beulmeridian ($\Theta = \Theta_B$):

$$(x \geq l_R, \Theta = \Theta_B): \left(\frac{n_{x,\Theta_B}}{n_{x,Rd}}\right)^{1,25} + \left(\frac{n_{x\Theta,\Theta_B}}{n_{x\Theta,Rd}}\right)^2 \leq 1$$

Bild 1-23 Siloschaft mit lokalen Auflagerlängssteifen — **a.** Lage der Beulmeridiane, **b.** Meridiankraftverläufe n_x bzw. **c.** Schubkraftverläufe $n_{x,\Theta}$ im Auflagermeridian (zentraler Beulmeridian) und im seitlich situierten Beulmeridian (Formeln entsprechend Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999))



Abschätzung der Beultragfähigkeit im Beulmeridian:

$$(x \geq l_R, \Theta = \Theta_B): \left(\frac{n_{x, \Theta_B}}{n_{x, Rd}} \right)^{1,25} + \left(\frac{n_{x\Theta, \Theta_B}}{n_{x\Theta, Rd}} \right)^2 \leq 1$$

Bild 1-24 Siloschaft mit durchgehenden Auflagerlängssteifen — **a.** Lage der Beulmeridiane, **b.** Meridiankraftverläufe n_x bzw. **c.** Schubkraftverläufe $n_{x, \Theta}$ im Auflagermeridian (zentraler Beulmeridian) und im seitlich situierten Beulmeridian (Formeln entsprechend Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999))

In Bild 1-23 bzw. Bild 1-24 sind an den unteren Schafrändern bzw. am oberen Rand der lokalen Längssteife hohe Schubspannungsspitzen im Auflagermeridian angedeutet. Diese stellen hinsichtlich der Abschätzung der Tragfähigkeit (Bemessung) Problemzonen dar. Es folgt die Fragestellung, ob sie als (sekundäre) Kompatibilitätsspannungen zu interpretieren sind und somit für die Abschätzung der plastischen Tragfähigkeit vernachlässigbar sind, obwohl es sich bei diesen Spannungskomponenten — wohlge­merkt — um in der Schalenmittelfläche wirkende Membranspannungen handelt.

1.2.3 Nichtlineare Berechnungen

Nichtlineare Berechnungen können je nach Art des untersuchten Schalenteiles bzw. des untersuchten Versagensmodus wie folgt klassifiziert werden:

- Materiell nichtlineare Berechnungen zur Berechnung der plastischen Systemtragfähigkeit (MNA)
- Geometrisch nichtlineare Beulberechnungen (GNA, GNIA)
- Geometrisch und materiell nichtlineare Beulberechnungen (GMNA, GMNIA)

1.2.3.1 Nichtlineare Beulberechnungen für lokale Randauflagerung

Nichtlineare Beulberechnungen von Zylinderschalen führte Guggenberger (1991, 1992) zur Bestimmung der realen Beultragfähigkeit von Zylinderschalen bei lokaler Axialbelastung durch. Dabei wird in Abhängigkeit der lokalen Belastungsbreite die Beultragfähigkeit von unversteiften Zylinderschalen eingehend untersucht. Aufbauend darauf werden zusätzliche Untersuchungen für verschiedenste Versteifungsvarianten im unteren Zylinderbereich (Wanddickenerhöhung, lokale Auflagerlängssteifen, Ringsteifen) angestellt. Die Axialbelastung entspricht einer nachgiebigen Lagerung eines Silos auf Einzelstützung. Die lokale Lagerung des Zylinders wird dabei als unendlich nachgiebige Lagerung durch konstante verteilte Lagerkräfte in Axialrichtung wiedergegeben.

Rotter et al (1990b) stellt analoge Untersuchungen für starre Lagerung an. Dabei wird für unversteifte Zylinderschalen gegenüber der Arbeit von Guggenberger ein größerer Parameterbereich abgedeckt.

Aufbauend darauf und mithilfe von eingehenden Parameterstudien entwickelt Guggenberger (1998a,b) Bemessungsregeln für axial lokal gelagerte Zylinderschalen. In Abhängigkeit der Lagerbreite (Lageröffnungswinkel) kann für beliebige Zylinderschalen ohne Längsversteifung die Beultragfähigkeit bestimmt werden. Dies steht im Gegensatz zum Vorschlag von Knödel und Ummenhofer (1998), nach dem die Beultragfähigkeit näherungsweise durch vereinfachte Berechnung der Meridianspannungen bestimmt wird.

1.2.3.2 Schaft mit Längsversteifungen

Diack (1983) führt FE-Beulberechnungen an eng versteiften Zylinderschalen (stringer stiffened shells) mit rotationssymmetrischer Axialbelastung durch. Die vorliegenden Resultate treffen nur für den rotationssymmetrisch gelagerten Schaft von Silokonstruktionen zu und wurden primär im Hinblick auf die Untersuchung der Steifenstabilität ermittelt.

1.2.3.3 Materiell nichtlineare Berechnungen des Trichter-Schaft-Überganges

Das Tragverhalten des Silotrichters, des Trichter-Schaft-Überganges wird von Rotter und Teng (1987, 1991, 1996) bei kontinuierlicher rotationssymmetrischer Lagerung mithilfe von materiell nichtlinearen Berechnungen hinsichtlich seiner plastischen Grenztragfähigkeit systematisch untersucht. Dabei wird die Tragfähigkeit des Trichters durch die Berücksichtigung der Biegerandstörung in der oberen Randzone limitiert. Die Tragfähigkeit des Trichter-Schaft-Überganges und das zugeordnete Versagen wird anhand einer Berechnung mithilfe mitwirkender Breiten bestimmt. Die Gültigkeit wird mit materiell nichtlinearen Berechnungen überprüft. Weiters wird eine Flachringversteifung am Trichter-Schaft-Übergang hinsichtlich lokalen Beulens untersucht.

1.2.4 Aktuelle Normenregelungen

Viele Forschungsarbeiten der letzten Jahrzehnte fanden neuerdings Eingang in die Eurocodes zur Bemessung von schalenförmigen Stahltragwerken (z.B. Rotter (1987) bzw. Rotter und Teng (1991, 1996)).

Forschungen auf dem Gebiet der Silolasten fanden Eingang in verschiedenste Belastungsnormen. Die Grundlage für die Druckverteilungen am Siloschaft stellt dabei nach wie vor die Silodruckformel nach Janssen (1899) dar. Für die theoretische Bestimmung der Druckverteilungen am Silotrichter ist hingegen z.B. die Arbeit von Walker (1966) zu nennen.

Im folgenden wird ein kurzer Überblick über die Normenregelungen der Eurocodes zur Berechnung und zum Entwurf von Schalenträgwerken und Silos aus Stahl gegeben.

1.2.4.1 Entwurf und Bemessung

Für den Entwurf und die Bemessung von Silostrukturen aus Stahl stehen neuerdings folgende Normenwerke (derzeit als Vornormen) zur Verfügung:

- Eurocode 3 – Teil 1.6 (1999): prENV 1993-1-6 – Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1.6.: General Rules: Supplementary Rules for Shell Structures.
- Eurocode 3 – Teil 4.1 (1999): prENV 1993-4-1 – Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 4.1: Silos.

Generelle Regelungen

Generelle Regeln sind in Eurocode 3 — Teil 1.6 (1999) enthalten, zur Überprüfung der Grenzzustände (Ultimate Limit States — ULS) der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit werden mehrere Möglichkeiten der Strukturberechnung vorgeschlagen und klassifiziert, welche in Tab. 1-3 wiedergegeben sind.

Die verwendeten Berechnungsverfahren sind dabei:

- LA linear-elastische Spannungsanalyse (Schalenbiegetheorie)
- MA Membrananalyse (direkte Lösung der Membrangleichgewichtsgleichungen)
- MNA Materiell nichtlineare Analyse
- LEA (CBEV) Lineare Eigenwertanalyse (klassische (lineare) Beuleigenwertberechnung)
- GNA Geometrisch nichtlineare Analyse des perfekten Systems
GNIA Geometrisch nichtlineare Analyse des imperfekten Systems
- GMNA Geometrisch und materiell nichtlineare Analyse des perfekten Systems
GMNIA Geometrisch und materiell nichtlineare Analyse des imperfekten Systems

Die unterste Stufe der Strukturberechnung stellt die linear-elastische Spannungsberechnung (LA) des Systems dar. Je nach Lagerungsverhältnissen und Belastung können die Schnittkraft- und Verformungsverteilungen auch mittels Membranberechnungen (MA) bestimmt werden. Diese Ergebnisse dienen als Basisgrößen zur Abschätzung der Tragfähigkeit.

Die Tragfähigkeiten werden durch Anwendung nichtlinearer Berechnungen mit zunehmender Approximationsqualität bestimmt. Für die Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit (ULS 1) bzw. der Tragfähigkeit hinsichtlich Wechselplastizierens (ULS 2) sind materiell nichtlineare Berechnungen (MNA), für die Bestimmung der Beultragfähigkeit sind geometrisch bzw. geometrisch und materiell nichtlineare Beulberechnungen des perfekten Systems (GNA, GMNA) oder mit der zusätzlichen Berücksichtigung von geometrischen Imperfektionen (GNIA, GMNIA) durchzuführen.

Alternativ kann die Bemessung für einfache Standardfälle mithilfe der sogenannten direkten Bemessung ("Direct-Design") durch Anwendung für spezielle Fälle vorliegender fertiger Formeln erfolgen. In Annex A, Annex B und Annex C von Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) sind hierfür Berechnungsformeln angegeben.

Modellbildung

Die Vorgaben des Eurocodes 3 - Teil 1.6 (1999) zielen auf die Modellierung bzw. Berechnung der Gesamtstruktur hin und zwar wegen der bestehenden Unsicherheit im Herauslösen repräsentativer Teilsysteme. Die folgende baustatische Berechnung (Strukturanalyse) wird als globale Analyse bezeichnet. Je nach zu beurteilendem Grenzzustand der Tragfähigkeit ist eine der Berechnungsverfahren von Tab. 1-3 anzuwenden.

Die Modellierung von Teilsystemen ist jedoch zulässig. Dabei wird gefordert, daß:

- implementierten Randbedingungen des herausgelösten Teilsystems in adäquater Art und Weise die Wirkung der in der aktuellen Modellbildung weggeschnittenen Teile wiedergeben (falls dies möglich ist)
- wechselweise wirkenden Randkräfte zwischen den Teilsystemen konsistent berücksichtigt werden, also das Gleichgewicht am Gesamtsystem stets erfüllt wird

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Teiltragsysteme bzw. das Gesamtragsystem untersucht, und zwar hinsichtlich:

- plastische Grenztragfähigkeit (ULS 1)
- Beultragfähigkeit (ULS 3)

Tab. 1-3 Bemessungskonzepte zur Beurteilung der Grenzzustände der Tragfähigkeit nach Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) und Zuordnung der erforderlichen Berechnungsprozeduren

Bemessungsgrundlage	Grenzzustände der Tragfähigkeit			
	ULS 1 — plastische Grenztragfähig- keit	ULS 2 — Wechsel- plastizieren	ULS 3 — Beultrag- fähigkeit	ULS 4 Ermüdung
Linear-elastische Spannungsberechnung	MA LA	LA	MA LA	LA
Globale Strukturanalyse	MNA GMNA	MNA GMNA	LEA (CBEV) GNA GNIA GMNA GMNIA	LA GNA
Direkte Bemessung ("direct design")	Annex A Annex B	Annex A Annex C	—	—

Zuverlässigkeitsklassen für Stahlsilokonstruktionen

Die Spezialisierung der Bestimmungen für Stahlsilokonstruktionen erfolgt in Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999). Je nach Größe des Silos erfolgt die Zuteilung in eine Zuverlässigkeitsklasse. Daraus ergeben sich, wie in Tab. 1-4 wiedergegeben, die Anforderungen hinsichtlich der Modellbildung und folglich der durchzuführenden Berechnungen.

Die geringsten Anforderungen ergeben sich für Kleinsilos der Zuverlässigkeitsklasse 1. Eine Berechnung des rotationssymmetrischen Grundanteiles und die Verwendung von Erhöhungsfaktoren für nicht-rotationssymmetrische Lastanteile wie z.B. für Einzelauflagerungen werden als ausreichend angesehen.

Für Silos der Zuverlässigkeitsklasse 2 — Silos mittlere Größe mit Füllgewichten kleiner 200 bzw. 1000 oder 5000 Tonnen (je nach Lagerungsart bzw. Füll- und Entleerzuständen) ist die Anwendung traditioneller baustatischer Modellbildungsstufen wie z.B. die Berechnung des Basisringträgers als isolierter Kreisringträger zur Abtragung der Gesamtvertikalbelastung bei Einzelauflagerung zulässig. Der Schaft und der Trichter können dabei — stark vereinfachend — als rotationssymmetrisch abtragende Elemente aufgefaßt werden.

Für Silos der Zuverlässigkeitsklasse 3 ist hingegen eine globale Analyse, also eine Berechnung des Silogesamtsystems nötig. Die Berechnung von Teiltragsystemen ist entsprechend Eurocode 3 - Teil 1.6 zulässig. Das Gleichgewicht am Gesamtsystem ist dabei konsistent durch die entsprechende Vorgabe von wechselweise wirkenden Randkräften zu gewährleisten und Beanspruchungen, die aus Inkompatibilitäten der Teiltragsysteme entstehen und auch am Gesamtsystem eine signifikante Rolle spielen, müssen berücksichtigt werden. Dies hat letztendlich zur Folge, daß in irgendeiner Form eine Berechnung des Silogesamtsystems (=globale Analyse) durchzuführen ist.

Tab. 1-4 Zuordnung in Zuverlässigkeitsklassen

Zuverlässigkeitsklasse (reliability class)	Füllgewicht (capacity in excess)		Berechnungsanforderungen
	Füllgewicht [Tonnen]	Anmerkung	
1	< 100	—	Membranberechnung
2	≥ 100 $\leq 5000/$ $1000/200$	obere Grenze siehe Zuverlässigkeitsklasse 3	Anwendung traditioneller baustatischer Modellbildungen
3	> 5000	kontinuierliche Auflagerung	globale numerische Berechnung entsprechend Eurocode 3 - Teil 1.6
	> 1000	diskrete Auflagerung	
	> 200	a) exzentrische Belastung b) Teilflächenbelastung c) unsymmetr. Füllzustände	

1.2.4.2 Lastannahmen

Grundlage für die Bestimmung der Einwirkungen sind Lastannahmen, die die tatsächlichen Einwirkungen stellvertretend äquivalent wiedergeben sollen. Die Angaben zu den Belastungen zufolge Silofüllung sind z.B. in folgenden Normenwerken enthalten:

- DIN 1055 — Teil 6 (1987)
- Australian Standard AS 3774-1996 (1996)
- Eurocode 1 — Teil 4:
Basis of Design and Actions on Structures — Part 4: Actions in Silos and Tanks

Eingehende Erläuterungen und ein Überblick zu den theoretischen Hintergründen der angesetzten Belastungen sind z.B. im Silohandbuch (Martens (1988)) enthalten. Eine Übersicht und einen Vergleich verschiedenster Normenregelungen gibt unter anderen auch Hampe (1991).

1.3 Problemstellung

1.3.1 Anforderungen an die Siloberechnung

Mit den Regelungen nach Eurocode 3 - Teil 1.6 und den Spezialisierungen von Teil 4.1 stehen je nach Silogröße — also nach der Zuordnung in die Zuverlässigkeitsklasse 1, 2 oder 3 — die zu erfüllenden Anforderungen hinsichtlich der Bestimmung der Tragfähigkeit von Silokonstruktionen und somit auch hinsichtlich der Berechnung fest.

Praktische Siloberechnung

Durch den Anwendungskatalog verschiedenster Berechnungsprozeduren und durch die jedenfalls machbare Abschätzung der plastischen Grenztragfähigkeit und der Beultragfähigkeit auf der Basis linear-elastischer Spannungsanalysen ergibt sich ein wesentlicher Fortschritt gegenüber der zum Teil gängigen Praxis des Entwurfes und der Berechnung von Silokonstruktionen. In derartigen Vorgangsweisen werden oftmals allein die rotationssymmetrischen Grundanteile der Lastabtragung und empirische Erhöhungsfaktoren für die wesentlichen zusätzlichen Beanspruchungen des nicht-rotationssymmetrischen Lastanteiles (Gesamlastabtragung über den diskreten Auflagerungen) der Tragfähigkeitsbeurteilung zugrundegelegt.

Diese Vorgehensweise kann entsprechend den Vorgaben von Eurocode 3 - Teil 4.1 (siehe Tab. 1-5) als Siloberechnung der Zuverlässigkeitsklasse 1 eingestuft werden. Dies erfolgt somit ohne Beachtung der Silogröße und steht im Widerspruch zu Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999).


Globale Analyse des Silogesamtsystems

Die Vorgaben von Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999) ergeben die Notwendigkeit einer globalen Analyse des Silogesamtsystems bzw. der Berechnung von Teiltragsystemen für Silos der Zuverlässigkeitsklasse 3 — also bereits für Silos ab ca. 1000 Tonnen Füllgewicht bzw., wenn unsymmetrische Füll- bzw. Entleerzustände vorliegen, ab 200 Tonnen Füllgewicht.

Zum Verständnis der Lastabtragung wird eine Berechnung von herausgelösten Teiltragsystemen vom Autor dieser Arbeit als notwendig angesehen. Sie stellt die intellektuelle Basis zur Beurteilung der Berechnungsergebnisse der globalen Analyse des Silogesamtsystems dar.

Dies soll im folgenden durch die Entwicklung verfeinerter baustatischer Modellbildungen, die über die traditionellen baustatischen Modellbildungen hinausgehen, realisiert werden. In Tab. 1-5 ist dieses Vorhaben durch den geschwungenen Pfeil in Spalte 4 gekennzeichnet.

Tab. 1-5 Zuordnung in Zuverlässigkeitsklassen

Zuverlässigkeitsklasse	Füllgewicht	Berechnungsanforderungen	Modellbildung
	[Tonnen]		
1	< 100	Membranberechnung	primitive Modellbildung
2	≥ 100 $\leq 5000 / 1000 / 200$	Berechnung durch Anwendung traditioneller baustatischer Modellbildungen	 Gesamtmodell bzw. äquivalente Berechnung von Teiltragsystemen durch verfeinerte baustatische Modellbildungen
3	$> 5000 / 1000 / 200$	Berechnung des Gesamtsystems (=globale Analyse)	

Parameterbereich und Berechnungsprozeduren

Bei den rechnerischen Untersuchungen müssen hierbei Festlegungen getroffen werden, und zwar hinsichtlich:

- abzudeckender (praktisch relevanter) Parameterbereich
- Wahl der Berechnungsprozedur — lineare oder nichtlineare Berechnung — bzw. eine Aussage hinsichtlich der Approximationsqualität der gewählten Berechnungsprozedur

Exemplarisch wird dies im Zuge dieser Arbeit anhand der verfeinerten baustatischen Modellbildung des Siloschaftes mit durchgehenden Auflagerlängssteifen gezeigt.

Guggenberger (1991) hat in seiner Dissertation “Nichtlineares Beulverhalten von Kreiszylinderschalen unter lokaler Axialbelastung“ grundlegende Ergebnisse für unversteifte Zylinderschalen erarbeitet. Weiters hat er das Beulverhalten für verschiedenste Versteifungskonstruktionen — wie Wanddickenerhöhungen, lokale Auflagerlängssteifen und Ringversteifungen (am oberen Ende der Auflagerlängssteifen) — praktischer Silokonstruktionen untersucht. Die berechneten Beullasten werden folglich mit jener der

unversteiften Kreiszyinderschale verglichen.

Bezugnehmend auf Guggenbergers Dissertation hat Professor Bornscheuer 1994 weitergehende Untersuchungen für den Siloschaft mit durchgehenden Auflagerlängssteifen angeregt. Dabei ergaben sich Problemstellungen hinsichtlich des zu wählenden Parameterbereiches und der durchzuführenden Berechnungen bzw. der maßgebenden Versagensform — Beulen der Schalenwand oder elasto-plastisches Knicken der Auflagerlängssteife.

Die statische Überprüfung für einen Stahlsilo mit ca. 900 m³ Füllvolumen und 1600 Tonnen Füllgewicht einer österreichischen Silobaufirma und der Vergleich mit dem Ausführungsvorschlag einer Konkurrenzfirma gaben die Motivation zur konkreten Durchführung dieser Arbeit und lieferten viele wichtige Anfangserkenntnisse und Wegweisungen, die Untersuchungen in die richtige Richtung zu treiben (Guggenberger und Wallner (1998,1999a und 1999b)).

Als wesentlich für die Tragfähigkeit stellte sich das elastoplastische Knicken der Längssteife heraus. Dabei sind die aus Kompatibilitätsgründen entstehenden, ungleichförmig verteilten Koppelschubkräfte zwischen Schaft und Auflagerlängssteife unbedingt zu berücksichtigen. Es stellt dies somit eine Verfeinerung der traditionellen baustatischen Modellbildung dar, in welcher konstant verteilte Koppelschubkräfte vorgegeben (siehe Kap. 1.2.1.1) werden. Für eine korrekte statische Erfassung des Zusammenwirkens ist daher eine Berechnung des kombinierten Schaft-Längssteifen-Systems notwendig.

In Kap. 8 wird die Tragfähigkeit dieses kombinierten Schaft-Längssteifen-Systems untersucht. Dabei wird ein eigenes linear-elastisches Berechnungsmodell inklusive der Berücksichtigung von Stabilitätseffekten (Berechnung nach Theorie 2. Ordnung) entwickelt.

Zur Verifikation und Absicherung der Berechnungsergebnisse und der weiterhin getroffenen Bemessungsannahmen — wie die Vernachlässigung hoher Kompatibilitätsschubkräfte im unmittelbaren Auflagerbereich — werden folglich materiell nichtlineare Berechnungen (MNA) bzw. geometrisch und materiell nichtlineare Beulberechnungen (GMNA) durchgeführt.

1.3.2 Modellbildung

Hierarchie der Modellbildung

Die Modellbildung erfolgt je nach Silo entsprechend der zuordenbaren Zuverlässigkeitsklasse (siehe Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999)). Die Hierarchiestufen der Modellbildung — einfache Modelle (Membranberechnung und Erhöhungsfaktoren), traditionelle baustatische Modellbildungen und die globale Analyse des Silogesamtsystems — folgen aus der anzuwendenden Zuverlässigkeitsklasse.

Im folgenden soll durch verfeinerte baustatische Modellbildungen und der folgerichtigen Berechnung von Teilragsystemen der Übergangsbereich von Zuverlässigkeitsklasse 2 zu Zuverlässigkeitsklasse 3 der Siloberechnung abgedeckt werden. In Tab. 1-5 ist dieser angestrebte Übergang von traditionellen Modellbildungen der Siloberechnung zur Berechnung des Silogesamtsystems durch einen geschwungenen Pfeil gekennzeichnet.

Die entwickelten Modellbildungen können bei entsprechender Überprüfung durch die Berechnung des Silogesamtsystems für die nach Eurocode 3 - Teil 1.6 mögliche Berechnung von Teiltragsystemen in weiterer Folge auch für Silos der Zuverlässigkeitsklasse 3 angewendet werden.

Die Hierarchie der verfeinerten Modellbildungsstufen durch die Berechnung von Teiltragsystemen ergibt sich durch die Bewertung nach der Gegenüberstellung mit der globalen Analyse des Silogesamtsystems. Wesentlich ist vor allem, daß Kompatibilitätsbeanspruchungen, die am Gesamtsystem nicht zu vernachlässigen sind, also die Tragfähigkeit beeinflussen, bei der gewählten Modellbildung bestmöglich berücksichtigt werden.

Möglichkeiten baustatischer Modellbildungen für Stahlsilostragwerke

Für die baustatische Modellbildung ist die adäquate Berücksichtigung konstruktiver Gegebenheiten von zentraler Bedeutung.

Dabei ergeben sich Fragestellungen hinsichtlich der:

- baustatischen Modellierung von Auflagerungsbedingungen
- baustatischen Modellierung von integrierten Versteifungselementen, wie Längssteifen und Ringsteifen bzw. von eingebauten Schottblechen
- baustatischen Modellierung von Stößen bzw. Verbindungsfugen zwischen einzelnen Schalenteilen bzw. Schalenteilen und Versteifungselementen

1.3.3 Numerische Berechnungsverfahren

Die numerische Berechnung erfolgt dem Stand der Technik entsprechend mithilfe von Berechnungsprogrammen, die auf Basis von Finite-Elemente-Methoden operieren. Für die Durchführung dieser Arbeit wurde das FE-Programm ABAQUS (1997) verwendet.

Hinsichtlich der Bestimmung der Silostragfähigkeit stehen entsprechend Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) mehrere Berechnungsprozeduren zur Verfügung. Die Basis zur Abschätzung der Tragfähigkeit stellen dabei auf der einfachsten Stufe linear-elastische Spannungsberechnungen dar. Mit zunehmender Approximationsqualität können die Tragfähigkeiten mithilfe nichtlinearer Berechnungen (MNA, GNA, GMNA) bestimmt werden.

1.3.4 Analytische Berechnungsverfahren

Alternativ zu den FE-Berechnungen stehen in gewissen Fällen optional auch andere Möglichkeiten der Strukturberechnung zur Verfügung.

Diese sind die Anwendung alternativer Berechnungsverfahren, wie z.B.:

- die Diskretisierung durch Anwendung von Reihenansätzen in Umfangsrichtung (Reduktion auf ein eindimensionales Problem in Meridianrichtung)
- die Diskretisierung durch Anwendung von Reihenansätzen in Meridianrichtung, wie z.B. die Berechnung des Siloschaftes als Tonnenschale oder die Berechnung von Silos mit polygonalem oder rechteckigem Querschnitt als Faltwerk, falls an den Schafträndern idealisierte Endquerschottbedingungen vorliegen
- die Diskretisierung durch Anwendung von Doppelreihenansätzen sowohl in Meridian- als auch in Umfangsrichtung

Die Anwendung analytischer Berechnungsverfahren führt zu einem weiteren wichtigen Verständnisgewinn für den Ingenieur auf dem Niveau der strukturellen Problembehandlung, da dimensionslose Ergebnisdarstellungen und damit Einblicke in das Verhalten der maßgeblichen Parameter möglich werden.

2

ZIEL UND UMFANG DER ARBEIT

Inhalt von Kapitel 2:

2.1 Ziel der Arbeit

2.2 Umfang der Arbeit

2.1 Ziel der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung von Stahlsilokonstruktionen mit kreisförmigem Querschnitt hinsichtlich:

- Der elasto-plastischen bzw. starr-plastischen Grenztragfähigkeit, welche die Grundvoraussetzung jeglicher Bemessung darstellt.
- Der Beultragfähigkeit, welche hier aber nur methodisch eingeschränkt, das heißt meist ohne systematische nichtlineare Untersuchungen mitbetrachtet wird.

Dabei wird der komplexe Fall des Silos mit diskreten Auflagerungen und durchgehenden Auflagerlängssteifen behandelt. In dieser Arbeit erfolgt dies durch die Betrachtung der wesentlichen Lastabtragungsmechanismen an herausgelösten Teiltragsystemen. Die Aufteilung der Silogesamtstruktur in Teiltragsysteme erfolgt unter steter Berücksichtigung des Gleichgewichtes am Gesamtsystem (siehe dazu Eurocode 3 - Teil 1.6).

Das Ziel dieser Arbeit kann, wie folgt, kurz umrissen werden:

- Das rechnerisch und bemessungsmäßig korrekte Erfassen konstruktiver Gegebenheiten, wie die Berücksichtigung von Schalenstößen, integrierten Versteifungselementen wie Auflagerlängssteifen und in den Auflagermeridianen (im dreieckförmigen Hohlkastenquerschnitt) eingebauten Schottblechen.
- Die Entwicklung verfeinerter Modellbildungen, die einen Lückenschluß zwischen globaler Analyse des Silogesamtsystems und einfachen traditionellen Berechnungsmodellen darstellen. Zum Teil bauen diese traditionellen Berechnungsmodelle, wie in Kap. 1.1.4 dargestellt, auf primitiven Berechnungsmodellen wie kombinierten Stab- und Membranmodellen, auf.
- Die Anwendung verfeinerter Berechnungsmethoden, die von linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) ausgehen und durch die sukzessive Berücksichtigung von Nichtlinearitäten — materiell nichtlineare Berechnungen (MNA), geometrisch nichtlineare Berechnungen (GNA) bzw. geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen (GMNA) — eine steigende Approximationsqualität der berechneten plastischen Tragfähigkeiten liefern.
- Die Entwicklung und Bereitstellung von Bemessungsmethoden.
- Das Herausarbeiten einer Systematik für “reduzierte“ Kreiszylinderschalenmodelle (Anhang A.1).

2.1.1 Entwicklung verfeinerter Berechnungsmodelle für herausgelöste Teiltragsysteme

Das Ziel ist die Erklärung des Gesamttragverhaltens und der Gesamttragfähigkeit anhand adäquat herausgelöst betrachteter Teiltragsysteme. Dazu wird vorweg eine Aufteilung in Teiltragsysteme vorgenommen.

Durch die kräftemäßige Verbindung der Einzelsysteme ergibt sich folglich die Gesamttragfähigkeit aus der Summe der zusammenwirkenden Einzeltragfähigkeiten bzw. die Summe der Einzeltragfähigkeiten bei Berücksichtigung von Interaktionseffekten zwischen den Teiltragsystemen.

Die Hierarchie der verfeinerten Modellbildung ergibt sich, wie bereits in Kap. 1.3 erwähnt, aufbauend auf den traditionellen baustatischen Modellbildungen. Im wesentlichen geschieht dies durch das Herauslösen und die zum Teil isolierte Behandlung der schalenförmigen Einzelkomponenten wie Schaft, Trichter und Dach. Die Zielsetzung dieser Arbeit ist das Herausarbeiten von möglichst günstigen und dem Verhalten des Gesamtsystems möglichst entsprechenden Lastabtragungsmechanismen. Gegenüber den traditionellen Modellbildungen werden folgende verfeinerte Modellbildungen untersucht:

- Der Trichter wird nicht mehr als rein rotationssymmetrisch abtragendes Teilsystem behandelt. Es werden vielmehr zusätzliche lokale Lagerungsmöglichkeiten berücksichtigt.
- Der Trichter-Schaft-Übergang wird durch die zusätzliche Berücksichtigung der Membrangrundspannungen der Schalenteile verfeinert behandelt. Die Berechnung der plastischen Tragfähigkeit wird nun gegenüber der traditionellen Berechnung auf der Basis mitwirkender Breiten als Ringträger durch eine verfeinerte Berechnung auf Basis modifizierter mitwirkender Breiten in Abhängigkeit der Membrangrundspannungen der einzelnen Schalenteile möglich.
- Der integrierte Basisringträger wird in seiner Tragfunktion gegenüber den traditionellen Modellbildungen für die anteilige Abtragung der Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen auf die Abtragung von Einzeltorsionsmomenten und Einzelradialkräften als sekundäres Tragelement untersucht. Diese Einzeltorsionsmomente und Einzelradialkräfte ergeben sich unmittelbar aus Gleichgewichtsgründen durch die Berücksichtigung lokaler Lagerungsmöglichkeiten (z.B. Schottblechlagerung) des Silotrichters.
- Durchgehende Auflagerlängssteifen werden als integrierte Versteifungselemente behandelt. Dabei wird das Schaft-Längssteifen-System primär hinsichtlich des elasto-plastischen Knickens der Auflagerlängssteifen untersucht. Das Beulen der Schalenwand wird dabei nur begleitend mituntersucht.
- Die Berücksichtigung von Schraubstößen erfolgt global durch Modellierung von orthotropen Ersatzsteifigkeiten der Schalenwand oder lokal durch die Modellierung als elastisch nachgiebige diskrete Stoßelemente. Diese Modellierungsvarianten werden hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit miteinander verglichen.

2.1.2 Anwendung verfeinerter Berechnungsmethoden

Bei der Berechnung der Teiltragsysteme wird die Approximationsqualität der ermittelten Tragfähigkeiten in Abhängigkeit der Art der Strukturberechnung aufgezeigt. Die auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen berechneten Tragfähigkeiten werden den realen Tragfähigkeiten nichtlinearer Berechnungen des isolierten Teiltragsystems gegenübergestellt.

Weiters werden durch die Anwendung verfeinerter Berechnungsmethoden (nichtlineare Berechnungsverfahren) Ad-Hoc-Annahmen, wie die Außerachtlassung von Kompatibilitätsschubspannungen im Siloschaft oder die Vorgabe von Auflagerteilkräften in Kap. 8 "Schaft-Längssteifen-System" bei der Abschätzung der Tragfähigkeiten auf der Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen, überprüft.

Die plastische Tragfähigkeit wird mithilfe materiell nichtlinearer Berechnungen (MNA) für den herausgelösten Trichter, den Trichter-Schaft-Übergang, den Basisringträger und für den Auflagerkrafteinleitungsbereich ermittelt.

Die Beultragfähigkeit wird mithilfe geometrisch nichtlinearer (GNA) bzw. geometrisch und materiell nichtlinearer Berechnungen (GMNA), für den durch meridionale Druckkräfte beanspruchten Schaft untersucht. Dabei wird vor allem die Tragfähigkeit und das Stabilitätsverhalten der Auflagerlängssteifen des Schaft-Längssteifen-Systems untersucht.

2.1.3 Bereitstellung von Bemessungsmethoden

Auf Basis der durchgeführten Berechnungen sollen direkt anwendbare Bemessungsmethoden ("Direct-Design" entsprechend Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999)) erarbeitet und folglich Bemessungsformeln entwickelt werden, und zwar für folgende Bauteile:

- den Trichter-Schaft-Übergang
- die lokale Lagerung des Trichters
- den Auflagerkrafteinleitungsbereich

Für den Trichter-Schaft-Übergang erfolgt dies, wie bereits erwähnt, durch das Herausarbeiten von modifizierten mitwirkenden Breiten in Abhängigkeit der Membranspannungen in Meridian- und Umfangsrichtung von Trichter und Schaft für die Berechnung eines äquivalenten rotationssymmetrisch beanspruchten Ringträgers.

Für die lokale Lagerung des Trichters und für den Auflagerkrafteinleitungsbereich des Siloschaftes sollen auf Basis von Auflagernennspannungen (Meridian- bzw. Schubspannungen) Bemessungsformeln erarbeitet werden.

2.2 Umfang der Arbeit

Der Umfang der Arbeit gliedert sich in zwei Teile:

- **Hauptteil— Kapitel 3 bis 8**
- **Anhang**

Den Hauptteil stellt die Berechnung und die Beurteilung der Tragfähigkeiten der Teiltragsysteme von Silokonstruktion dar. Im Anhang der Arbeit sind die theoretischen Grundlagen, auf die im Zuge der Einzelkapitel der Systemberechnung zurückgegriffen wird, aufbereitet. Die Anordnung dieses Materials im Anhang stellt keine inhaltliche Abwertung dar, sondern erfolgt aus Gründen der Übersichtlichkeit und der leichteren Orientierung und Lesbarkeit.

Die Kapiteleinteilung dieser Arbeit entspricht den Einzelteilen des Silos in ihrer Reihenfolge von unten nach oben. Beginnend mit dem Trichter folgt der Trichter-Schaft-Übergang, der Basisringträger, der Auflagerkrafteinleitungsbereich und letztendlich das Schaft-Längssteifen-System.

Die Übersicht der untersuchten Teiltragsysteme ist zugehörig zum jeweiligen Kapitel und Teiltragsystem in Tab. 2-1 und Tab. 2-2 dargestellt.

2.2.1 Hauptteil — Kapitel 3 bis 8

Kapitel 3 — Modellbildungsstrategien

Die grundlegenden Modellbildungsstrategien für Stahlsilostragwerke müssen der jeweiligen Zuverlässigkeitsklasse und den folgenden Berechnungsanforderungen entsprechen. Im folgenden wird durch verfeinerte baustatische Modellbildungen ein Lückenschluß zwischen der Siloberechnung für Zuverlässigkeitsklasse 2, aufbauend auf traditionellen Modellbildungen und jener für Zuverlässigkeitsklasse 3, durch die Berechnung des Silogesamtsystems vollzogen.

Diese verfeinerte baustatische Modellbildung erfolgt für die Behandlung folgender Teiltragsysteme des Silos hinsichtlich ihres Tragverhaltens unter Einhaltung des Gleichgewichts am Gesamtsystem:

- Trichter
- Trichter-Schaft-Übergang
- Basisringträger
- Auflagerkrafteinleitungsbereich
- Schaft-Längssteifen-System

Der Trichter wird nicht mehr als rein rotationssymmetrisch abtragendes Teilsystem behandelt, es werden vielmehr zusätzliche lokale Lagerungsmöglichkeiten (Schottblechlagerung) berücksichtigt.

Am Trichter-Schaft-Übergang werden in einer verfeinerten Berechnung auch die Membrangrundspannungen der einzelnen Schalenteile berücksichtigt.

Der Basisringträger wird in seiner Tragfunktion hinsichtlich der Abtragung von Einzeltorsionsmomenten und Einzelradialkräften als sekundäres Tragelement untersucht. Diese Einzeltorsionsmomente und Einzelradialkräfte ergeben sich unmittelbar aus Gleichgewichtsgründen durch die Berücksichtigung lokaler Lagerungsmöglichkeiten (z.B. Schottblechlagerung) des Silotrichters.

Durchgehende Auflagerlängssteifen werden als integrierte Versteifungselemente behandelt. Dabei wird das Schaft-Längssteifen-System primär hinsichtlich des elasto-plastischen Knickens der Auflagerlängssteifen untersucht. Das Beulen der Schalenwand wird dabei nur begleitend mituntersucht.

Kapitel 4 — Trichter

In Kapitel 4.1 — *Einführung* — erfolgt die Darstellung der lokalen Auflagerungsmöglichkeiten des Silotrichters (z.B. Schottblechlagerung) und die Aufteilung in die rotationssymmetrische und lokale Lastkomponente des herausgelösten Trichters. Ungleichförmig verteilte Meridianrandkräfte des Trichters, die sich am elastischen Gesamtsystem einstellen, werden nicht berücksichtigt. Die rotationssymmetrisch verteilten Meridianrandkräfte entsprechen vielmehr dem möglichen elasto-plastischen Grenzzustand des Trichters.

In Kapitel 4.2 — *Plastische Tragfähigkeit des Trichters bei rotationssymmetrischer Lastabtragung* — wird die elastoplastische Tragfähigkeit für die rotationssymmetrische Lastabtragung des Trichters untersucht. Es wird eine axialsymmetrische Membranlagerung des oberen Trichterrandes vorausgesetzt.

In Kapitel 4.3 — *Plastische Tragfähigkeit des Trichters bei lokaler Lastabtragung* — wird die elastoplastische Tragfähigkeit des Trichters bei lokaler Lastabtragung zugehörig zu den lokalen Lagerungen in Umfangs- bzw. Meridianrichtung (Rand- bzw. Schottblechlagerung) untersucht. Weiters wird auf die Interaktion der lokalen Lastabtragungsmöglichkeiten untereinander bzw. mit der rotationssymmetrischen Lastabtragung eingegangen. Als Randbedingung wird neben den örtlich lokalen Auflagerungen eine umlaufende Membranrandbedingung in Umfangsrichtung vorgegeben. Diese stellt idealisiert den Anschluß an den Schaft dar.

In Kapitel 4.4 — *Entwicklung verfeinerter Bemessungsformeln* — werden anhand mechanisch anschaulicher Spannungsgrößen Bemessungsformeln zur Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit des Trichters bei Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung entwickelt.

In Kapitel 4.5 — *Tragfähigkeitsabschätzung auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen* — wird basierend auf Membranberechnungen bzw. linearen Spannungsberechnungen die approximative Bestimmung der Tragfähigkeit für die lokale Lastabtragung am Trichter gezeigt.

Kapitel 5— Trichter-Schaft-Übergang

In Kapitel 5.1 — *Einführung* — erfolgt ein Überblick hinsichtlich der Verwendung von mitwirkenden Breiten und eine kurze Zusammenstellung der existierenden Lösungen für spezielle Fälle.

In Kapitel 5.2 — *Interaktion von radialer Ringlast, Radialdruck- und Axialbelastung* — wird am Berechnungsmodell der Zylinderschale für die im Schaleninneren (symmetrisches Modell) bzw. für die am freien Schalenrand angreifende radiale Ringlast die plastische Tragfähigkeit auf der Basis materiell nichtlinearer FE-Berechnungen (MNA) bestimmt. Konstante Radialdruck- und Axialbelastungen am Berechnungsmodell geben dabei die Membrangrundbeanspruchungen der Schale wieder.

In Kapitel 5.3 — *Entwicklung vollplastischer Bemessungsformeln* — wird vorweg eine Interaktionsformel zur Bestimmung der aufnehmbaren radialen Ringlast in Abhängigkeit der Membrangrundspannungen erarbeitet. Darauf aufbauend erfolgt eine Modifikation der bis dato verwendeten plastischen mitwirkenden Breiten.

In Kapitel 5.4 — *Anwendungsbeispiele* — wird das Zutreffen der Bemessungsformeln anhand von zwei Beispielen des Behälter- bzw. Silobaus bei Gegenüberstellung mit den Resultaten von FE-Berechnungen gezeigt.

Kapitel 6 — Basisringträger

Im Rahmen der aktuell vorgenommenen Modellbildung mittels herausgelöster Teiltragsysteme wird dem Basisringträger eine sekundäre Lastabtragungsfunktion zugewiesen. Der Basisringträger wird für die Abtragung von Einzelradialkräften und Einzeltorsionsmomenten in den Auflagermeridianen herangezogen. Diese sind aus Gleichgewichtsgründen am Schottblech, welches zur Einleitung von Auflagerkräften in den Schaft und den Trichter dient, bedingt.

Dies steht somit im Gegensatz zu traditionellen baustatischen Modellbildungen, bei denen der Basisringträger mit zur Abtragung der Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen herangezogen wird, wobei es im allgemeinen zu sehr großen kinematischen Inkompatibilitäten zu den angrenzenden Schalenbauteilen kommt.

In Kapitel 6.1 — *Tragfunktion und Modellbildung* — wird grundsätzlich auf den durch die Verbindung des Basisringbleches mit Standzarge und oberem Trichterteil entstehenden dreieckförmigen Hohlkastenträger eingegangen. Durch den Einbau des sogenannten Schottbleches kann ein balkenartiges Tragverhalten als Ringträger erreicht werden. Die Modellbildung durch stufenweises Herauslösen von Teiltragsystemen führt auf den im weiteren untersuchten integrierten Basisringträger (Schaft-Ringträger-System) bzw. den isolierten Basisringträger.

In Kapitel 6.2 — *Lineare Schnittkraft- und Verformungsberechnungen* — werden lineare Berechnungen für den dreieckförmigen Hohlkastenträger als integrierter Basisringträger (Schaft-Ringträger-System) und als isolierter Basisringträger durchgeführt. Die Modellierung erfolgt dabei als balkenförmiger Ringträger. Die Lösung erfolgt dabei durch Verwendung von Fourierreihenansätze in Umfangsrichtung und die analytische Berechnung in Meridianrichtung. Es wird die Vertikalbelastung bzw. die Einzelradialkraft- bzw. Einzeltorsionsmomentenbelastung untersucht.

In Kapitel 6.3 — *Spannungsbasierte Bestimmung der Tragfähigkeit* — wird aufbauend auf den Ergebnissen der linearen Schnittkraft- und Verformungsberechnungen die Tragfähigkeit des Basisringträgers bzw. des Schaftes bestimmt. Grundlage ist dabei die plastische Querschnittsinteraktion des dreieckförmigen Basisringträgers.

In Kap. 6.4 — *Materiell nichtlineare Berechnungen* — wird durch FE-Berechnungen als vollständiges Schalenmodell die elastoplastische Grenztragfähigkeit des isolierten bzw. integrierten Basisringträgers bestimmt. Zu Vergleichszwecken werden analytische starrplastische Berechnungen des Basisringträgers durchgeführt. Dabei wird im Fall des integrierten Basisringträgers der Schaft als eine vertikal unverschiebliche Anbindung des Basisringträgers vorausgesetzt.

In Kap. 6.5 — *Vergleich der Tragfähigkeiten* — erfolgt abschließend der Vergleich der spannungsbasiert berechneten Tragfähigkeiten mit den elastoplastischen Tragfähigkeiten zufolge der FE-Berechnungen des dreieckförmigen Hohlkastenträgers.

Kapitel 7 — Auflagerkrafteinleitungsbereich

Ziel von Kap. 7 ist die Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit des Auflagerkrafteinleitungsbereiches diskret gelagerter Silokonstruktionen.

In prinzipieller Form wird vorerst auf die Aufteilung der Auflagerkraft auf verschiedene Auflagerkrafteinleitungsmechanismen in den Siloschaft wie die Auflagerkrafteinleitung über die Auflagerlängssteife, über das Schottblech bzw. über die lokale Randlagerung der Standzarge in Umfangsrichtung eingegangen. Weiters wird die baustatische Modellierung als unendlich nachgiebige Auflagerung durch die statisch bestimmte Vorgabe von Auflagerteilkräften bzw. als unendlich starre Auflagerung durch die Vorgabe von unverschieblichen Lagerungsbedingungen gezeigt.

Im speziellen wird auf die Auflagerkrafteinleitung über das Schottblech in die Standzarge und das Zusammenwirken mit der Auflagerkrafteinleitung über die lokale Randlagerung der Standzarge in Umfangsrichtung eingegangen. Die Interaktion dieser Einleitungsmechanismen über Schubkräfte und meridionale Randkräfte in das Schaft-System wird mithilfe einer einfachen Spannungssuperposition im Auflagerbereich bestimmt und mit den Tragfähigkeiten materiell nichtlinearer Berechnungen verglichen. Eine Modellierung als unendlich nachgiebige Auflagerung durch die Vorgabe mehrerer Aufteilungsverhältnisse der Gesamtauflagerkraft wird hinsichtlich der erreichbaren maximalen plastischen Grenztragfähigkeit untersucht.

Kapitel 8 — Schaft-Längssteifen-System

Ziel von Kap. 8 ist die Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit des herausgelösten, kombinierten Schaft-Längssteifen-Systems. Dabei liegt das Hauptaugenmerk primär auf der plastischen Grenztragfähigkeit der über die gesamte Schafthöhe durchgehenden Auflagerlängssteife. Die Grundlage zur Bestimmung der Tragfähigkeit bietet dabei die exakte Elastizitätstheoretische Behandlung des kombinierten Schaft-Längssteifen-Systems.

In Kap. 8.1 — *Teiltragsystem — Schaft und Auflagerlängssteife* — erfolgt die Darstellung des herausgelösten Schaft-Längssteifen-Systems. Es erfolgt nochmals ein kurzer Rückblick auf die traditionelle baustatische Modellbildung durch die Nichtbeachtung der kinematischen Kompatibilität zwischen Schaft und Auflagerlängssteife (Modell 2 siehe Kap. 1). Dabei folgt im Fall der zentrischen Auflagerkrafteinleitung in die Auflagerlängssteife durch die Vorgabe von konstanten Koppelschubkräften ein linear veränderlicher Normalkraftverlauf in der Auflagerlängssteife und ein idealer Schubmembranzustand in der Schalenwand.

In Kap. 8.2 — *Vollständige linear-elastische Systemberechnung* — wird zur Berechnung der Beanspruchungen von Schaft und Längssteife ein analytisches Berechnungsmodell bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten nach Theorie 2. Ordnung in Schaft und Längssteife entwickelt. Zwischen Längssteife und Schale wird die Nachgiebigkeit des konstruktiven Anschlusses z.B. mit einer Schraubverbindung durch eine elastische Verbundfuge berücksichtigt.

Durch die Voraussetzung diskreter, in Umfangsrichtung äquidistanter Auflagerlängssteifen, erfolgt die Lösung durch Doppelfourierreihenansätze in Meridian- und Umfangsrichtung. Das kräftemäßige Zusammenwirken von Längssteife und Schaft kann anhand eines Ersatzbalkenmodell anschaulich interpretiert werden. Zur Illustration wird eine eingehende Parameterstudie zur Klärung des Tragverhaltens vorgenommen.

Weiters kann mit diesem Berechnungs- und dem zugehörigen Analogiemodell das Stabilitätsverhalten der Längssteife unter begünstigend wirkender Stützung der Schale berechnet werden.

In Kapitel 8.3 — *Anwendungsbeispiel* — wird anhand eines Anwendungsbeispiels bei Variation des Längssteifenprofils und der Längssteifenanzahl die plastische Tragfähigkeit und die Beultragfähigkeit basierend auf den Ergebnissen des analytischen Berechnungsmodelles berechnet. Weiters wird eine vereinfachte Beurteilung des globalen Beulens durch die Bestimmung der Verzweigungslast der Längssteife bei Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Schale vorgenommen.

Zur Verifikation werden klassische Beuleigenwertberechnungen und weiters geometrisch nichtlineare bzw. geometrisch und materiell nichtlineare Beulberechnungen durchgeführt. Dabei wird das perfekte und das imperfekte System durch Berücksichtigung der Vorkrümmung der Längssteife untersucht. Damit wird primär die Beultragfähigkeit hinsichtlich globalen Beulens (Knicken der Längssteife) des Schaft-Längssteifen-Systems berechnet. Für die Beurteilung lokalen Beulens der Schalenwandung liegen die Beulberechnungen des perfekten Systems vor.

In Kapitel 8.4 — *Plastische Grenztragfähigkeit der Auflagerlängssteife und der Schalenwand* — wird bei zentrischer Auflagerkrafteinleitung in die Längssteife nach dem Ausschließen des vorzeitigen Versagens der Längssteife durch Vorgabe rein elastischen Materialverhaltens für die Längssteife mittels materiell nichtlinearer FE-Berechnungen das Schaft-Längssteifen-System hinsichtlich der möglichen Ausbildung eines plastischen Membranzustandes der Schalenwand untersucht.

Es zeigt sich, daß die vollplastische Grenztragfähigkeit der Schalenwand, entsprechend der Membrantheorie mit statisch bestimmten, konstant verteilten Schubkräften zu den Auflagerlängssteifen, erst nach Durchlaufen unrealistisch extremer Biegezustände in den Auflagerlängssteifen erreicht werden kann.

Weiters werden zur Überprüfung des möglichen Erreichens dieses plastischen Grenzversagensmodus geometrisch nichtlineare Beulberechnungen durchgeführt.

In Kapitel 8.5 — *Effekt der elastischen Nachgiebigkeit der Schraubstöße* — wird mithilfe von FE-Berechnungen und des analytischen Berechnungsmodelles das Anwendungsbeispiel von Kap. 8.3 untersucht. Der vertikale Schraubanschluß von Längssteife und Schaft wird direkt als elastisch nachgiebige Verbundfuge berücksichtigt. Die horizontalen Schraubstöße können mit horizontalen Fugenelementreihen oder alternativ in globaler Art und Weise durch orthotrope Schalenersatzsteifigkeiten berücksichtigt werden. Die Steifigkeit der Schraubanschlüsse wird als Sekantensteifigkeit aus der nichtlinearen Kraft-Verformungs-Kennlinie bestimmt. Für das analytische Berechnungsmodell kommt aufgrund der Annahmen nur die Berücksichtigung durch orthotrope Schalenersatzsteifigkeiten zur Anwendung.

Die auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen berechneten Tragfähigkeiten werden mit geometrisch und materiell nichtlinearen FE-Berechnungen verifiziert. Primär wird wieder das globale Beulverhalten des Schaft-Längssteifen-Systems untersucht. Lokale Beulphänomene der Schalenwand und der Einfluß überlappter Schalenstöße werden nicht untersucht.

Tab. 2-1 Übersicht der untersuchten Teiltragsysteme — Teil 1

Untersuchte Tragsysteme	
Kap. 4 — Trichter	<p>traditionell NEU NEU</p>
Kap. 5 — Trichter-Schaft-Übergang	<p>traditionell NEU</p>
Kap. 6 — Basisringträger	<p>traditionell NEU</p>

Tab. 2-2 Übersicht der untersuchten Teiltragsysteme — Teil 2

Untersuchte Tragsysteme	
Kap. 7 — Auflagerkrafteinleitungsbereich	<p>The diagram shows two cross-sections of a curved structure at a support. The left side, labeled 'traditionell', shows a 'Schottblech' (scot plate) with a height h_s and a width d. It is subjected to normal forces n_x and $n_{x\theta}$, and shear forces F_z and F_s. The right side, labeled 'NEU', shows two variations of the 'Schottblech' with boundary conditions $v=0, w=0$. The second variation on the right includes a 'lokale Längssteife' (local longitudinal stiffener).</p>
Kap. 8 — Schaft-Längssteifen-System	<p>The diagram shows two cylindrical shafts with longitudinal stiffeners. The left shaft, labeled 'NEU', has 'diskrete Schalenstöße' (discrete shell joints) and is supported by a vertical 'Auflagerlängssteife' (support longitudinal stiffener). It is subjected to forces F_L, F_s, and F_z. The right shaft, also labeled 'NEU', has an 'elastisch-orthotrope KZS-Schalenwand' (elastic-orthotropic KZS shell wall) and is supported by a similar 'Auflagerlängssteife'. Both shafts have boundary conditions $v=0, w=0$ at the top and bottom.</p>

2.2.2 Anhang — Theoretische Berechnungsgrundlagen

Im Anhang werden folgende theoretische Grundlagen aufbereitet, und zwar für:

- Kreiszyinderschalen
- Kreisringträger unter allgemeiner Belastung

Anhang A.1 — Grundgleichungen der Kreiszyinderschale in matrixorientierter Darstellung

In Anhang A.1 — *Grundgleichungen der Kreiszyinderschale in matrixorientierter Darstellung* — werden unter Voraussetzung isotrop elastischen Materialverhaltens (materiell linear) und unter Außerachtlassung von Stabilitätseffekten (geometrisch linear), ausgehend von den linearen Verzerrungen in Zylinderkoordinaten und der Beschreibung der Schalenkinematik mit 3 Mittelflächenverschiebungen und 2 Drehparametern, die kinematischen, konstitutiven und kinetischen Grundgleichungen der Kreiszyinderschale aufbereitet. Dabei erfolgt die systematische Aufteilung der Verzerrungs- und Spannungsgrößen ausgehend von den Verzerrungsgleichungen des 3D-Kontinuums in flächenabhängige bzw. dickenabhängige Anteile.

Die Dickenintegration zur Bestimmung der resultierenden Spannungsgrößen wird für stark und schwach gekrümmte Schalen bei linear elastischem Materialverhalten durchgeführt. Ausgangspunkt ist dabei die exakte Dickenintegration, nachfolgend werden unterschiedliche Approximationsstufen angewandt. Weiters erfolgt der Vergleich verschiedener Schalenformulierungen hinsichtlich der kinematischen Beschreibung durch Einführung der Normalenhypothese (klassische Schalengleichungen nach Flügge) bzw. näherungsweise Beschreibung der Biegekrümmungen der Schale (Donnell'sche Schalengleichungen).

Mögliche ingenieurmäßige Schalenformulierungen durch entsprechende Steifigkeitsannahmen werden auf Basis der Gleichungen der querschubstarren, schwach gekrümmten Kreiszyinderschale abgeleitet. Die allgemeine mechanische Beschreibung mit partiellen Differentialgleichungssystemen wird vorab durch Anwendung eines Fourierreihenansatzes in Umfangsrichtung auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme reduziert. Für ein Glied des Fourierreihenansatzes liegt in allgemeiner Form eine Differentialgleichung 8. Ordnung vor. Durch Steifigkeitsannahmen gelingt die Reduktion auf eine sogenannte baustatische Differentialgleichung 4. Ordnung. Durch die Vernachlässigung der axialen Biegesteifigkeit und die Annahme unendlicher Umfangsdehnsteifigkeit liegt das Tragverhalten der Kreiszyinderschale entsprechend der Semi-Membran-Theorie vor.

Die Annahme unendlicher Umfangsdehnsteifigkeit ist aber nicht nötig. Die vollständige Berücksichtigung der Membran und die Vernachlässigung der Axialbiegesteifigkeit und der Drillsteifigkeit führt auf die vollständige Semi-Membran-Theorie der Kreiszyinderschale. Die mechanische Beschreibung erfolgt nach wie vor mit einer DGL 4. Ordnung. Die Lösung wird im Sinne der Deformationsmethode in systematischer matrixorientierter Form ausgehend von den Fundamentallösungen der DGL vorgenommen.

Anhang A.2 — Grundgleichungen des elastischen räumlich belasteten Kreisbogenträgers

In Anhang A.2 — *Grundgleichungen des elastischen räumlich belasteten Kreisbogenträgers* — erfolgt die Zusammenfassung der Grundgleichungen des Kreisbogenträgers bei linear elastischem Materialverhalten. Dabei wird das allgemeine räumliche Tragverhalten als Biege- und Torsionsbalken bei beliebiger Querschnittsform erfaßt.

3

GRUNDLEGENDE MODELLBILDUNGSSTRATEGI EN FÜR STAHLSILOTRAGWERKE

Inhalt von Kapitel 3:

- 3.1 Hierarchie baustatischer Modellbildungsstufen**
- 3.2 Aktuell vorgenommene Modellbildungen**
- 3.3 Baustatische Modellbildungen für Einzelkomponenten von Stahlsilokonstruktionen**

3.1 Hierarchie baustatischer Modellbildungsstufen

Den Anforderungen an die Siloberechnung, welche nach Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999) an die dort definierten jeweiligen Zuverlässigkeitsklassen gestellt werden, entspricht eine Hierarchie von baustatischen Modellbildungsstufen. Die vorliegende Arbeit befaßt sich vor allem mit der Berechnung von Silos der Zuverlässigkeitsklasse 3 mit diskreten Auflagerungen. Die Berechnung wird dabei anhand herausgelöster, isoliert betrachteter Teiltragsysteme durchgeführt.

Die Hierarchie der Modellbildungsstufen in Bild 3-1 ist in 4 Hierarchiestufen geteilt und baut auf der vereinfachten Membranberechnung für Silos der Zuverlässigkeitsklasse 1 auf. Diese Modellbildungsstufe stellt die einfachste Variante der Siloberechnung dar und wird analog der Einteilung in Zuverlässigkeitsklassen als Hierarchiestufe 1 definiert.

Die Hierarchiestufe 2 basiert auf den traditionellen Gleichgewichtsmodellen der Siloberechnung und ist der Zuverlässigkeitsklasse 2 zugeordnet. Diese Gleichgewichtsmodelle besitzen, abgesehen von der Membranberechnung (Stufe 1), die geringste Modellqualität zur Behandlung von Silos mit diskreten Auflagerungen. Sie sind aber für Silostragwerke von untergeordneter Bedeutung durchaus anwendbar. Die klassischen Varianten (siehe Kap. 1.1.4) diskret gelagerter Silokonstruktionen der traditionellen baustatischen Modellbildungsstufen wie das Modell 1 — Basisringträgersystem — aber auch das Modell 2 — Schaft-System — bzw. das Modell 3 — Schaft-Basisringträger-System, wenn vor allem Auflagerlängssteifen in ihrer Wirkung ersatzweise durch Kräftegleichgewichtsgruppen erfaßt werden, sind dieser Hierarchiestufe zuzuordnen.

Die oberste hierarchische Stufe 3 in Bild 3-1 ist für Silos der Zuverlässigkeitsklasse 3 anzuwenden, es erfolgt die Berechnung des globalen Silogesamtsystems. Für Bemessungszwecke können derartige, prinzipiell als qualitativ voll anzusehenden, Berechnungen jedoch problematisch werden, insbesondere wenn linear-elastische Spannungsberechnungen (LA) durchgeführt werden, wegen der dort in der Regel auftretenden und schwierig einschätzbaren Spannungsspitzen an den Schalenrändern.

Die Zwischenstufe 3' der Modellbildung erfolgt durch eine Verfeinerung der baustatischen Modellbildung basierend auf den traditionellen Gleichgewichtsmodellen. Dabei ist eine zunehmende Qualitätssteigerung der Modellbildung durch eine verbesserte, fortgeschrittene Berechnung von Teiltragsystemen gefordert, um den Anforderungen der Zuverlässigkeitsklasse 3 gerecht zu werden. Die Überprüfung der entwickelten Modellbildungen erfolgt durch den Vergleich mit der Berechnung des globalen Gesamtsystems.

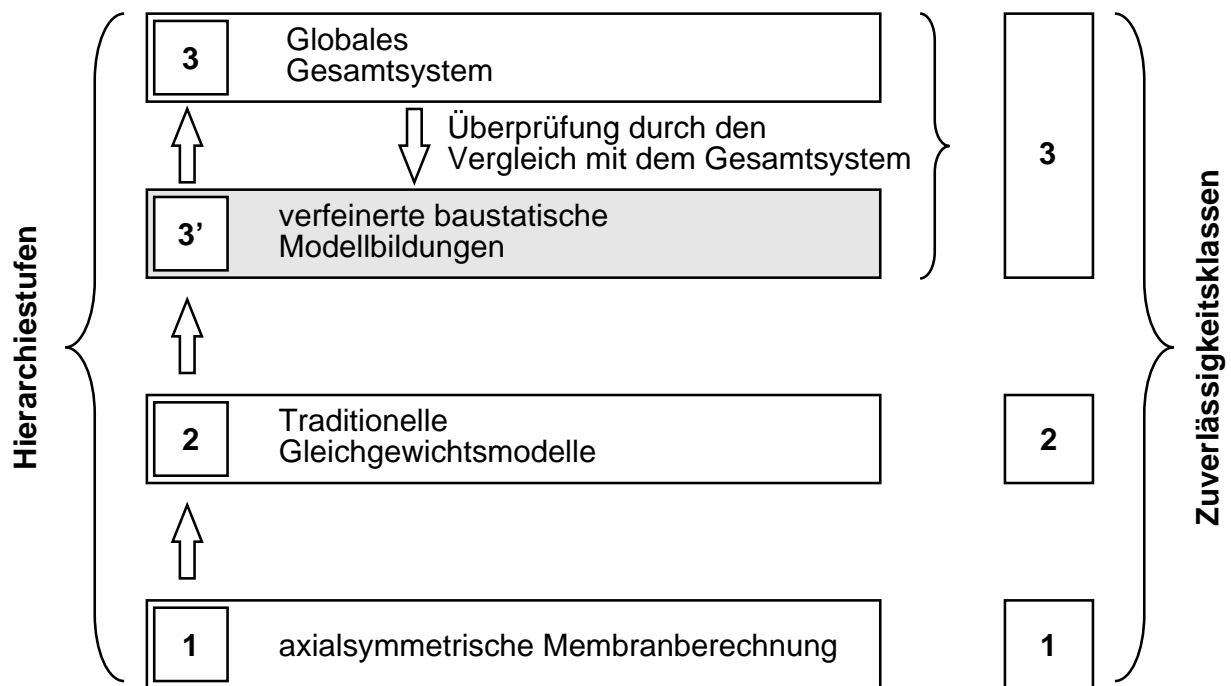


Bild 3-1 Hierarchie der baustatischen Modellbildungsstufen 1 bis 3

3.1.1 Beispielhafte Darstellung der Modellbildungsstufen

In Bild 3-2 sind diese baustatischen Modellbildungsstufen für eine Silostruktur exemplarisch dargestellt. Die Gesamtstruktur besteht in Bild 3-2.a aus dem Silo und dem Siloträgergestüt.

- Die Betrachtung der Gesamtstruktur entspricht der obersten Hierarchiestufe 3 der Siloberechnungen durch die globale Analyse des Silogesamtsystems.
- Die erste Stufe der baustatischen Modellbildung stellt in Bild 3-2.b das Herauslösen des Silos (=Silogesamtsystem) aus dem Gesamttragsystem selbst dar.
- Die nächste Stufe betrifft das Herauslösen von Teiltragsystemen. In Bild 3-2.c werden der Trichter, der Trichter-Schaft-Übergang, das Schaft-System und der Dachkonus als isolierte Teiltragsysteme behandelt. Die Art der Berechnung — ob mit traditionellen (einfachen) Gleichgewichtsmodellen oder mit verfeinerten Modellen — entscheidet über die Zuordnung zu den Hierarchiestufen 1, 2 oder 3 der baustatischen Modellbildung.

Die exemplarische Darstellung der Hierarchie der baustatischen Modellbildungsstufen 2 bis 3 wird nun im weiteren für den herausgelösten Siloschaft in Bild 3-3 dargestellt. Dabei wird der Übergang von der Modellbildung mittels traditioneller Gleichgewichtsmodelle (Hierarchiestufe 2) auf die Hierarchiestufe 3 gezeigt.

- Die traditionelle Modellbildung durch die isolierte Behandlung des Basisringträgers als stabförmiger Kreisringträger bzw. die isolierte Behandlung der Auflagerlängssteifen in Bild 3-3.a stellt im vorliegenden Fall die Stufe 2 der Modellbildungshierarchie dar. Die Schalenteile werden kinematisch als Membranschalen betrachtet.
- Die verfeinerte baustatische Modellbildung der Stufe 3' erfolgt in einer ersten Variante durch die Berechnung des Schaft-Längssteifen-Systems mittels der ersatzweisen Modellierung der Schraubstöße durch orthotrope Ersatzsteifigkeiten der Schalenwand. Die Auflagerlängssteifen werden konstruktionsgerecht als integrierte Tragelemente behandelt. Das heißt, daß die Verbundwirkung zwischen Längssteifen und Schalenwand exakt erfaßt wird. Die Verbundwirkung zwischen Schaft und Trichter wird jedoch nicht vollständig erfaßt, was die nicht-rotationssymmetrischen Anteile der Koppelkräfte betrifft.
- Die weitergehende verfeinerte Modellbildung in Bild 3-3.c ist durch die Berücksichtigung der lokalen Schraubstöße und in weiterer Folge durch die Berücksichtigung des oberen Trichterteiles sowie des Basisringbleches als Schalenbauteile dargestellt.

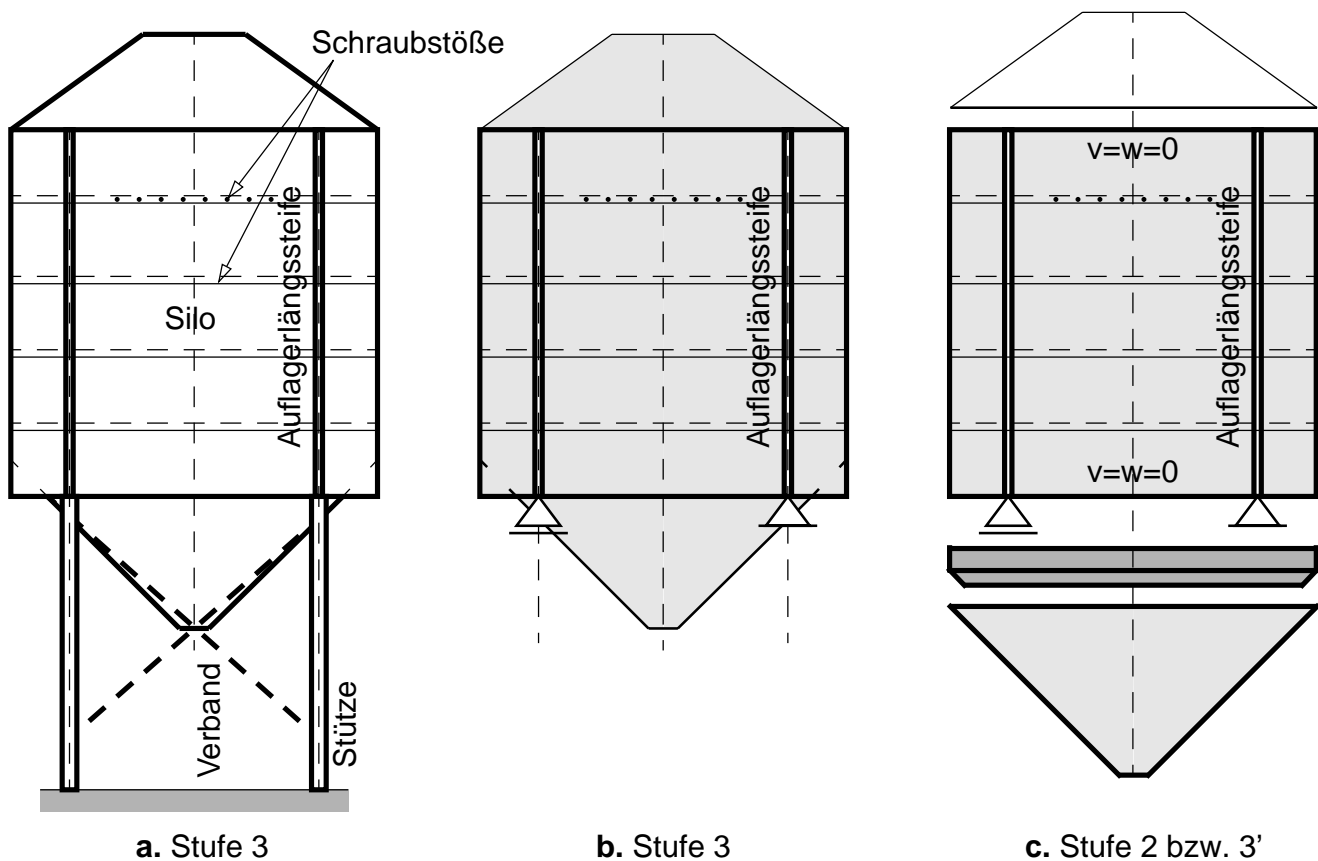


Bild 3-2 Exemplarische Darstellung der Hierarchie der Modellbildungsstufen — **a.** Gesamtstruktur, **b.** Silogesamtsystem (Stufe 3) und **c.** Herauslösen von Teiltragsystemen (Stufe 2 bzw. 3')

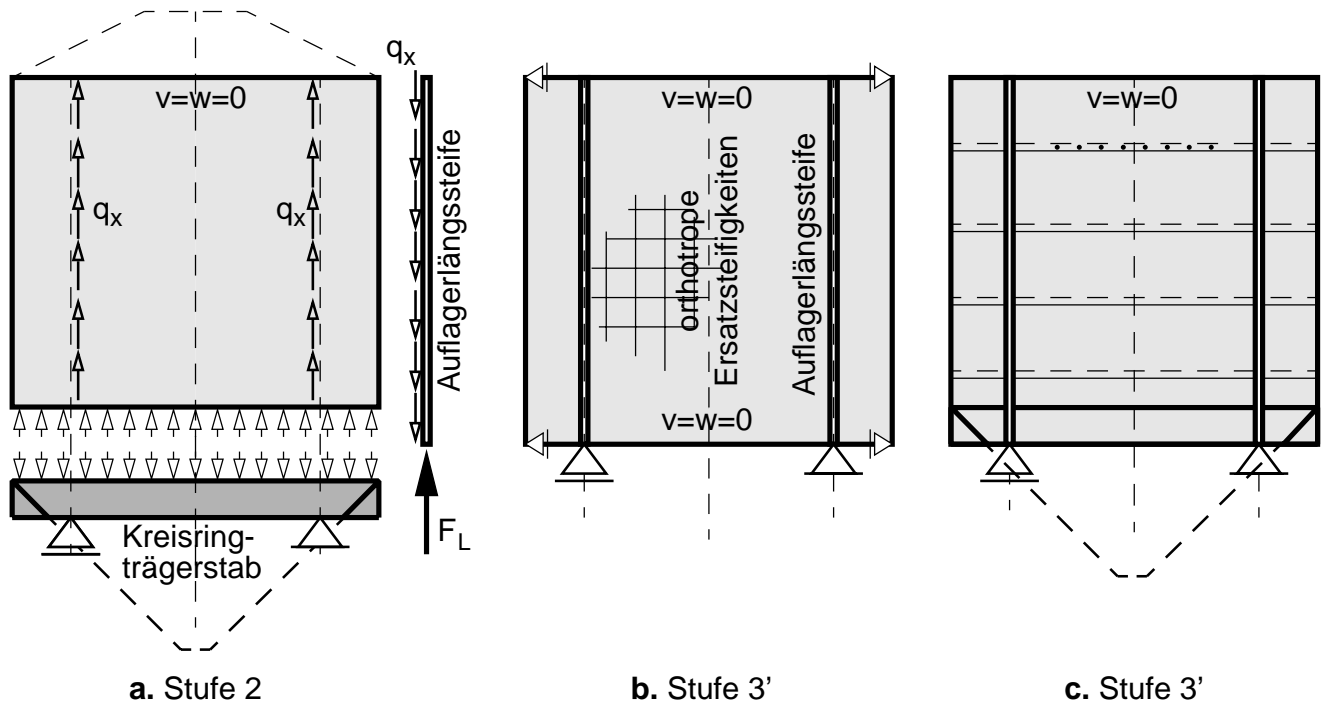


Bild 3-3 Modellierung des Siloschafts — **a.** Stufe 2 — traditionelle Modellbildung und Stufe 3' — **b.** verfeinerte baustatische Modellbildung (Schaft-Längssteifen-System, orthotrope Schalener-satzsteifigkeiten) bzw. **c.** weitergehende verfeinerte Modellbildung (lokale Schraubstöße, Berücksichtigung des oberen Trichterteiles und des Basisringbleches)

3.1.2 Modellbildung des Trichter-Schaft-Überganges

Den kritischen Bereich für das Herauslösen isolierter Teiltragsysteme stellt im wesentlichen der Trichter-Schaft-Übergang dar. Im vorliegenden Fall werden mögliche Modellbildungsstufen im Bereich des Trichter-Schaft-Überganges aufgezeigt (siehe Bild 3-4 bzw. bereits Bild 3-3).

Ausgangspunkt ist das in Bild 3-4 dargestellte Gesamtsystem, das repräsentativ nur mit seinen Schalenteilen — Standzarge, Schaft, Trichter und Basisringblech — abgebildet ist. Der Dachkonus und der obere Randring werden vereinfacht als Randbedingung $v = w = 0$ modellhaft wiedergegeben.

Die wesentliche Schnittführung zur Aufteilung in Teiltragsysteme erfolgt im Bereich der zusammentreffenden Schalenteile von Trichter, Standzarge und Schale. In Bild 3-4.a ist symbolisch für das vollständige System dieser Anschlußbereich dargestellt. Bei anderer Ausführung, wenn etwa das Basisringblech konstruktiv nicht mit dem Trichter verbunden ist, kann die eine oder andere Modellbildungsstufe entfallen.

Die verschiedenen Modellierungsstufen ergeben sich durch sukzessives Herauslösen von Teiltragsystemen. Die wechselweise wirkenden Randkräfte an den Schnittlinien sind symbolisch in den Meridianschnitten (Bild 3-4.b bis Bild 3-4.f) mitdargestellt.

Die Modellbildungsvarianten bauen hier auf zwei grundlegenden Basissystemen auf:

- Basisringträger-System
- Schaft-System

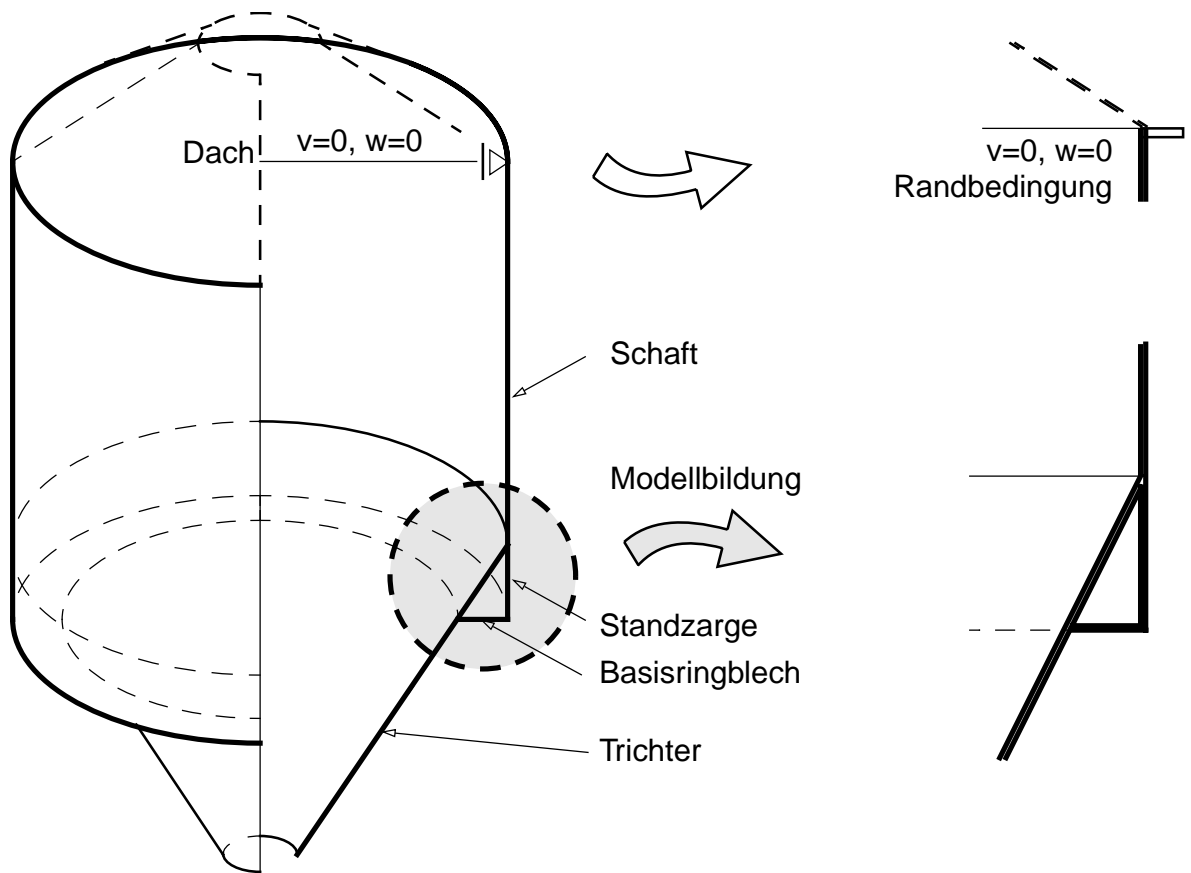
Das Basisringträger-System, das wie schon bei den klassischen Modellbildungsvarianten in Kap. 1.1.4 das einfachste baustatische Modell darstellt, übernimmt in Bild 3-4.b die Abtragung der Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen. Der Trichter und der Schaft werden als rotationssymmetrisch abtragende Teiltragsysteme definiert.

Durch die Koppelung von Schaft und Basisringträger folgt das Schaft-Basisringträger-System in Bild 3-4.c, koppelt man auch den Trichter, so folgt das Gesamtsystem in Bild 3-4.a.

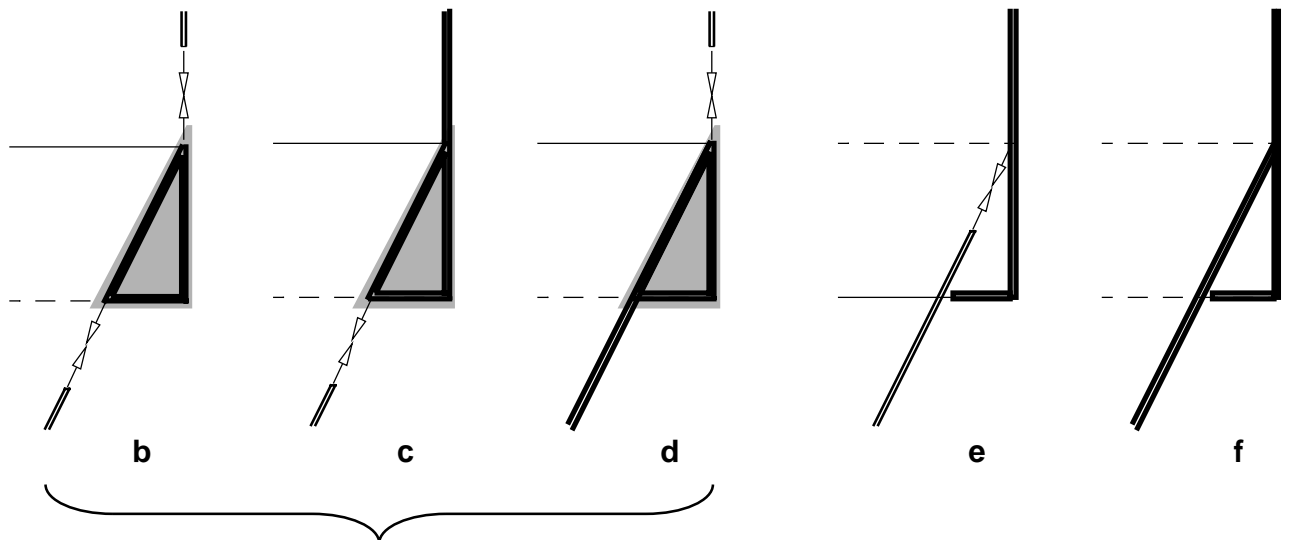
Alternativ dazu stellt sich die Koppelung von Trichter und Basisringträger in Bild 3-4.d dar. Dies stellt vor allem bei Silos, bei denen ein vergleichsweise nachgiebiger Schaft (z.B. aus Wellblech) ausgeführt wird, eine sinnvolle Modellbildungsvariante hinsichtlich der Lastabtragung der Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen dar.

Das Schaft-System stellt das einfachste baustatische Schalenmodell, das für die Abtragung der Gesamtvertikalbelastung über den Einzelaullagerungen verantwortlich ist, dar. Dabei ist die Verbindung mit dem Trichter durchtrennt, das Basisringblech kann, wie in Bild 3-4.e angedeutet, als Randbedingung modellhaft wiedergegeben werden.

Wird die Verbindung von Trichter und Schaft gedanklich wieder geschlossen, so folgt das Schaft-Trichter-System in Bild 3-4.f. Nun nimmt auch der Trichter an der Lastabtragung des nicht-rotationssymmetrischen Lastanteiles in gewissem Ausmaß teil.



a. Gesamtsystem mit Eckdetails



Basisringträger — alternative Modellierung
als Schalenbauteile oder als integrierter Kreisringträger

Bild 3-4 Modellbildung im Umfeld des Trichter-Schaft-Überganges — **a.** vollständiges Tragsystem (Silogesamtsystem), **b.** Basisringträger-System, **c.** Schaft-Basisringträger-System, **d.** Trichter-Basisringträger-System, **e.** Schaft-System und **f.** Schaft-Trichter-System

3.2 Aktuell vorgenommene Modellbildungen

In Anlehnung an die zuvor dargestellten prinzipiell möglichen Modellbildungen werden nachfolgend für die Abtragung des nicht-rotationssymmetrischen Anteiles der Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen Teiltragsysteme und Gleichgewichtskraftgruppen definiert. Durch das kräftemäßige (kinematische) Zusammenwirken der Teiltragsysteme ist das aufgetrennte Gesamttragsystem im Rahmen mehrerer isolierter Lastabtragungsmechanismen wiederum global vereint.

Wesentliche Erweiterungen traditioneller baustatischer Modellbildungen sind:

- exaktes Erfassen des kraft- und verformungsschlüssige Zusammenwirken von Schaft und Auflagerlängssteifen
- Berücksichtigung der optionalen lokalen Auflagerung des Trichters an den Schottblechen
- Erfassen der Nachgiebigkeit der Schraubverbindungen zwischen einzelnen Schalensegmenten
- Herausgelösten Teiltragsysteme werden zu einem vollständigen, in sich geschlossenen Gesamtmodell vereint

Somit wird die Gesamtvertikalbelastung durch das Zusammenwirken der drei folgenden Teiltragsysteme abgetragen:

- Schaft-System oder Schaft-Längssteifen-System
- Trichter-Schottblech-System
- Trichter-Schaft-Übergang

Der Trichter-Schaft-Übergang stellt das die einzelnen Schalentragssysteme verbindende, isolierte Teiltragsystem dar, welches durch die radial gerichteten Umlenkkomponenten der Meridianrandkräfte des Trichters im wesentlichen axialsymmetrisch beansprucht wird.

An den Schottblechen müssen, bedingt durch die Aufteilung in die Teilauflegerkraft F_S , die direkt in die Standzarge eingeleitet wird, und die Teilauflegerkraft T_K , die in den Trichter eingeleitet wird, zur Erfüllung des Gleichgewichtes Haltekräfte — hier Radialkräfte H bzw. Einzeltorsionsmomente M_T — wirken. Das Basisringträger-System nimmt diese aus Gleichgewichtsgründen notwendigen Haltekräfte auf (siehe Bild 3-8). Der integrierte Basisringträger ist für die Aufnahme dieser Haltekräfte daher "lebensnotwendig". Der Basisringträger wird aber für die Abtragung der Vertikalbelastung nicht herangezogen und stellt somit diesbezüglich ein sekundäres Tragelement dar.

Die Modellierung des Basisringträgers für eine anteilige Lastabtragung der Gesamtvertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen ist in Bild 3-5 dargestellt. In Bild 3-5 ist die Stahlsilokonstruktion mit einem Schaft mit durchgehenden Auflagerlängssteifen abgebildet. In Bild 3-6.a bis Bild 3-6.c sind mögliche baustatische Modellbildungen und ihre Analogiemodelle (Schalenersatzbalken mit elastischer Bettung — Biegesteifigkeit EI und Bettung c) für den herausgelösten Schaft dargestellt.

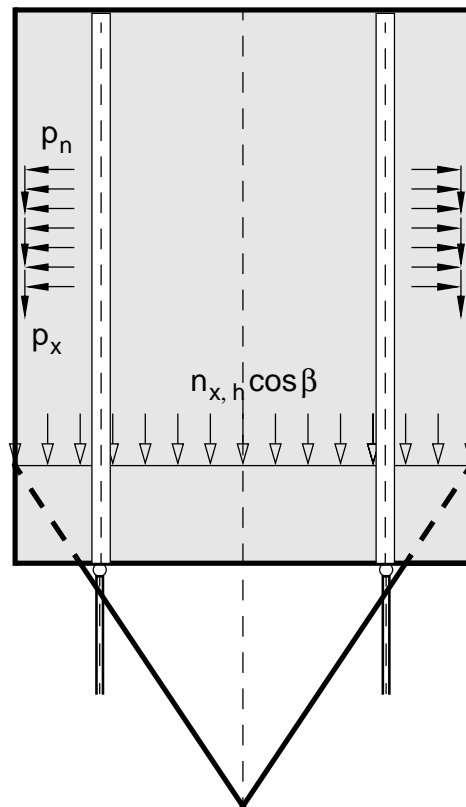


Bild 3-5 Stahlsilokonstruktion mit durchgehenden Auflagerlängssteifen entlang des Schaftes

In Bild 3-6.a ist die traditionelle Form durch die Modellierung als Schaft-Kreisringträger-Modell dargestellt. Wie bereits in Kap. 1.1.4.5 erwähnt, führt dies zu einer steifigkeitsmäßigen Überbewertung des Basisringträgers. Die Auflagerlängssteife wird dabei isoliert betrachtet und in traditioneller Form durch Kräftegleichgewichtsgruppen am Gesamtsystem berücksichtigt.

In Bild 3-6.b ist die mögliche weitergehende Modellierung des Basisringträgers als Schalentragerwerk dargestellt. Der Trichter bzw. der obere Trichterteil werden nun steifigkeitsmäßig als gekoppelte Axial- und Tangentialfedern im Analogiemodell erfaßt. Ihr steifigkeitsmäßiger Beitrag an der Vertikallastabtragung wird gegenüber dem Kreisringträgerstabmodell geringer ausfallen. Die Auflagerlängssteife wird dabei nach wie vor in traditioneller Form durch Kräftegleichgewichtsgruppen berücksichtigt, um die Rotationssymmetrie des Grundmodelles nicht zu stören, welches somit weiterhin einer analytischen Behandlung zugänglich bleibt.

In Bild 3-6.c ist schließlich die verfeinerte Modellbildung als kombiniertes Schaft-Längssteifen-System dargestellt. Als Analogiemodell liegt nun ein gekoppeltes Verbundbalkenmodell vor, das heißt Schalenersatzbalken mit elastischer Bettung plus Längssteifenbalken (siehe Kap. 8.2.2).

Die Axial- und Tangentialfedern des Trichters sind, bezogen auf die vorhandene Gesamtsteifigkeit des Analogiemodelles, die sich weiters aus der Biege- und Bettungssteifigkeit der Schalenwand und der Biegesteifigkeit der Längssteife rekrutiert, von untergeordneter Bedeutung. Die Modellbildung durch die Berechnung des Schaft-Längssteifen-Systems ohne die steifigkeitsmäßige Berücksichtigung des Trichters

erscheint somit auf Basis dieser Steifigkeitsüberlegungen gerechtfertigt, bzw. es kann angenommen werden, daß die nicht berücksichtigten Kompatibilitätsbeanspruchungen die sich aus dem kraft- und formschlüssigen Zusammenwirken ergeben, von untergeordneter Bedeutung sind.

Die Überprüfung dieser These wird in dieser Arbeit nicht vorgenommen, das heißt die vergleichsweise Berechnung am Gesamtsystem steht daher noch aus.

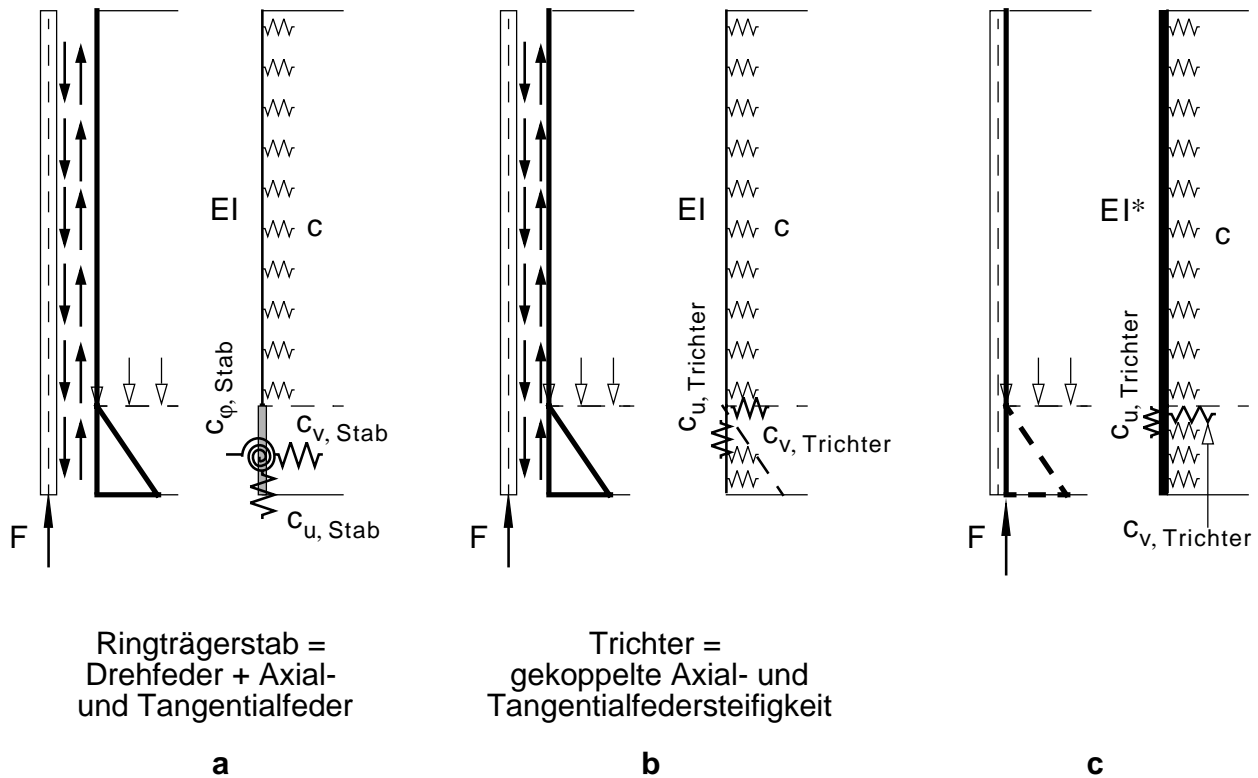


Bild 3-6 Kombiniertes Schaft-Längssteifen-Basisringträger-System — **a.** traditionelle Modellbildung (Kreisringträgerstab, isolierte Betrachtung der Längssteife), **b.** Modellbildung des Basisringträgers als Schalentragwerk (=Axial- und Tangentialfedern am Trichter-Schaft-Übergang) und **c.** verfeinerte Modellbildung (exakte Koppelung von Schaft und Auflagerlängssteife)

3.2.1 Zerlegung in Teiltragsysteme und deren Kraftwirkungen

Die in dieser Arbeit behandelten Teiltragsysteme sind in Bild 3-7 dargestellt und folglich sind in Bild 3-8 die zugehörigen gegenseitigen Kraftwirkungen dargestellt und werden nachfolgend diskutiert:

- Der erste Lastabtragungsmechanismus besteht aus der Lastabtragung über das Schaft-Längssteifen-System über den diskreten Auflagerungen (Bild 3-7.b bzw. Bild 3-8.a). Die Vertikalbelastung stammt dabei aus den Wandreibungskräften (Wandschubbelastung) zufolge Silofüllung und den rotationssymmetrisch verteilt angenommenen Vertikalkomponenten der meridionalen Randkräfte des Trichters.
- Der zweite Lastabtragungsmechanismus (Bild 3-7.e bzw. Bild 3-8.b) besteht aus der Lastabtragung der Trichterbelastung einerseits durch die rotationssymmetrisch angenommenen meridionalen Randkräfte und andererseits durch die nicht-rotationssymmetrische Lastabtragung, bedingt durch die lokale Lagerung des Trichters auf den Schottblechen, in Meridianrichtung. Die Tragwirkung des Schaftes ist dabei einerseits durch die Membranrandbedingung ($v = 0$) am oberen Trichterrand repräsentiert, sowie andererseits durch die Trichtermeridianrandkräfte. Die Wanddruckbelastungen zufolge Silofüllung werden im weiteren über Umfangsmembrankräfte axialsymmetrisch abgetragen.
- Die Abtragung der radialen Umlenkkomponente der Trichtermeridiankräfte erfolgt am Trichter-Schaft-Übergang, der einen ringförmigen lokalen Biegestörungsbereich darstellt und im vorliegenden Fall näherungsweise isoliert behandelt werden kann (Bild 3-7.c bzw. Bild 3-8.c). Jedoch wird die Interaktion mit den rotationssymmetrischen Anteilen der Membrangrundspannungen der angrenzenden Schalenbauteile in konsistenter Weise berücksichtigt.
- Die gleichgewichtsmäßig erforderliche Abtragung der aus der lokalen Lagerung des Trichters über die Schottbleche entstehenden Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente (Bild 3-8.d) in den Auflagermeridianebenen erfolgt durch das integrierte Tragsystem des isolierten Basisringträgers (Bild 3-8.d bzw. Bild 3-8.e).

3.2.1.1 Beschreibung des kräftemäßigen Zusammenwirkens der Teiltragsysteme

Die Beschreibung des kräftemäßigen Zusammenwirkens der Teiltragsysteme in Bild 3-8 erfolgt, sukzessive in vertikaler Reihenfolge von unten nach oben beschrieben, wie folgt:

Die Lastabtragung der Trichterbelastung erfolgt primär durch die an der Oberkante des Trichters wirkenden rotationssymmetrisch verteilten Meridianrandkräfte $n_{x,h}$. Zusätzlich kann die Abtragung eines Teiles der Trichterbelastung über die lokale Lagerung des Trichters über die Schottbleche direkt in die Auflager erfolgen (Lagerkräfte $T_K = 2T$ in Bild 3-8.b).

Am Trichter-Schaft-Übergang in Bild 3-8.c wirkt die Radialkomponente der Meridianrandkräfte $n_{x,h}$. Die

Abtragung erfolgt durch axialsymmetrische Ringwirkung über einen effektiven Ringquerschnitt, der sich aus den mitwirkenden Flächen der angrenzenden Schalenteile zusammensetzt.

Am Schaft-Längssteifen-System in Bild 3-8.a wirken die Wandreibungskräfte in vertikaler Richtung. Zusammen mit der Vertikalkomponente der Trichterrandkräfte n_x und der Vertikalbelastung des Daches müssen diese über die Einzelauflagerungen abgetragen werden. Die Gesamtauflegerkraft besteht aus drei Anteilen. Die Auflagerkraft F_L wird über die Auflagerlängssteife, die Auflagerkraft F_Z über die lokale Lagerung des Schaftes an der Standzargenunterseite in Umfangsrichtung und die Auflagerkraft F_S über das Schottblech in den Schaft eingeleitet.

Am Schottblech wirken die lokale Auflagerkraft des Trichters T_K und die Teilauflegerkraft F_S , die in das Schaft-System eingeleitet wird. Zur Erfüllung des globalen Gleichgewichtes sind in den Auflagermeridianebenen Haltekräfte in Vertikal- und Radialrichtung bzw. ein Haltemoment notwendig (Bild 3-8.d). Die Vertikalkraft $F_{S,ges}$ wird direkt in das Auflager (Silotraggerüst) geleitet ("Kräftekurzschluß"). Die radialen Haltekräfte H und die Haltemomente M_T des Schottbleches wirken entgegengerichtet auf den Basisringträger ein und bilden eine globale Gleichgewichtskräftegruppe (Bild 3-8.e). Für die schonende Abtragung dieser Belastungskomponenten ist somit die Inanspruchnahme der Wirkung des (integrierten) Basisringträgers jedenfalls erforderlich.

Die kinematische Kompatibilität wird dabei zwischen diesen isoliert betrachteten Teiltragsystemen nicht weiter betrachtet, und zwar:

- zwischen Basisringträger und Schaft-Längssteifen-System
- zwischen Basisringträger und unterem Trichterteil
- zwischen Schaft-Längssteifen-System und Trichter

Hingegen wird angenommen, daß durch die gewählte baustatische Modellbildung für die betrachteten Lastfälle die tatsächlich auftretenden kinematischen Inkompatibilitäten im elastischen Fall vernachlässigbar klein, das heißt in "vertretbarer Größenordnung" verbleiben bzw. im elastoplastischen Grenzfall durch plastische Dehnungen ausgeglichen werden können. Damit sollten sich untere Grenzen der Tragfähigkeiten ergeben (erster oder statischer Traglastsatz).

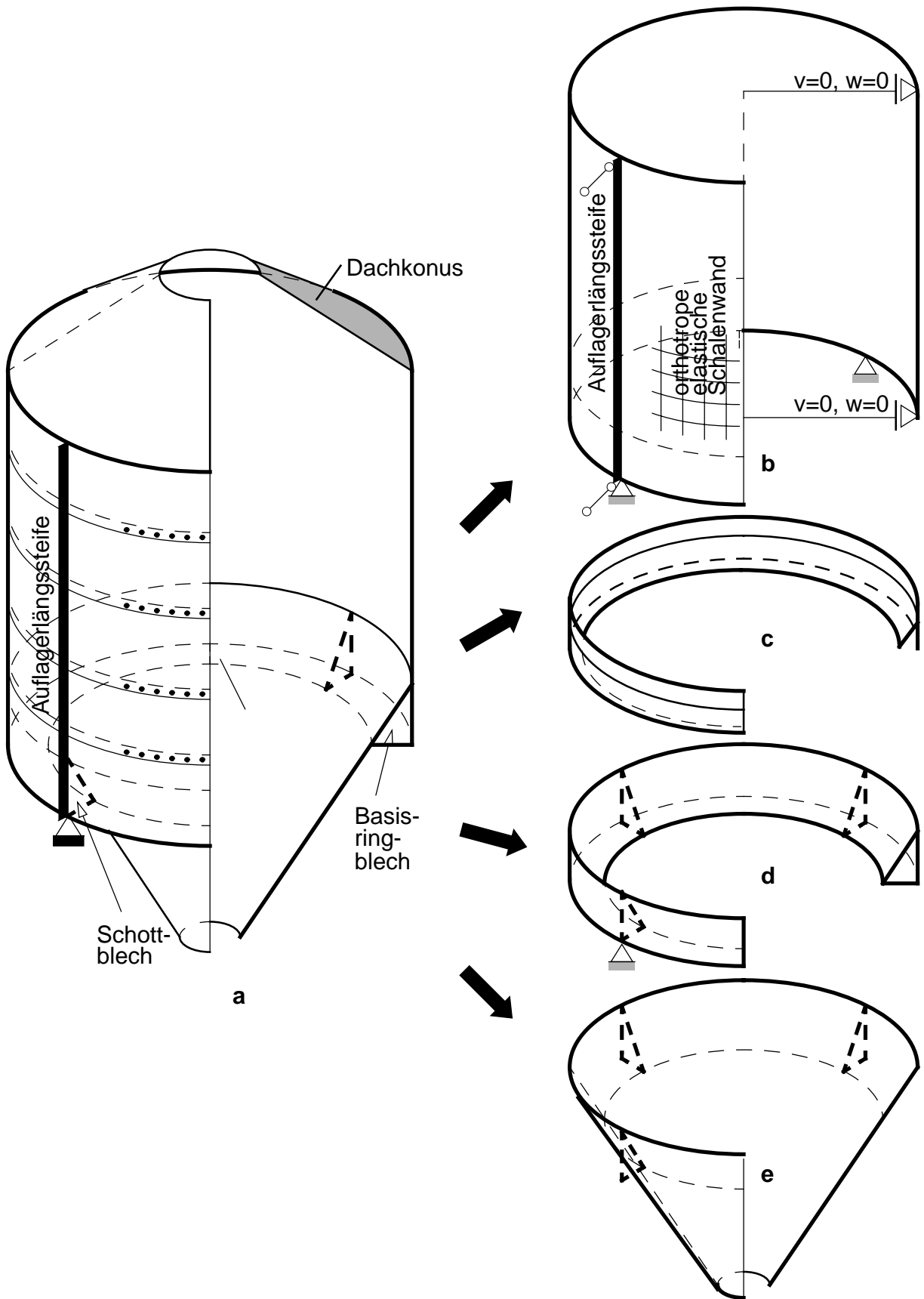


Bild 3-7 a. Gesamttragsystem und herausgelöste Teiltragsysteme — b. Schaft -Längssteifen-System, c. Trichter-Schaft-Übergang, d. Basisringträger und e. Trichter

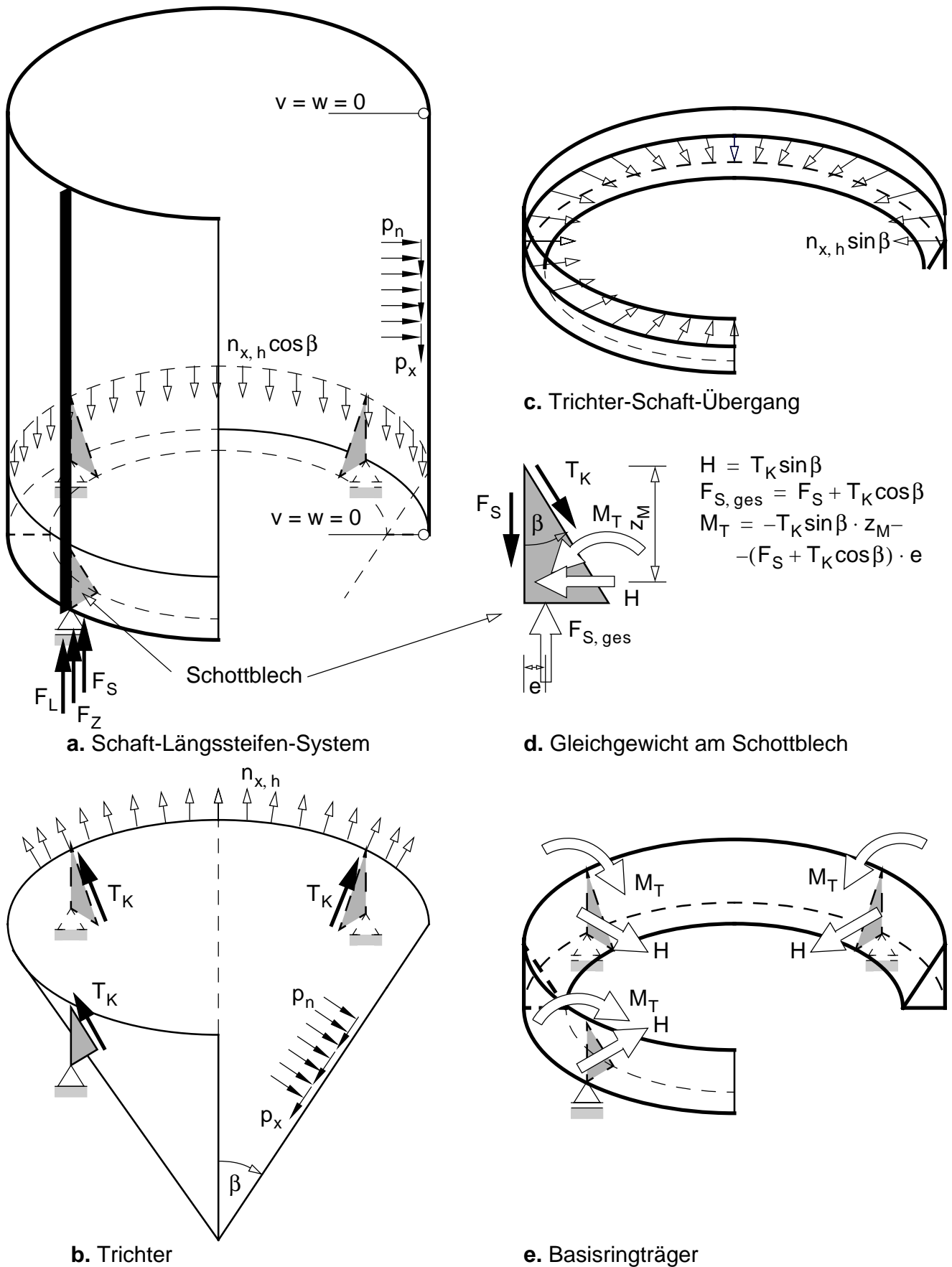


Bild 3-8 Globales Gleichgewicht der Teiltragsysteme

3.2.1.2 Kinematische Kompatibilität zwischen Trichter und Schaft

Auf die kinematische Kompatibilität zwischen Trichter und Schaft soll nachfolgend etwas detaillierter eingegangen werden. Durch die gewählte Modellbildung wird die kinematische Kompatibilität, wie bereits in Kap. 3.2.1.1 erwähnt, zwischen den einzelnen Teiltragsystemen nicht berücksichtigt.

Wird die kinematische Kompatibilität zwischen Trichter und Schaft vollständig berücksichtigt, so stellen sich, wie in Bild 3-9.b dargestellt, durch die elastische steifigkeitsmäßige Aufteilung der Gesamtvertikalbelastung, ungleichförmig verteilte Meridianrandkräfte am Trichter ein. Im Bereich der diskreten Auflagerungen erreichen die Meridiankräfte ihren Maximalwert, im Bereich der Lagermeridiane stellen sich sogenannte "elastische Auflagerbänder" ein. Diese Spannungsverteilungen stellen, wenn keine plastischen Umverteilungen möglich sind bzw. nicht in Rechnung gestellt werden, den ungünstigsten Zustand für den Trichter dar.

Wird im Trichter der elasto-plastische Grenzzustand erreicht (Bild 3-9.c), sind die Meridianrandkräfte am Trichter im Grenzfall rotationssymmetrisch verteilt. Dieser Zustand stellt den günstigsten Tragzustand für den Trichter dar, klarerweise verbunden mit dem Auftreten plastischer Dehnungen. Dabei wird die maximale Tragfähigkeit des Trichters erreicht (abgesehen von zusätzlichen Lagerungen des Trichters auf den Schottblechen bzw. von sonstigen, begünstigend wirkenden Randeinspannungseffekten). Der elasto-plastische Grenzzustand des Trichters in Bild 3-9.c stellt dabei andererseits zugleich für den Schaft den ungünstigsten Zustand, was die Axialkraftwirkungen betrifft, dar und ist somit für diesen Bauteil bemessungsrelevant. Die Radialkraftwirkungen müssen vom Schaft entsprechend umgelagert bzw. aufgenommen werden können.

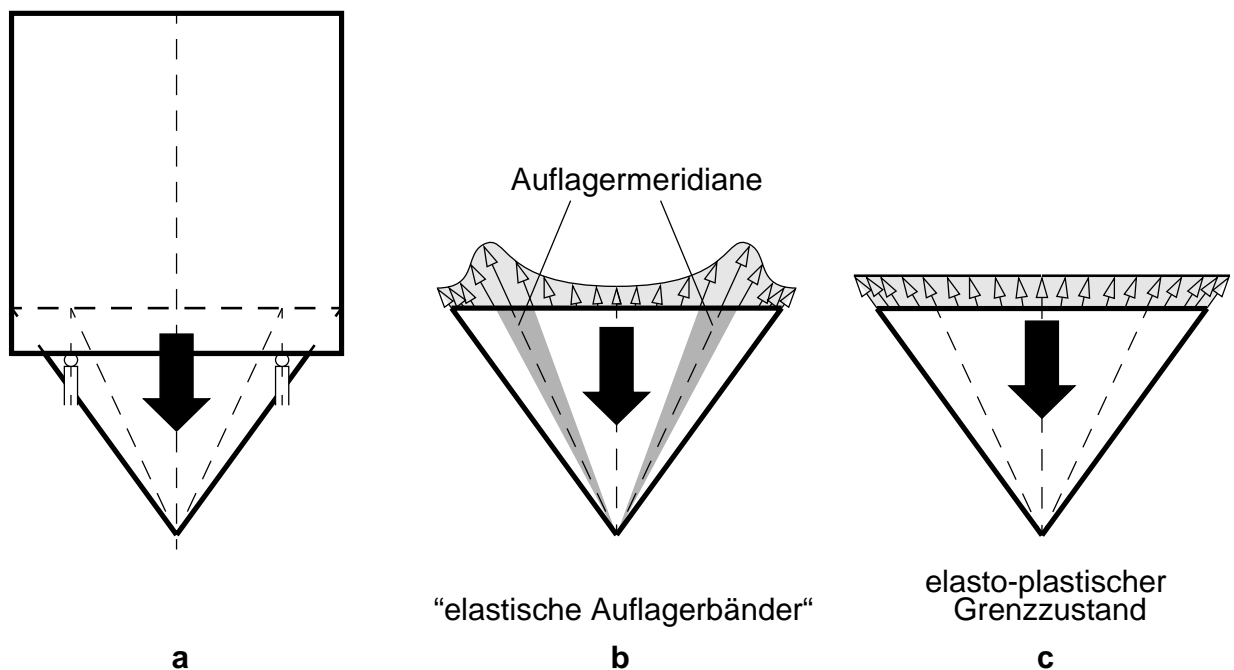


Bild 3-9 a. Globales Gesamtsystem, b. Verteilungen der Meridianrandkräfte (elastische Auflagerbänder) im elastischen Zustand und c. rotationssymmetrisch verteilte Meridianrandkräfte im elasto-plastischen Grenzzustand des Trichters

Die Überprüfung der gewählten Modellbildung am globalen Gesamtsystem wird im folgenden für die Modellbildung des Basisringträgers als sekundäres Tragsystem in Kap. 6 in einer Zwischenmodellierungsstufe durchgeführt. Dabei erfolgt der Vergleich des isolierten Basisringträger-Systems mit dem kombinierten Schaft-Basisringträger-System für diskrete Einzelradialkraftbelastung bzw. Einzeltorsionsmomentenbelastung in den Auflagermeridianebenen.

3.2.2 Zusammenfassender Vergleich aktuell vorgenommener und traditioneller baustatischer Modellbildungen

3.2.2.1 Trichter — optionale lokale Schottblechauflagerung

Der Trichter nimmt durch die zusätzliche Berücksichtigung der lokalen Lagerung in meridionaler Richtung über die Schottbleche ebenfalls optional an der Abtragung des nicht-rotationssymmetrischen Lastanteiles über den diskreten Auflagerungen teil. Ein Anteil der Gesamtvertikalbelastung wird somit als kräftemäßiger “Kurzschluß“ direkt aus dem Trichter in das Silotragerüst abgetragen. Dies stellt somit eine wesentliche Entlastung für die verbleibende Silokonstruktion dar und bildet somit eine sinnvolle Erweiterung der traditionellen baustatischen Modellbildung, in welcher der Trichter lediglich als rein rotationssymmetrisch abtragendes Teiltragsystem behandelt wird. Der Schaft wird in Kap. 4 “Trichter“ als obere Membranrandbedingung des isoliert betrachteten Trichters berücksichtigt.

3.2.2.2 Trichter-Schaft-Übergang — plastische Interaktion zufolge rotations-symmetrischer Beanspruchungen

Der Trichter-Schaft-Übergang wird nach wie vor als isoliertes Teiltragsystem behandelt, das durch die radial gerichteten Umlenkkomponenten der Meridianrandkräfte des Trichters beansprucht wird. Für die Berechnung der plastischen Tragfähigkeit des Übergangsbereiches wird jedoch in einer Erweiterung die Interaktion mit den Membrangrundspannungen der angrenzenden Schalenteile berücksichtigt. Die Berechnungsergebnisse in Kap. 5 werden in die Form einfacher Bemessungsformeln gekleidet, die nun auf modifizierten mitwirkenden Breiten der Schalenteile aufbauen. Der entwickelte Formelapparat wurde in nahezu ungeänderter Form direkt in Eurocode 3 - Teil 1.6 - Annex B (1999) übernommen.

3.2.2.3 Basisringträger

Der Basisringträger erweist sich für die Aufnahme der aus Gleichgewichtsgründen notwendigen Haltekräfte und Haltemomente der Schottbleche als “lebensnotwendig“. Im Gegensatz zu traditionellen baustatischen Modellbildungen wird er jedoch im vorliegenden verfeinerten Modell für die Vertikallastabtragung nicht herangezogen. Im vorliegenden Fall wird ihm damit eine modifizierte, lediglich sekundäre, untergeordnete Lastabtragungsfunktion zugewiesen (siehe Kap. 6).

3.2.2.4 Schaft-Längssteifen-System

Das Schaft-System — hier im speziellen das Schaft-Längssteifen-System — stellt in der gewählten verfeinerten Modellbildung das Primärtragsystem zur Lastabtragung des nicht-rotationssymmetrischen Anteiles der Gesamtvertikalbelastung dar. Gegenüber der traditionellen baustatischen Modellbildung mit isolierter Betrachtung der Auflagerlängssteifen (Kap. 1.1.4) erfolgt hier die Behandlung als integriertes, voll gekoppeltes Versteifungselement am Schaft-Längssteifen-System. Die kinematische Kompatibilität zwischen Schaft und Auflagerlängssteife wird somit vollständig und exakt erfaßt. Es wird sich in Kap. 8 herausstellen, daß die korrekte Erfassung dieser Koppelung wesentlich ist für die richtige Erfassung des aktuellen Tragverhaltens der Auflagerlängssteife, insbesondere im elasto-plastischen Grenzzustand, welcher vom Fließgelenksversagen der Auflagerlängssteife dominiert wird.

3.3 Baustatische Modellbildung für Einzelkomponenten von Stahlsilokonstruktionen

Die baustatische Modellbildung für das Gesamtsystem beinhaltet folgende Modellbildungsstufen, die sich wie folgt darstellen:

- Herauslösung und baustatische Berechnung von Teiltragsystemen (siehe Kap. 3.2)
- Baustatische Modellbildung für Einzelkomponenten (Verformungskinematik) wie:
 - Schalensegmente
 - Ringsteifen und Längssteifen
 - Verbindungen von Schalensegmenten und Steifenanbindungen
 - Auflagerung
 - Schottblech

Die verschiedenen Möglichkeiten diese Modellbildungsstufen adaptiv anzuwenden, ergibt eine Vielzahl von Modellbildungsvarianten. Die Schalenteile werden für Silos der Zuverlässigkeitsklasse 3 (Eurocode 3 - Teil 4.1) immer als Schalenelemente modelliert.

Das Herauslösen von Teiltragsystemen bedeutet, daß unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen, die Gesamtstruktur in kinematisch isolierte Teiltragsysteme zerlegt wird:

- Diese Teiltragsysteme werden unter Berücksichtigung der globalen statischen Wechselwirkung isoliert berechnet .
- Die Zerlegung in isolierte Teiltragsysteme hat zur Folge, daß Randkräfte bzw. Koppelkräfte der isolierten Teiltragsysteme zur Erfüllung des globalen Gleichgewichtes am Gesamtsystem in ihren Verteilungen vorgegeben werden müssen.
- Am jeweils aktuell betrachteten Teiltragsystem werden angrenzende Tragsysteme fallweise durch Grenzfälle von Steifigkeitsannahmen als Randbedingung baustatisch modelliert.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, aus einem komplexen Tragwerk in sensibler Weise Tragsysteme herauszulösen. Der tiefere Sinn dieser Vorgangsweise liegt in der (approximativen) möglichen Nutzbarmachung plastischer Tragreserven in der Bemessung auf der Grundlage elastischer Systemberechnungen (“stress-based design“ siehe Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999)). Im Falle des Silos erfolgt dies insbesondere für die Abtragung des nicht-rotationssymmetrischen Anteiles der Gesamtvertikalbelastung über die diskreten Auflager.

Die Überprüfung der Zulässigkeit der vorgenommenen Modellbildung erfolgt am jeweils übergeordneten Gesamtsystem. Analog der Modellbildung durch eine etappenweise Zerteilung der Gesamtstruktur kann hier in inverser Art und Weise ein etappenweiser Wiederzusammenbau und die folglich Überprüfungen der Fehler der durchgeführten Modellbildung erfolgen.

Nachfolgend werden Möglichkeiten der baustatischen Modellbildung, das heißt in der Festlegung der Verformungskinematik, von Einzelkomponenten von Stahlsilokonstruktionen aufgezeigt und systematisch klassifiziert.

3.3.1 Schalensegmente

Die baustatische Behandlung von Einzelteilen bezieht sich auf die schalenförmigen Bauteile, Versteifungselemente wie Längssteifen bzw. Ringsteifen, Verbindungselemente wie Schraubstöße oder Schweißanschlüsse.

- Die baustatische Behandlung schalenförmiger Bauteile des Silos erfolgt auf der höchsten Modellbildungsstufe prinzipiell als Schalenmodell mit elastischem oder elasto-plastischem Materialverhalten.
- Im Ausnahmefall kann die Berechnung wie im Fall des Basisringträgers, der sich aus der Standzarge, dem Basisringblech, einem Teil des Trichters und einer allfällig vorhandenen Ringsteife am Trichter-Schaft-Übergang zusammensetzt, als Stabmodell (räumlich belasteter und abtragender Kreisringträger) erfolgen.

3.3.2 Ringsteifen und Längssteifen

Versteifungselemente wie Längssteifen und Ringsteifen können prinzipiell, wie in Bild 3-10 und Bild 3-11 dargestellt, folgendermaßen berücksichtigt werden:

- schalen-faltwerkartiges Element
- balkenförmiges Element
- Randbedingung

- ersatzweise als verbleibende Kraftwirkung (=Koppelkräfte) bei isolierter Behandlung des Versteifungselementes und der Vorgabe der Verteilung von Koppelkräften zur Erfüllung des globalen Gleichgewichtes.

Sollen lokale Beulphänomene dünnwandiger Versteifungselemente im Zuge einer Beulberechnung wiedergegeben werden können, so stellt sich die Notwendigkeit, Versteifungselemente kinematisch als Schale zu modellieren.

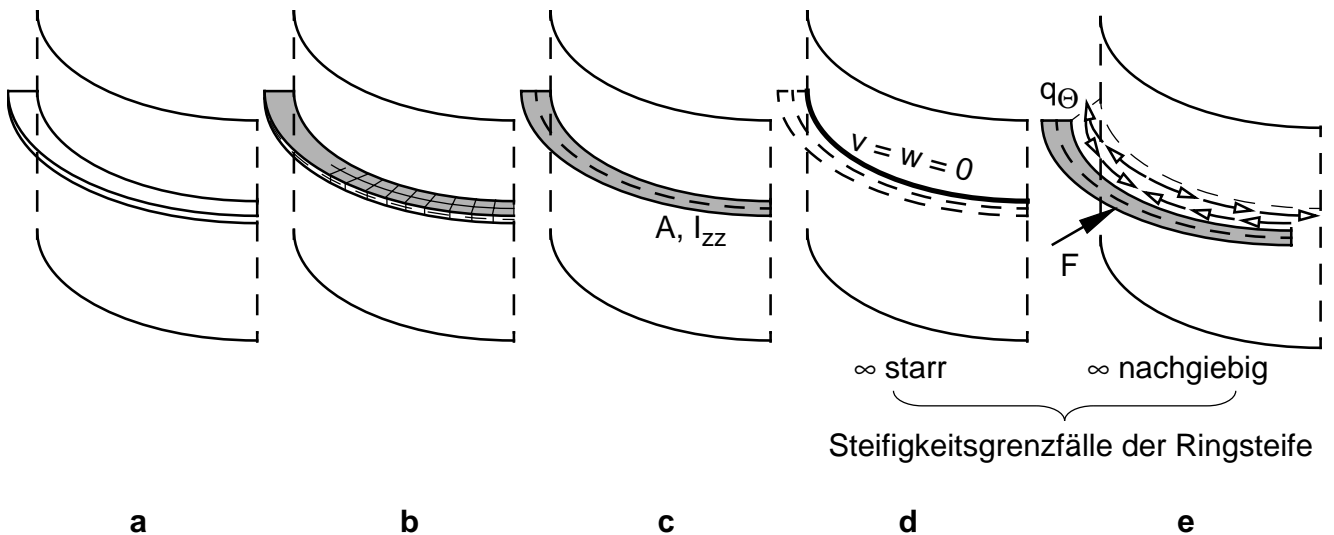


Bild 3-10 Baustatische Modellierung von Ringsteifen — **a.** Konstruktionsskizze, **b.** Schalenmodell, **c.** Balkenmodell (z.B. als exzentrisch angeschlossener ebener Kreisringträger), **d.** baustatische Modellierung als Randbedingung und **e.** isolierte Betrachtung des Ringes und Vorgabe von Koppelkräften mit vorgegebener Verteilung

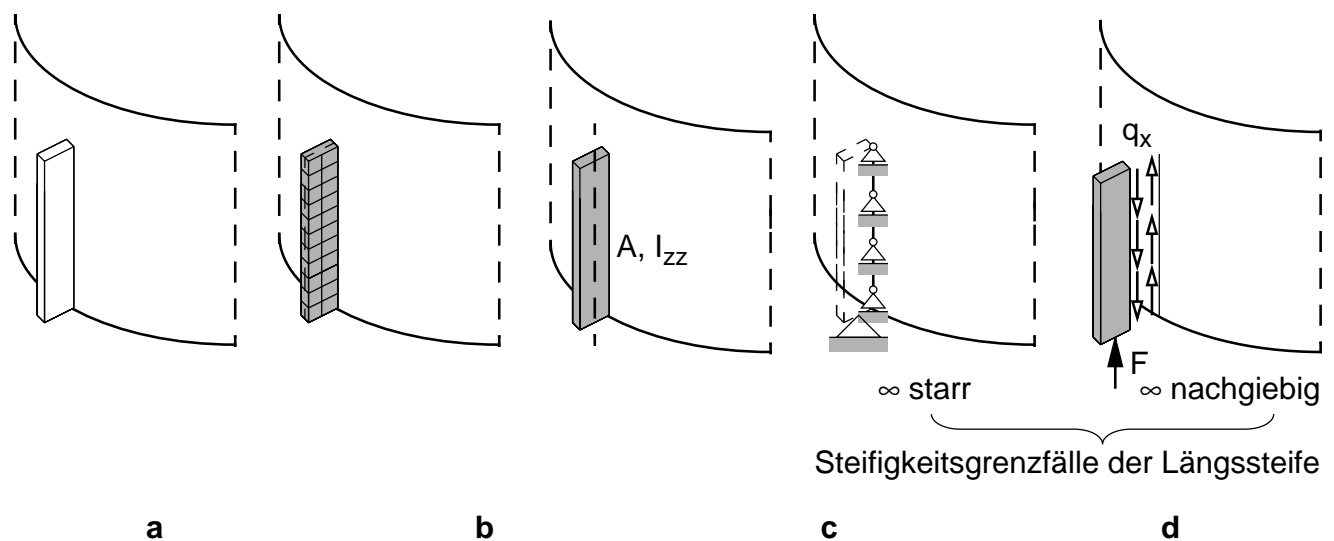


Bild 3-11 Baustatische Modellierung von Längssteifen — **a.** Konstruktionsskizze, **b.** Schalenmodell, **c.** Balkenmodell (z.B. als exzentrisch angeschlossener ebener Balken), **d.** baustatische Modellierung als Randbedingung und **e.** isolierte Betrachtung der Längsteife durch Vorgabe von Koppelkräften mit vorgegebener Verteilung

3.3.3 Verbindungen von Schalensegmenten

Die Wiedergabe von Schraubstößen bzw. Schweißanschlüssen kann, wie in Bild 3-12 dargestellt, erfolgen, und zwar durch

- lokale Verbundfugenelemente (Bild 3-12.b) zwischen den Einzelteilen (zwischen Schaleneinzelsegmenten bzw. Versteifungselementen und Schalenteilen)
- global als orthotrope Ersatzsteifigkeiten der Schalenteile (Bild 3-12.c)

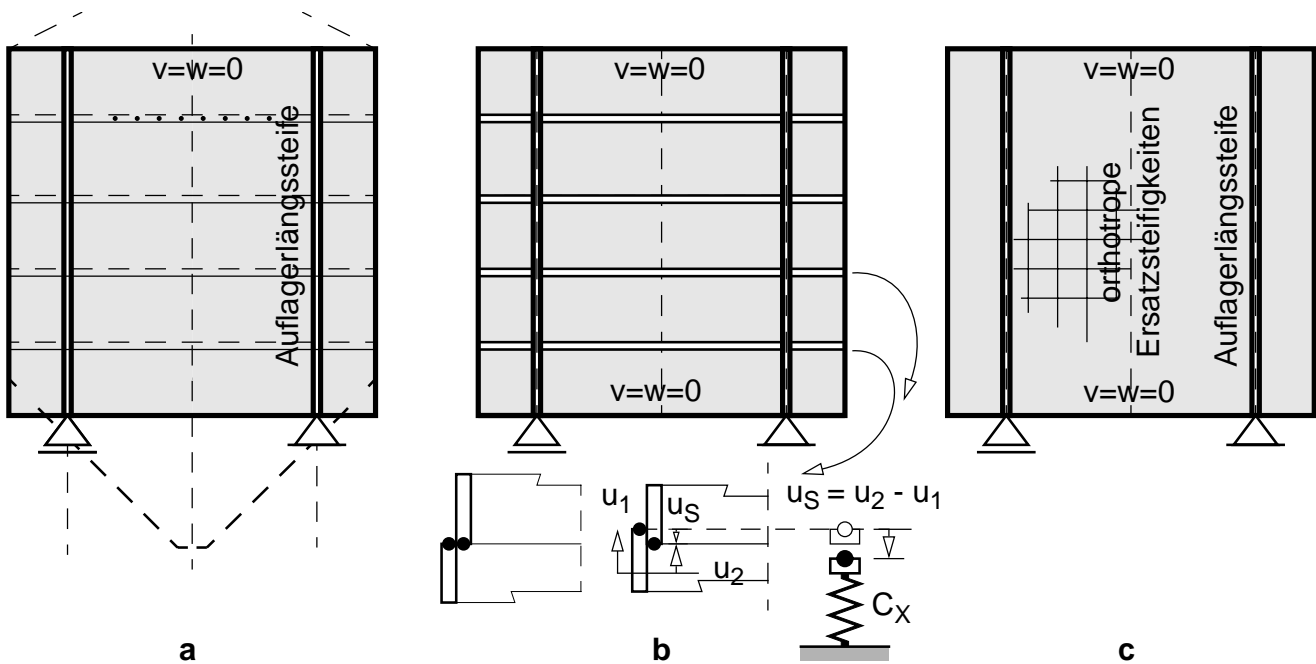


Bild 3-12 Berücksichtigung von Schraubstößen — **a.** Siloschaft mit horizontalen und vertikalen Schraubstößen, **b.** horizontale Fugenelemente, **c.** orthotrope Schalenersatzsteifigkeiten

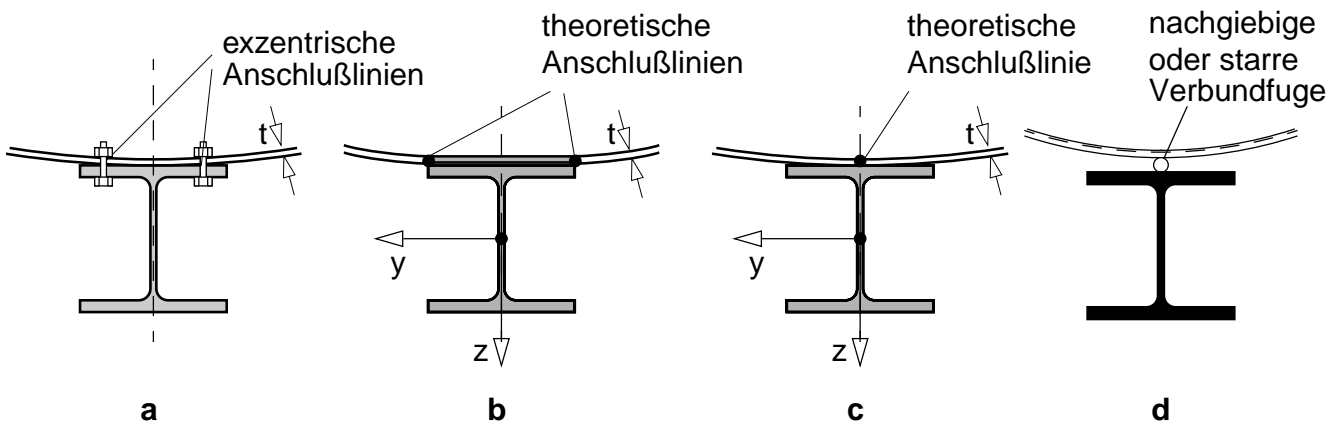


Bild 3-13 **a.** Konstruktionsskizze der vertikalen Schraubstöße, **b.** Modellierung der Verbindung mit zwei Anschlußlinien an der Auflagerlängssteife, **c.** mit zentraler Anschlußlinie, **d.** nachgiebige Verbundfuge zwischen Auflagerlängssteife und Schaft

3.3.4 Auflagerungen

Ein erster Schritt der baustatischen Modellbildung ist das Herauslösen des Silos aus der Gesamttragstruktur selbst. Das Traggerüst ist nun als Auflagerungsbedingung im verbleibenden Silomodell repräsentiert.

Zur baustatischen Modellierung der Lagerungsbedingung des Silos auf den diskreten Auflagerungen stehen prinzipiell drei Möglichkeiten zur Verfügung:

- (unendlich) starre Auflagerung
- elastische nachgiebige Auflagerung
- unendlich nachgiebige Auflagerung (globale Kräftegleichgewichtsgruppen)

Zur baustatischen Modellierung der Lagerungsbedingung des Silos auf den diskreten Auflagerungen in Bild 3-14.a können als Steifigkeitsgrenzfälle einerseits die Modellierung einer unendlich starren Auflagerung, durch die Vorgabe einer unverschieblichen Auflagerung in Bild 3-14.b, oder andererseits die Modellierung als unendlich nachgiebige Lagerung, durch die Vorgabe von Lagerkräften (Teillagerkräfte bei mehreren Einleitungsmechanismen) siehe Bild 3-14.d, betrachtet werden.

Die elastische Nachgiebigkeit der Siloaullagerung kann auch durch ein elastisches Bettungsmodell der Lagerfläche die Lagerungsbedingungen des Silos über den Einzelstützen modellmäßig mehr oder weniger realistisch abgebildet werden (Bild 3-14.c).

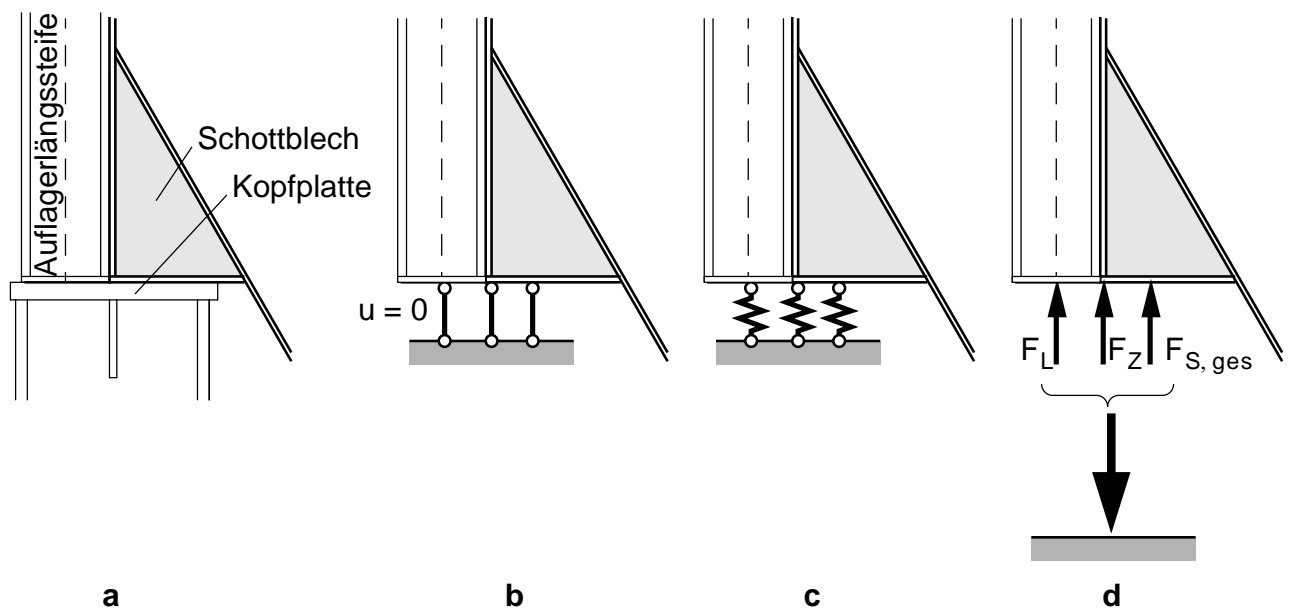


Bild 3-14 Baustatische Modellbildung von Auflagerungsbedingungen — **a.** Konstruktionsskizze, **b.** starre Lagerung, **c.** elastisch nachgiebige Auflagerung (elastisches Bettungsmodell) und **d.** unendlich nachgiebige Lagerung durch Vorgabe einer globalen Kräftegleichgewichtsgruppe mit definierter Kraftaufteilung $F_L \div F_Z \div F_S$

3.3.5 Schottblech

Die baustatische Modellierung des Schottbleches, das prinzipiell ein scheibenförmiges Tragelement darstellt, kann wie in Bild 3-15 dargestellt, als elastisch nachgiebiges Tragelement folgendermaßen erfolgen:

- als elastische oder elasto-plastische Scheibe (2D-Element) in Bild 3-15.b
- optional als elasto-plastisches Stabsystem mithilfe von 1D-Fachwerk- oder Biegestabelementen in Bild 3-15.c

Analog der Modellierung der Auflagerbedingungen können auch hier zwei Steifigkeitsgrenzfälle das Schottblech modellhaft wiedergeben:

- (unendlich) starres Schottblech (=starrer Körper)
- unendlich nachgiebiges Schottblech, das heißt realisiert durch die Vorgabe der Teilauflagerkräfte von Schaft (Kraft F_S) und Trichter (Kraft T_K) und den aus Gleichgewichtskräften am Schottblech notwendigen Haltekräften (Einzelradialkraft H bzw. Einzeltorsionsmoment M_T), das heißt als Kräftegleichgewichtsgruppe.

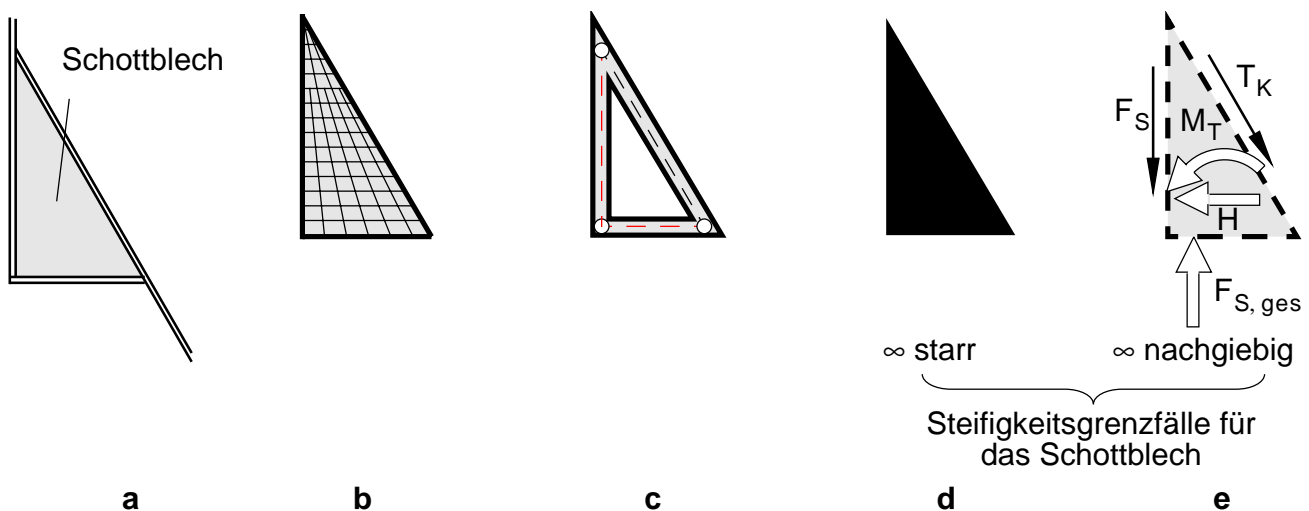


Bild 3-15 Baustatische Modellierung des Schottbleches — **a.** Konstruktionsskizze, **b.** Modellierung als elasto-plastische Scheibe (2D-Element), **c.** Modellierung als elasto-plastisches Stabsystem (1D-Elemente), **d.** Modellierung als starres Schottblech und **e.** Modellierung als unendlich nachgiebiges Schottblech durch Vorgabe von Kräftegleichgewichtsgruppen

Eine wesentlich Rolle bei der Aufnahme der Gleichgewichtshaltekräfte kommt der speziellen Ausführung der Schweißnahtanschlüsse des Schottbleches zu. In Bild 3-16.a ist das dreiseitig angeschlossene Schottblech dargestellt. Diese konstruktive Ausführungsvariante ist der vorgenommenen Modellierung von Teiltragsystemen bzw. des Basisringträgers als sekundäres Tragelement zugrundegelegt. Die Abtragung der Haltekräfte, die durch die lokale Lagerung der Standzarge und des Trichters am Schottblech aus Gleichgewichtsgründen notwendig sind, erfolgt durch den Basisringträger. Die Einleitung in den

Basisringträger erfolgt bei Annahme eines unendlich nachgiebigen Schottbleches durch konstant verteilte Schubkräfte (z.B. Bredt'scher Schubkraftfluß für das Einzeltorsionsmoment).

In Bild 3-17.a ist das Schottblech mit dem Basisringblech nicht verbunden. Das Schottblech steht aber auf der Kopfplatte der Silostütze auf, es wird nach wie vor die Teilauflagerkraft $F_{S, ges} = F_S + T_K \cos \beta$ über das Schottblech in den Silo eingeleitet. Die Haltekräfte können nun bedingt durch den fehlenden Schweißnahtanschluß nicht mehr über Schubkräfte in den Basisringträger eingeleitet werden, das Schaft-Längssteifen-System ist nun für die Abtragung der Haltekräfte verantwortlich. Die Einzelradialkraft und das Einzeltorsionsmoment werden nun statisch äquivalent als radial gerichtete, trapezförmig verteilte Gleichlast eingeleitet.

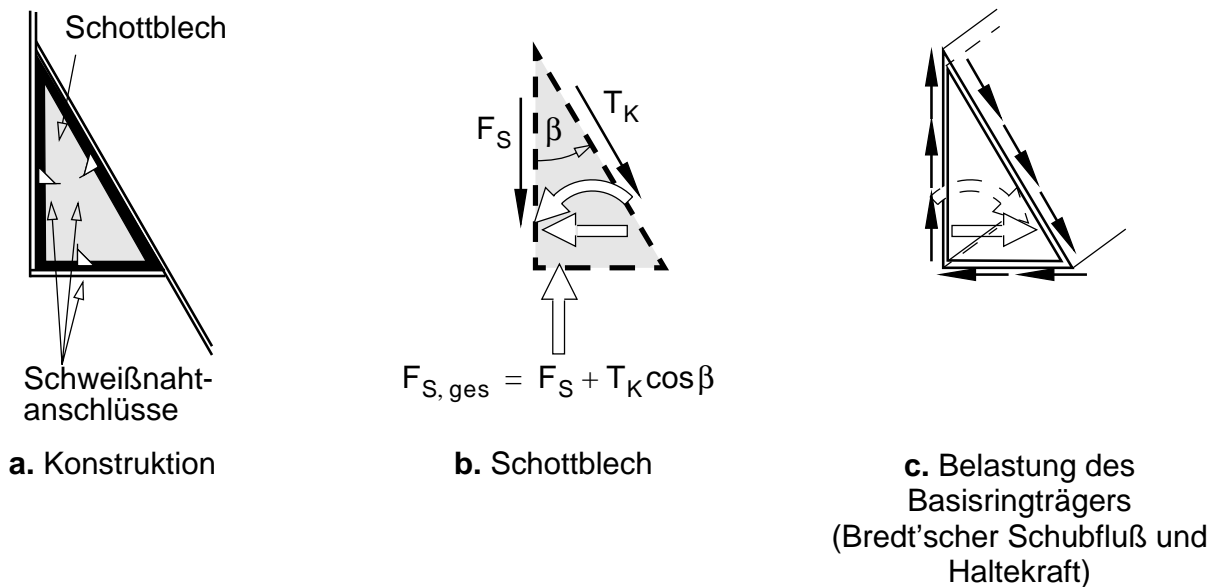


Bild 3-16 Allseitiger Schweißnahtanschluß und Einleitung der Haltekräfte mittels verteilter Schubkräfte in den Basisringträger

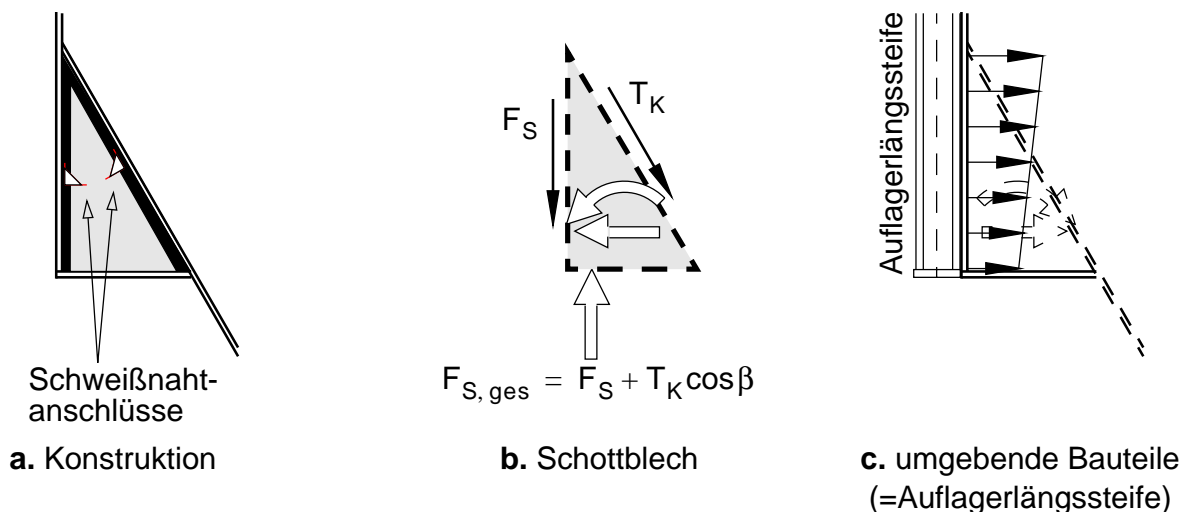


Bild 3-17 Zweiseitiger Schweißnahtanschluß zwischen Schottblech und Standzarge bzw. Trichter und Einleitung der Haltekräfte mittels einer trapezförmigen Gleichlast in das Schaft-Längssteifen-System

4

TRICHTER

Inhalt von Kapitel 4:

- 4.1 Einführung**
- 4.2 Plastische Grenztragfähigkeit des Trichters bei rotationssymmetrischer Lastabtragung**
- 4.3 Plastische Grenztragfähigkeit des Trichters bei lokaler Lastabtragung**
- 4.4 Entwicklung verfeinerter Bemessungsformeln**
- 4.5 Tragfähigkeitsabschätzung auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen**
- 4.6 Zusammenfassung von Kap. 4**

4.1 Einführung

Bei Silokonstruktionen auf diskreten Einzelauflagerungen kommt es durch das steifigkeitsmäßige Zusammenwirken von Trichter und Schaft zu einer gemeinsamen Abtragung der Gesamtvertikalbelastung. Im folgenden wird eine Aufspaltung der Lastabtragung in einen rotationsymmetrischen Anteil und den Anteil, der zur lokalen Auflagerung des Trichters zugehörig ist, vorgenommen. Der rotationsymmetrische Anteil der Lastabtragung entspricht konstant verteilten Meridianrandkräften in Bild 4-1.b des herausgelösten Trichters, der lokale Anteil entspricht lokalen Lagerkräften angreifend über eine Teillänge der Auflagermeridiane oder in Umfangsrichtung innerhalb endlicher Lagerbreiten in Bild 4-1.c.

Im Gegensatz dazu steht, wie bereits angedeutet, das Tragverhalten des Trichters am Silogesamtsystem. In Kap. 3.2.1.2 wurden dazu einige grundsätzliche Überlegungen dargestellt. Bei vollständiger Berücksichtigung der kinematischen Kompatibilität zwischen Trichter und Schaft stellen sich, wie in Bild 4-1.a dargestellt, durch die elastische steifigkeitsmäßige Aufteilung der Gesamtvertikalbelastung, ungleichförmig verteilte Meridianrandkräfte am Trichter ein. Im Bereich der diskreten Auflagerungen erreichen die Meridiankräfte ihren Maximalwert, im Bereich der Lagermeridiane stellen sich sogenannte "elastische Auflagerbänder" ein. Diese Spannungsverteilungen stellen, wenn keine plastischen Umverteilungen möglich sind bzw. nicht in Rechnung gestellt werden, den ungünstigsten Zustand für den Trichter dar.

Bei Erreichen des elasto-plastischen Grenzzustandes im Trichter (Bild 4-1.b) sind die Meridianrandkräfte am Trichter rotationsymmetrisch verteilt. Dieser Zustand stellt den günstigsten Tragzustand für den Trichter dar, klarerweise verbunden mit dem Auftreten plastischer Dehnungen. Dabei wird die maximale Tragfähigkeit des Trichters erreicht (abgesehen von zusätzlichen Auflagerungen des Trichters auf den Schottblechen bzw. von sonstigen, begünstigend wirkenden Randeinspannungseffekten). Der elasto-plastische Grenzzustand des Trichters in Bild 4-1.b stellt dabei andererseits zugleich für den Schaft den ungünstigsten Zustand dar und ist somit für diesen Bauteil bemessungsrelevant.

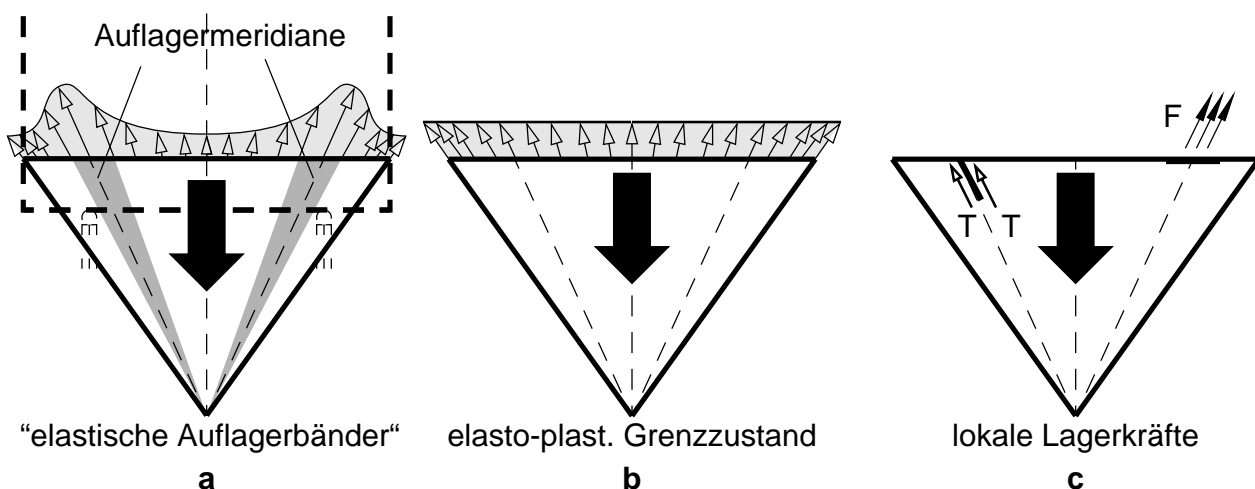


Bild 4-1 a. Verteilungen der Meridianrandkräfte (elastische Auflagerbänder) im elastischen Zustand am globalen Silogesamtsystem, b. rotationsymmetrisch verteilte Meridianrandkräfte im elasto-plastischen Grenzzustand des Trichters und c. lokale Lagerkräfte des Trichters

4.1.1 Stand des Wissens

Eingehende Untersuchungen zur Tragfähigkeit des Silotrichters wurden von Rotter (1990a), Teng und Rotter (1989,1992) gemacht. Dabei wurden die rotationssymmetrische und die lokale Lastabtragung bei Einzelauflagerung des Silos untersucht.

Primär lag das Augenmerk auf der rotationssymmetrischen Lastabtragung. Hauptgesichtspunkte waren dabei die Tragfähigkeit des Membrantrichters, der Einfluß der Randbiegestörung bzw. die zusätzliche Steigerung der Tragfähigkeit durch Einspannungseffekte am oberen Rand des Trichters. Als Versagenskriterien wurden dabei definiert:

- plastische Versagen der Trichter-Schaft-Übergangsbereiches
- plastisches Versagen des oberen Trichterbereiches

Für Silos mit Einzelauflagerung wurden lineare Berechnungen durchgeführt. Durch die gemeinsame Lastabtragung von Schaft und Trichter kommt es, wie bereits eingangs erwähnt, zu einer ungleichförmigen Meridianmembranbeanspruchung am oberen Rand des Trichters. Die erhöhte Beanspruchung des Trichters im Bereich der Einzelauflagerung wird als maßgebend für die Bestimmung der Tragfähigkeit angesehen. Eine mögliche plastische Umlagerung der Meridiankräfte des Trichters wird dabei nicht berücksichtigt.

4.1.2 Lastabtragung am herausgelösten Trichter

Die Lastabtragung am Silotrichter mit rotationssymmetrischer Belastung zufolge Eigengewicht und Silofüllung erfolgt primär über rotationssymmetrisch verteilte Membranrandkräfte in Meridianrichtung. Darüber hinaus kann die Lastabtragung zusätzlich auch durch Randkräfte, die durch eine lokale Auflagerung am Trichter wirken, erfolgen. Diese lokale Auflagerung kann, wie bereits erwähnt, einerseits durch eine Randlagerung am oberen Trichterrand oder durch Steifen oder sogenannte Schottbleche an mehreren Meridianen bedingt sein (Bild 4-1.c).

Im folgenden wird das Tragverhalten des isolierten Trichters untersucht. Das Zusammenwirken mit dem Schaft und dem Basisringträger wird hinsichtlich des Gleichgewichts am Gesamtsystem durch die Vorgabe von Meridianrandkräften berücksichtigt (siehe Bild 4-1.b). Es werden dabei folgende Lastabtragungsmöglichkeiten des Trichters untersucht:

- rotationssymmetrische (globale) Lastabtragung des Trichters
- lokale Lastabtragung des Trichters mittels lokalen Auflagerkraftkomponenten

Zunächst wird auf das Tragverhalten des Silotrichters für den Grundfall der rotationssymmetrischen Lastabtragung eingegangen. Dabei werden vor allem der Einfluß der Trichterneigung und die Art der Trichterbelastung untersucht. Die rotationssymmetrische Lastabtragung wird im folgenden auch als globale Lastabtragung des Trichters bezeichnet.

Für die Lastabtragung bei lokaler Auflagerung des Trichters werden die beiden Arten der lokalen Auflagerung des Trichters entsprechend Bild 4-1.c zuerst getrennt und dann gleichzeitig wirkend untersucht. Es wird auch die Interaktion von rotationssymmetrischer (globaler) und lokaler Lastabtragung untersucht. Die Bestimmung der plastischen Gesamttragfähigkeit erfolgt mittels nichtlinearer FE-Berechnungen. Aufbauend auf diesen Resultaten wird eine approximative Berechnungsprozedur (“direct-design“-Methode) erarbeitet.

Letztendlich erfolgt der Vergleich mit Tragfähigkeitswerten, die basierend auf linear-elastischen Spannungsberechnungen bzw. auf Membranberechnungen näherungsweise bestimmt wurden (“stress-based-design“-Methode).

4.1.3 Auflagerung des Silotrichters

In den folgenden Abbildungen sind einige konstruktive Möglichkeiten der lokalen Auflagerung des Trichters exemplarisch skizziert. Der Silo ist in den vorliegenden Fällen auf mehreren Einzelstützen diskret aufgelagert. Dabei kommt es durch die konstruktive Ausbildung neben der Auflagerung des versteiften Schaftes auch zu einer lokalen Auflagerung des Trichters in Meridian- oder Umfangsrichtung.

In Bild 4-2 ist die lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung durch das im dreieckförmigen Hohlkastenträger eingebaute Schottblech gegeben. Als lokale Lagerkräfte wirken am Trichter Einzelschubkräfte. Diese Art der Auflagerung wird im folgenden als “Schottblechlagerung“ bzw. im Bezug auf die Auflagerkraftwirkung als “Schubkraftlagerung“ bezeichnet.

In Bild 4-3 ist die lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung innerhalb einer endlichen Auflagerbreite in Umfangsrichtung durch die Auflagerung am Stützenkopf gegeben. Als lokale Lagerkräfte wirken am Trichter meridionale Randkräfte. Diese Art der Auflagerung wird im folgenden als “Meridiannormalkraftlagerung“ bzw. als “Randlagerung“ des Trichters bezeichnet.

In Bild 4-4 erfolgt die lokale Auflagerung des Trichters kombiniert durch eine Quersteife in Meridianrichtung und durch die Lagersteife über dem Stützenkopf.

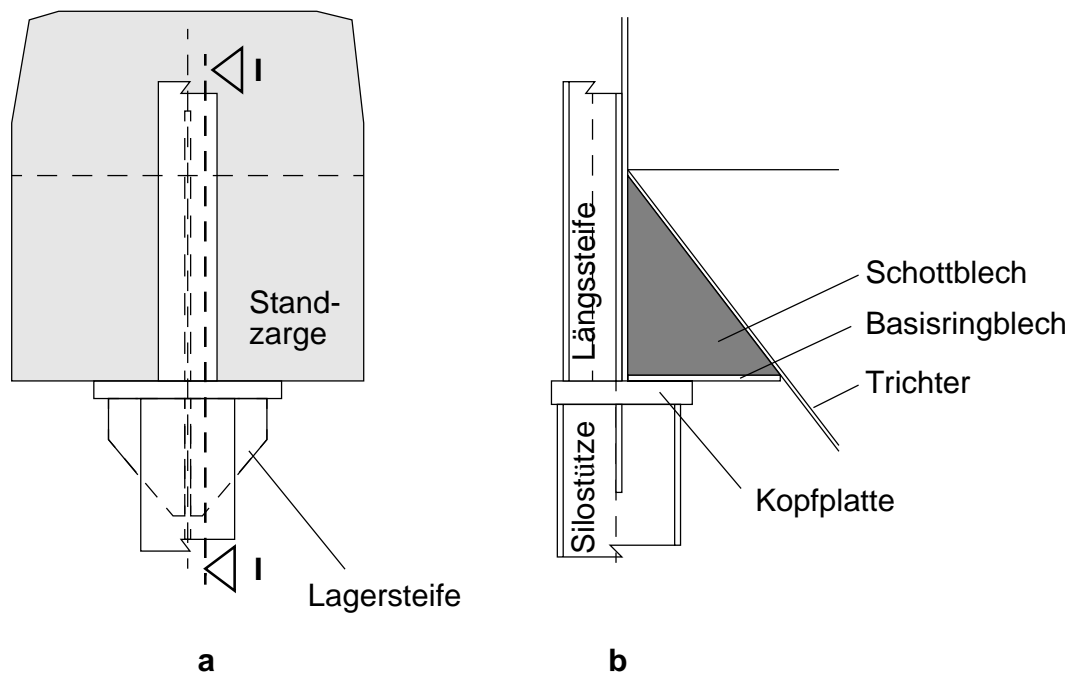


Bild 4-2 Lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung durch das im dreieckförmigen Hohlkastenträger eingebaute Schottblech (“Schubkraftlagerung”) — **a.** Ansicht und **b.** Schnitt I-I

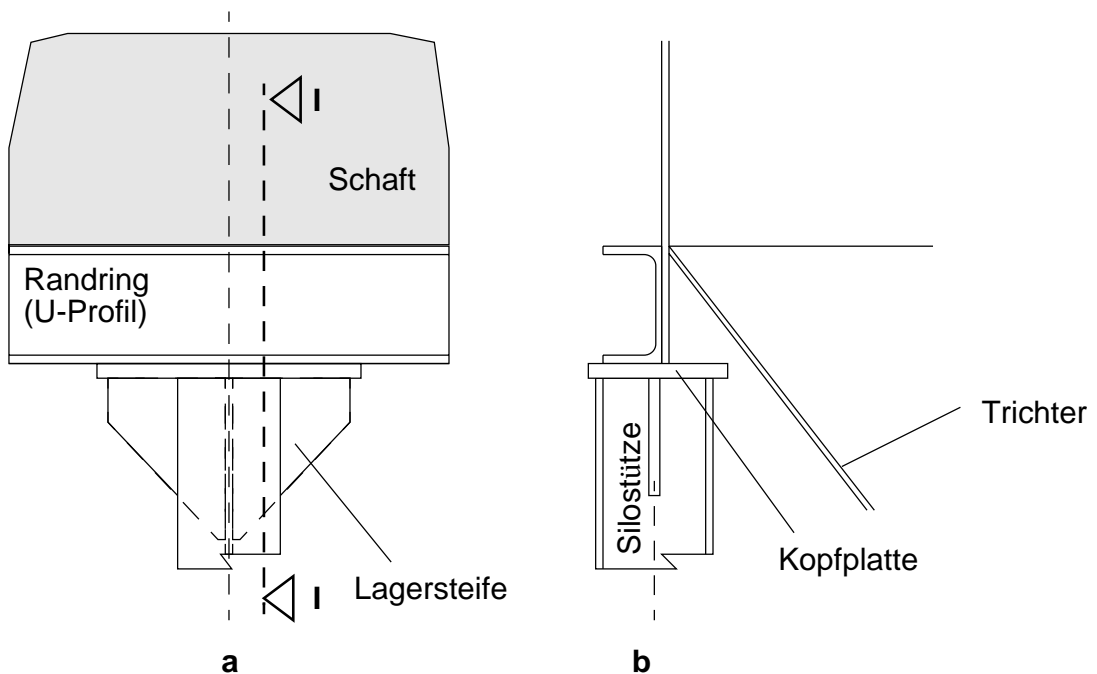


Bild 4-3 Lokale Auflagerung des Trichters innerhalb einer endlichen Auflagerbreite in Umfangsrichtung (“Meridiannormalkraftlagerung”) durch den Stützenkopf — **a.** Ansicht und **b.** Schnitt I-I

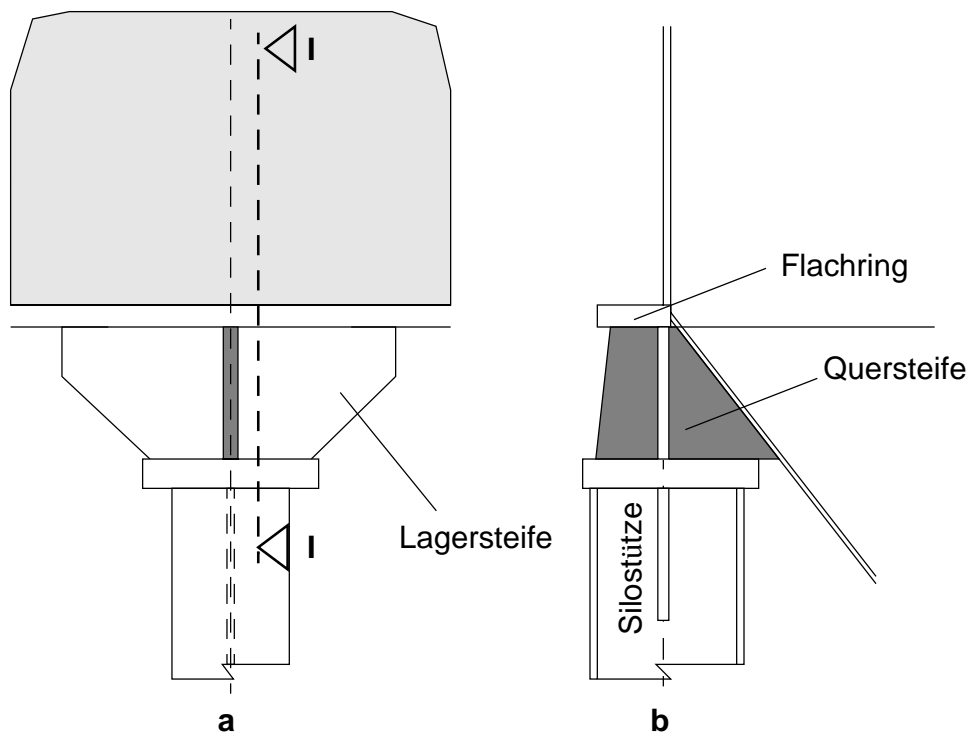


Bild 4-4 Kombinierte lokale Auflagerung des Trichters innerhalb einer endlichen Auflagerbreite am oberen Trichterrand (“Meridiannormalkraftlagerung“ bzw. “Randlagerung“) und in Meridianrichtung (“Schubkraftlagerung“ bzw. “Schottblechlagerung“) — **a.** Ansicht und **b.** Schnitt I-I

4.1.4 Aufteilung der Gesamlastabtragung

Die Lastabtragung des Trichters erfolgt bei Einzelauf Lagerung erfolgt durch:

- globale Lastabtragung mittels konstanter, rotationssymmetrisch verteilter Meridianrandkräfte (siehe Bild 4-5)
- lokale Lastabtragung durch die lokalen Lagerkräfte des Trichters (siehe Bild 4-7)

Ein Zusammenwirken beider Tragmechanismen ist stets gegeben.

4.1.4.1 Globale rotationssymmetrische Lastabtragung

In Bild 4-5 ist die globale, rotationssymmetrische Lastabtragung dargestellt. Die Vertikalkomponente der meridionalen Membrankräfte $n_{x,h}$ des Trichters werden über den Schaft des Silos auf die Einzelstützen übertragen. Die radiale Umlenkkomponente wirkt als Ringbelastung am Verschneidungsbereich von Trichter und Schaft. Die in sich geschlossene Abtragung der radialen Umlenkkomponente kann durch eine Ringsteife unter Berücksichtigung der Mitwirkung (mitwirkenden Breiten) der angrenzenden Schalenteile oder auch durch die Schalenteile alleine erfolgen.

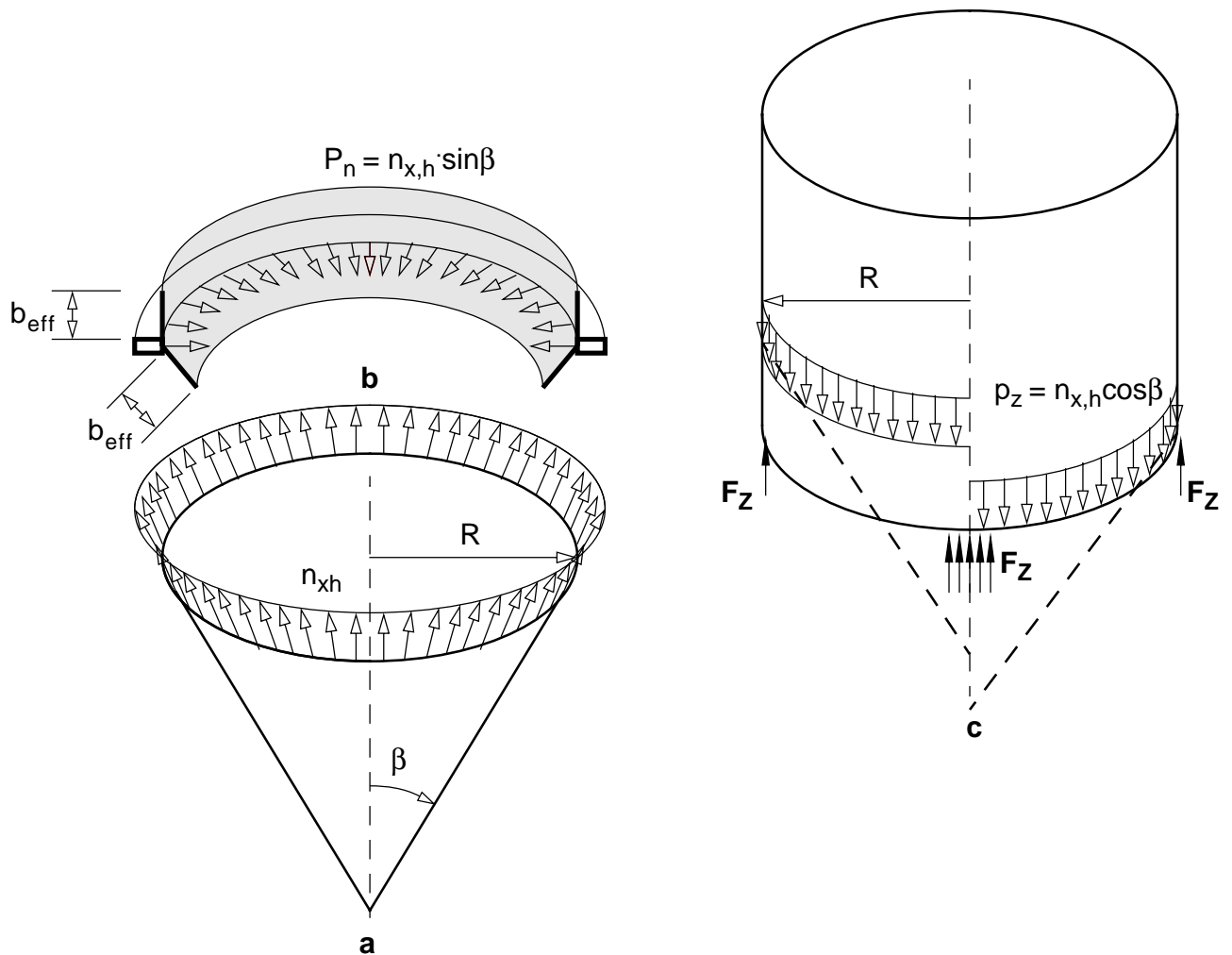


Bild 4-5 Rotationssymmetrische Lastabtragung des Trichters — **a.** Randkräfte $n_{x,h}$ am oberen Rand des Trichters, **b.** Aufnahme der Horizontalkomponente durch den Trichter-Schaft-Übergangsbereich und **c.** Aufnahme der Vertikalkomponente durch den Schaft

4.1.4.2 Lokale Lastabtragung

In Bild 4-6 sind zwei Ausführungsmöglichkeiten, die eine lokale Auflagerung des Trichters zur Folge haben, dargestellt. In Bild 4-6.a ist die Ausführung des Silos ohne Standzarge — der Trichter schließt an den unteren Schafttrand an — abgebildet. Am Trichter-Schaft-Übergang ist ein Flachring angeordnet. In Bild 4-6.b ist die Ausführung des Silos mit Standzarge dargestellt. Das Basisringblech an der Unterkante der Standzarge ist zusätzlich mit dem Trichter verbunden. In dem durch Standzarge, Basisringblech und oberem Trichterteil entstehenden dreieckförmigen Hohlkasten sind über den diskreten Einzelauflagerung des Silos Schottbleche eingebaut.

Durch die Einzelauflagerung entsteht in Bild 4-6.a eine lokale Auflagerung des Trichters innerhalb der Lagerbreite d entlang des oberen Trichterrandes (=Randlagerung bzw. Meridiannormalkraftlagerung), in Bild 4-6.b durch den Einbau des sogenannten Schottbleches eine lokale Auflagerung in Meridianrichtung (=Schottblechlagerung bzw. Schubkraftlagerung) des Trichters.

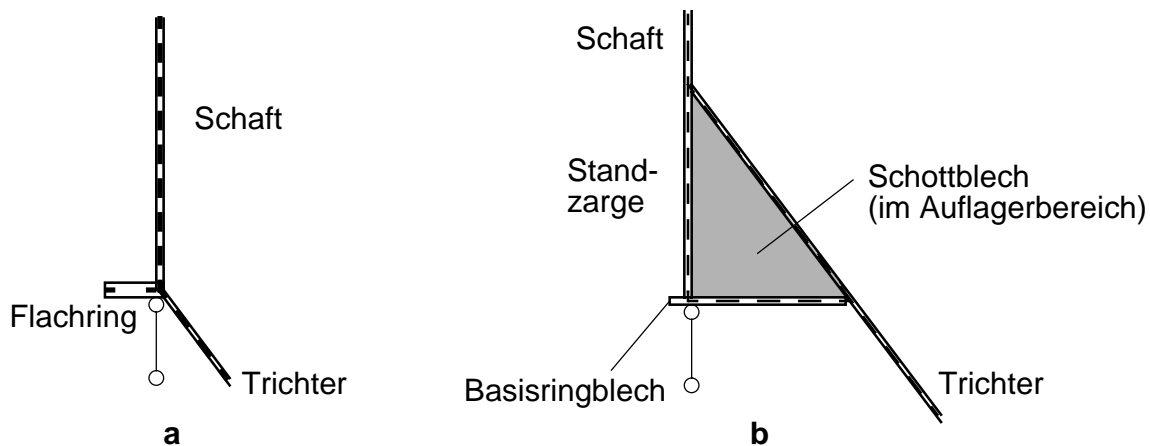


Bild 4-6 Trichter-Schaft-Übergang — **a.** Ausführung ohne Standzarge und Anordnung eines Flachringes und **b.** Ausführung mit Standzarge und Anordnung eines Schottbleches im integrierten, dreieckförmigen Hohlkasten

In Bild 4-7 sind die Wirkungen der Randkräfte bei lokaler Auflagerung am Trichter dargestellt. Die Auflagerung auf Steifen bzw. auf Schottblechen in Meridianrichtung bedingen resultierende Schubkräfte T über eine Länge d_S am Trichter, diese lokale Auflagerung kann somit als Schubkraftauflagerung des Trichters bezeichnet werden.

Die lokale Auflagerung innerhalb der Lagerbreite d am oberen Trichterrand bedingt Meridiankräfte F innerhalb der Breite d , diese lokale Auflagerung kann somit als Meridian-Normalkraftlagerung des Trichters bezeichnet werden.

Für die weitere isolierte Betrachtung des Trichters wird am oberen Rand des Trichters eine Membranrandbedingung ($v = 0$) vorgegeben.

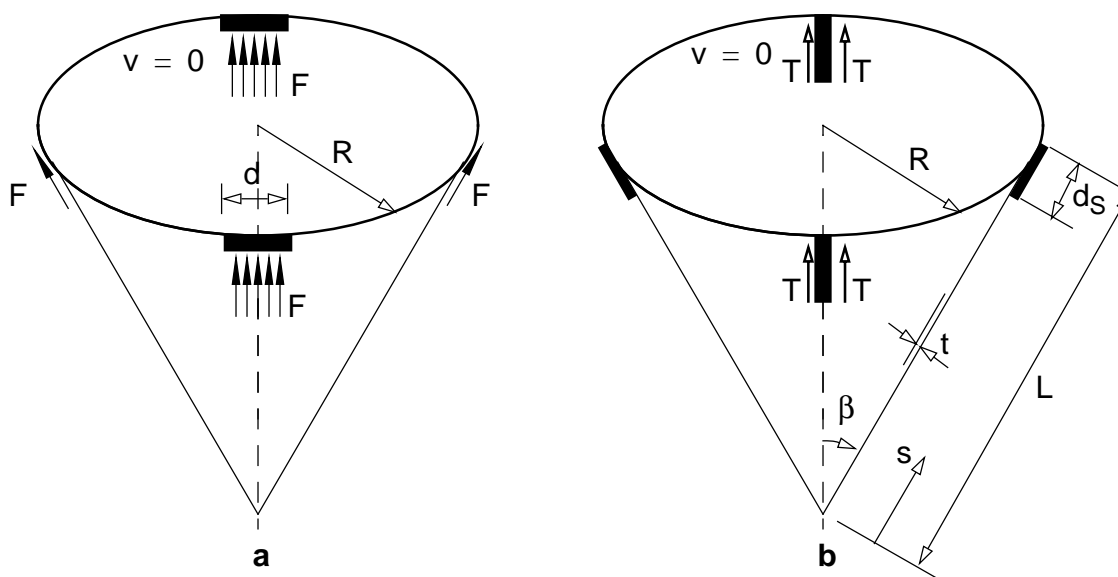


Bild 4-7 Resultierende Lagerkräfte bei lokaler Auflagerung des Trichters — **a.** am oberen Trichterrand (=Rand- bzw. Meridiannormalkraftlagerung bzw. **b.** in Meridianrichtung (=Schottblechlagerung bzw. Schubkraftlagerung)

Gleichgewicht am Gesamtsystem

Die lokalen Lagerkräfte F und T und die Randschubkräfte $n_{x\theta}$ zugehörig zur Membranrandbedingung des Trichters wirken zur Befriedigung der statischen Kompatibilität am Restsystem (Schaft und Ringträger). Durch die weitere Aufteilung des Tragsystems in Bild 4-8 bzw. Bild 4-9 müssen diese Kräfte bzw. die aus Gleichgewichtsgründen erforderlichen Haltekräfte — Radialkräfte H bzw. Einzeltorsionsmomente M_T — vom Flachring bzw. vom Dreiecksringträger aufgenommen werden. Die Vertikalkräfte V werden in das Traggerüst des Silos weitergeleitet.

In Bild 4-8 sind die wechselweise wirkenden Kräfte für die erste Ausführungsmöglichkeit — also bei lokaler Meridiannormalkraftlagerung des Trichters — dargestellt. Die Vertikalkomponente V der lokalen Lagerkraft F des Trichters wird direkt in die Einzelauflagerung des Silos (Silotraggerüst) abgetragen. Die Radialkräfte H müssen im vorliegenden Fall von dem, am Trichter-Schaft-Übergang angeordneten Flachring aufgenommen werden. Aufgrund der Größenordnung der Radialkräfte ist es nicht zweckmäßig, die Lastabtragung dieser Kräfte dem Silotraggerüst zu zuweisen.

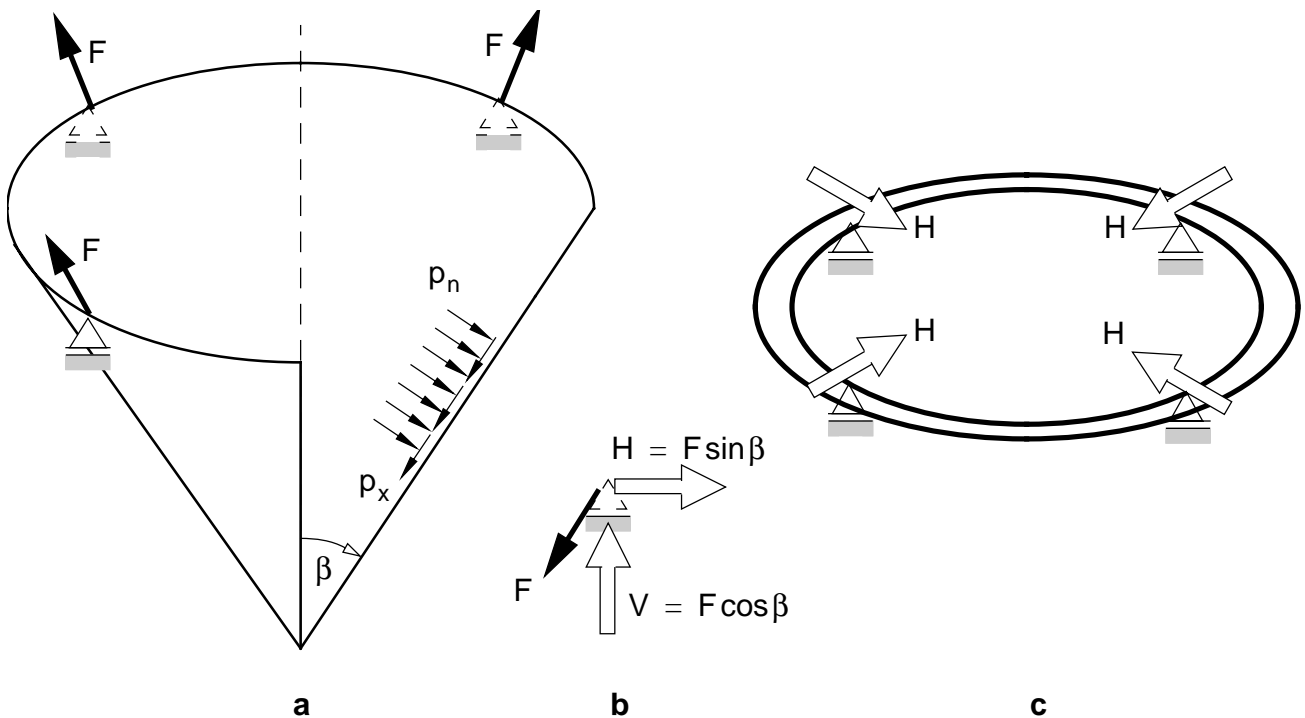


Bild 4-8 Gleichgewicht am Gesamtsystem — **a.** lokale Randlagerkräfte F des Trichters, **b.** radial gerichtete Haltekräfte H an den Einzelauflagerungen und **c.** Aufnahme der Radialkräfte H durch den Flachring

In Bild 4-9 sind die wechselweise wirkenden Kräfte für die zweite Ausführungsmöglichkeit — also bei lokaler Schubkraftlagerung des Trichters in Meridianrichtung — dargestellt. Die Vertikalkomponente F_S der lokalen Lagerkräfte T des Trichters wird ebenfalls direkt in die Einzelauflagerungen des Silos (Silotraggerüst) abgetragen. Am Schottblech entstehen aus Gleichgewichtsgründen eine Haltekraft H und ein Haltemoment M_T . Die Radialkräfte H und die Einzeltorsionsmomente M_T müssen im vorliegenden Fall vom dreieckförmigen Hohlkasten, der in Form eines integrierten Basisringträgers vorliegt, aufgenommen werden.

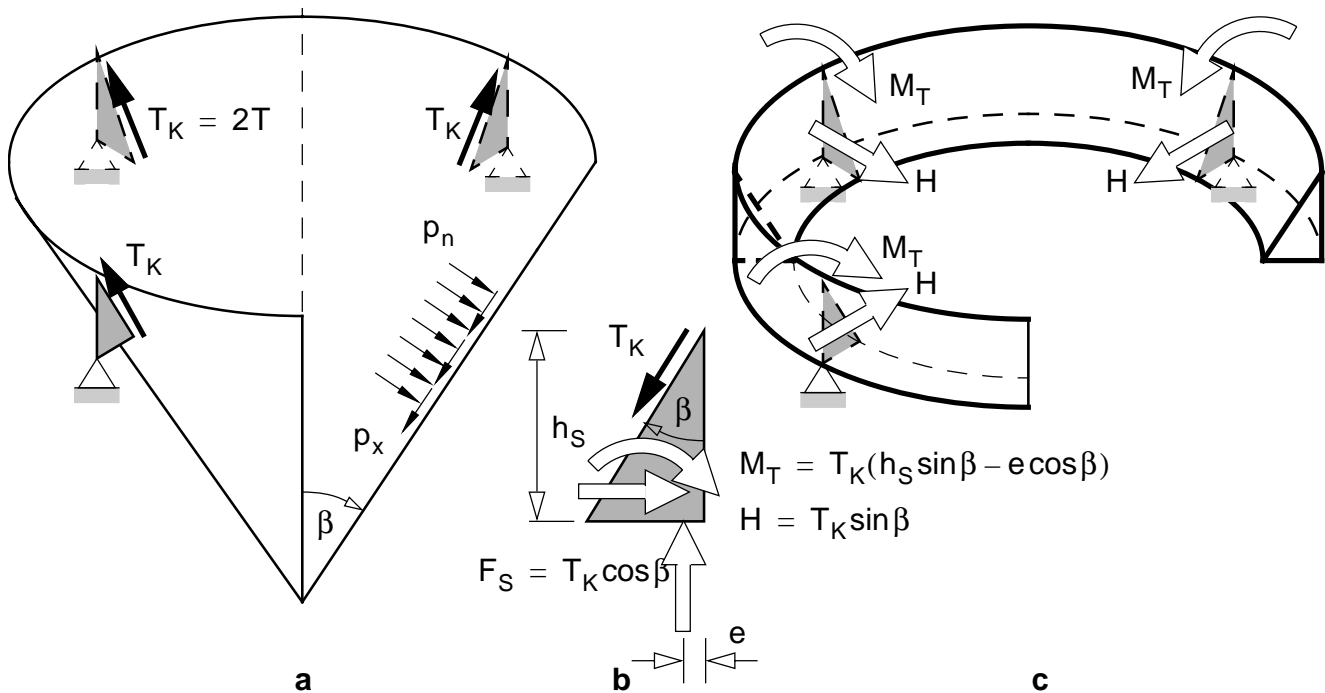


Bild 4-9 Gleichgewicht am Gesamtsystem — **a.** lokale Auflagerung des Trichters im Meridianrichtung (=Schottblech- bzw. Schubkraftlagerung), **b.** Haltekraft H bzw. Haltemoment M_T am Schottblech und **c.** Radialkräfte H und Einzeltorsionsmomente M_T am dreieckförmigen, integrierten Basisringträger

In den folgenden Untersuchungen wird das isolierte Tragverhalten des Trichters untersucht. Auf die Tragfähigkeit des isolierten Basisringträgers, der die Torsionsmomente bzw. Radialkräfte der lokalen Lagerkräfte abtragen muß, wird in Kap. 6 separat eingegangen.

4.1.5 Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit

Im folgenden werden für die in Bild 4-10 dargestellten Auflagerungen — rotationssymmetrische bzw. lokale Auflagerung — die plastischen Grenztragfähigkeiten des Trichters berechnet.

Die Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit des Trichters kann, wie im folgenden in Tab. 4-1 dargestellt, auf folgenden Berechnungen basieren:

- Geometrisch und materiell nichtlineare FE-Berechnungen (GMNA)
- Materiell nichtlineare FE-Berechnungen (MNA)
- Linear-elastische Spannungsberechnungen (LA)
- Membranberechnungen (MA)
- Bemessungsformeln (basierend auf MNA-Berechnungen)

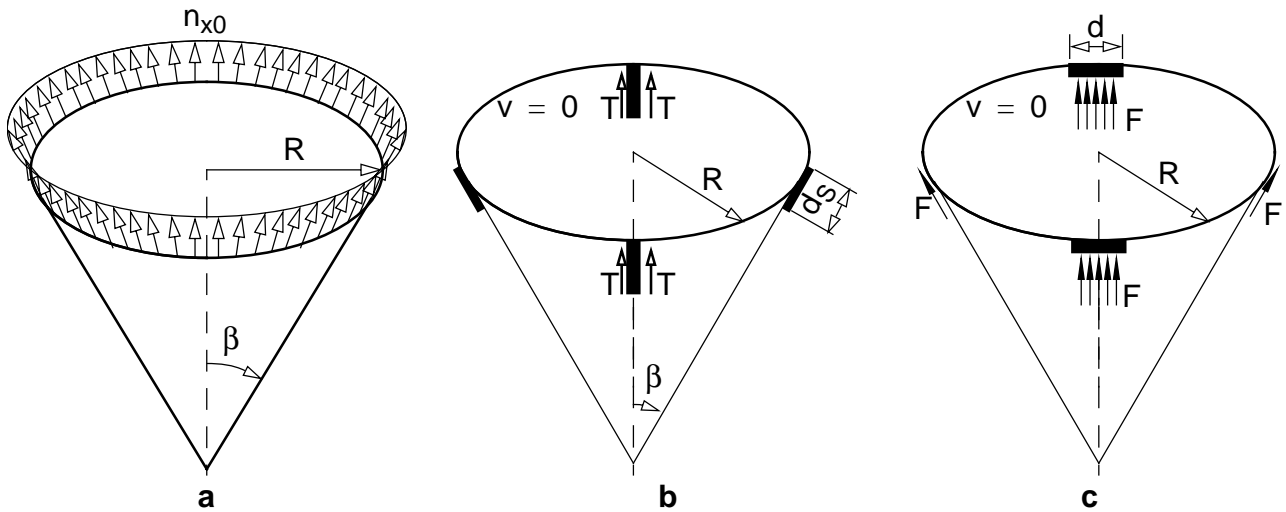


Bild 4-10 Untersuchte Auflagerungsarten des Trichters — **a.** rotationssymmetrische Auflagerung, **b.** lokale Schubkraftauflagerung und **c.** lokale Meridiannormalkraftauflagerung des Trichters

Die reale Tragfähigkeit wird vollständig mittels geometrisch und materiell nichtlinearer Berechnungen bestimmt. Der Trichter wird zufolge seiner Belastung in Meridian- und Umfangsrichtung auf Zug beansprucht. Die MNA-Berechnungen liefern, da Geometrieänderungen nicht berücksichtigt werden, verglichen mit den GMNA-Berechnungen ein unteres Limit der realen plastischen Tragfähigkeit. Die Unterschiede sind im vorliegenden Fall jedoch unerheblich.

Linear-elastische Spannungsberechnungen liefern eine untere, konservativ bestimmte (abgeschätzte) plastische Tragfähigkeit des Trichters. Versagensmaßgebend ist die maximale Querschnittsausnutzung der Schale bei Anwendung des Ilyushin-Fließkriteriums bzw. das Fließen des stärksten beanspruchten Punktes der Schalenoberflächen bei Anwendung des Mises-Vergleichsspannungskriteriums. Diese beiden Kriterien unterscheiden sich durch die plastische bzw. elastische Verteilung der Biegespannungen über die Schalendicke.

Das vereinfachte, aber im vorliegenden Fall durchaus zutreffende Versagenskriterium — Fließen des stärksten beanspruchten Punktes der Schalenmittelfläche (=Membranfließen) — liefert etwas höhere Tragfähigkeiten. Dabei werden die Biegespannungen als Sekundärspannungen, also als nicht für das Gleichgewicht notwendige Spannungen interpretiert. Im allgemeinen ist dies nicht zutreffend, da zumindest ein Teil der Schalenbiegemomente auch aus Gleichgewichtgründen zur Lastabtragung erforderlich ist. Ein konsistentes Vorgehen stellt, wie in Kap. 1.2 bereits erwähnt, die Modellierung als Semi-Membran-Schale dar. Dabei wird ein Teil der Biegemomente bewußt, das heißt in vorwegnehmender Kenntnis des tatsächlichen Tragverhaltens durch entsprechende Steifigkeitsannahmen ausgeblendet (siehe Anhang A.1).

Die Membranlösung stellt die statisch bestimmte Lösung der Gleichgewichtsgleichungen dar. Bei Membranlagerung und rotationssymmetrischer Belastung erhält man die reale plastische Tragfähigkeit. Bei lokalen Beanspruchungen gelingt es zwar die Membrankräfte aus den Gleichgewichtsgleichungen zu berechnen, durch die fehlende Lastverteilungswirkung in Umfangsrichtung erhält man jedoch extrem bandartige Lastabtragungszonen (siehe Kap. 4.5.2). Durch den nach unten hin abnehmenden Trichterradius erreichen die Schubkräfte ihren Maximalwert am unteren Trichterrand, dies bedingt

drastisch niedrigere berechnete Tragfähigkeiten gegenüber jenen, die auf der Basis (statisch unbestimmter) linear-elastischer Spannungsberechnungen bestimmt werden.

Die Entwicklung von Bemessungsformeln dient dazu die reale Tragfähigkeit mittels Formeln so gut wie möglich zu erfassen. Basis dafür sind im vorliegenden Fall die Ergebnisse der MNA-Berechnungen, sie werden mit Hilfe mechanisch anschaulicher Spannungskomponenten in eine Bemessungsformel gekleidet.

Tab. 4-1 Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit

Berechnungs-prozedur	Versagensform	Versagenskriterium	
MNA	Plastischer Versagensmechanismus	Traglastfaktor	
LA	Fließen des stärksten beanspruchten Punktes der Schalenmittelfläche	Membranfließen (nicht konsistent)	$n_{eq} = \sqrt{n_x^2 + n_x^2 - n_x n_\Theta + 3n_{x\Theta}^2} \leq f_y t$
	Fließen des stärksten beanspruchten Punktes unter Berücksichtigung von Schalenbiegewirkungen	Ilyushin-Fließkriterium	$\sigma_{x(\Theta)} = \frac{n_{x(\Theta)}}{t} \pm \frac{m_{x(\Theta)}}{t^2/4}, \tau_{x\Theta} = \frac{n_{x\Theta}}{t} \pm \frac{m_{x\Theta}}{t^2/4}$ $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\Theta + 3\tau^2} \leq f_y$
	Fließen des stärksten beanspruchten Punktes an den Schalenoberflächen	Mises-Vergleichsspannung	$\sigma_{x(\Theta)} = \frac{n_{x(\Theta)}}{t} \pm \frac{m_{x(\Theta)}}{t^2/6}, \tau_{x\Theta} = \frac{n_{x\Theta}}{t} \pm \frac{m_{x\Theta}}{t^2/6}$ $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\Theta + 3\tau^2} \leq f_y$
Membrantheorie	Fließen des stärksten beanspruchten Punktes (Umfangslinie)	Membranfließen (konsistent)	$n_{eq} = \sqrt{n_x^2 + n_x^2 - n_x n_\Theta + 3n_{x\Theta}^2} \leq f_y t$
Bemessungsformel	basierend auf MNA-Berechnungen		

4.1.6 Vereinfachte Trichterbelastung

Für die folgenden Untersuchungen wird die rotationssymmetrische Belastung zufolge Silofüllung vereinfacht. Die Verteilung des Radialdruckes p_n wird konstant über die Trichterhöhe angenommen. Das selbe gilt für die Wandreibungskräfte p_x , der Reibungskoeffizient μ wird mit $\mu = 0,5$ angenommen. Diese Annahmen geben eine gute Annäherung der Belastungsvorschriften für Silotrichter laut DIN 1055 - Teil 6 (1987).

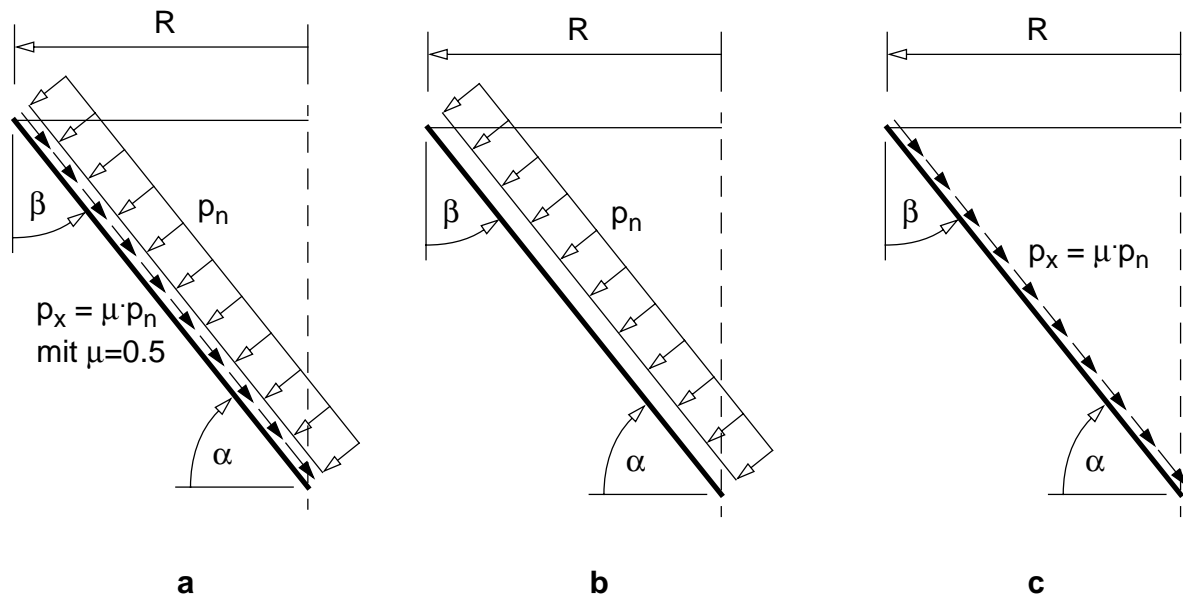


Bild 4-11 Belastung des Trichters — **a.** vereinfachte Trichterbelastung ($p_x + p_n$) und Aufteilung in die **b.** Innendruckbelastung (p_n) und **c.** die Belastung des Trichters durch Wandreibungskräfte (p_x)

4.2 Plastische Grenztragfähigkeit des Trichters bei rotationssymmetrischer Lastabtragung

Die Tragfähigkeit des Trichters wird bei rotationssymmetrischer Lastabtragung bei Vorliegen von Membranrandbedingungen untersucht. Maßgebend ist der maximal beanspruchte obere Rand des Trichters. Die Grundlage zur Bestimmung der Schnittgrößenverteilungen sind die Gleichgewichtsgleichungen der Membranschale.

4.2.1 Gleichgewichtsgleichungen der Membranschale

Im Bild 4-12 sind die am Membranelement wirkenden Membrankräfte und die äußeren Kräfte zur Veranschaulichung dargestellt. Daraus ergeben sich umgekehrt die Gleichgewichtsgleichungen der Membranschale in Gl. (4-1a) bis Gl. (4-1c).

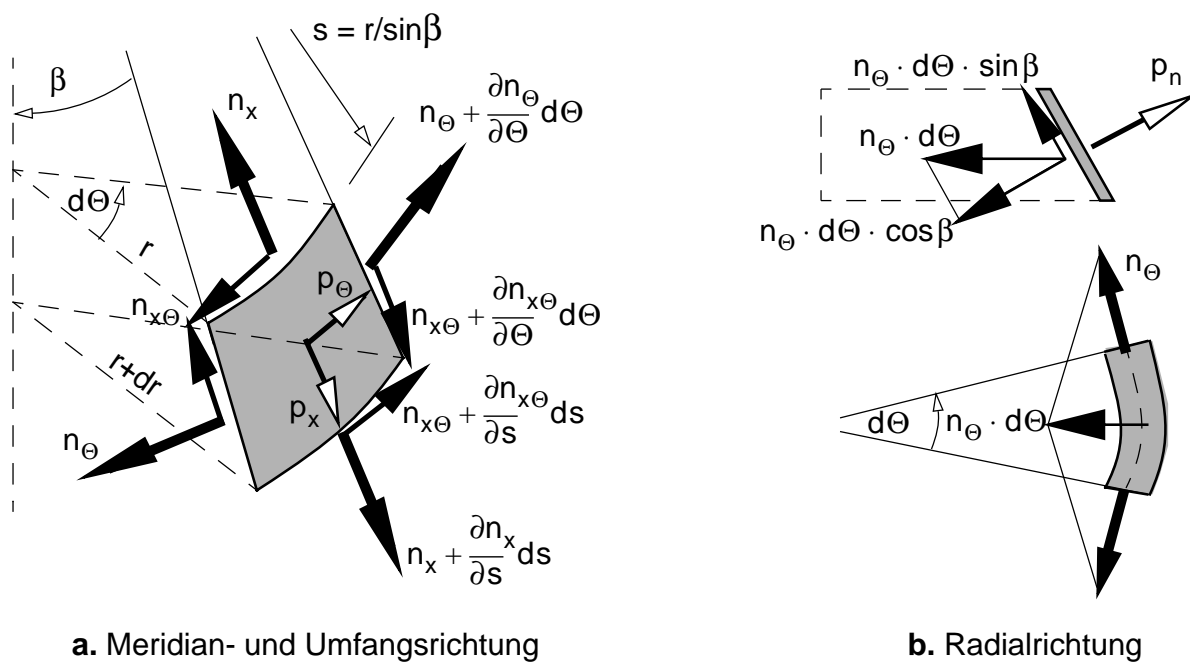


Bild 4-12 Gleichgewichtsbeziehungen am Membranelement

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s \cdot n_x) + \frac{1}{s \cdot \sin\beta} \frac{\partial n_{x\Theta}}{\partial \Theta} - \frac{n_\Theta}{s} + p_x = 0 \quad (4-1a)$$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s \cdot n_{x\Theta}) + \frac{1}{s \cdot \sin\beta} \frac{\partial n_\Theta}{\partial \Theta} + p_\Theta = 0 \quad (4-1b)$$

$$n_\Theta \cdot \cos\beta - p_n \cdot r = 0 \quad (4-1c)$$

4.2.2 Schnittkräfte und Tragfähigkeiten

4.2.2.1 Membranschnittkräfte

Bei rotationssymmetrischer Belastung und der Annahme, daß keine Belastung in Umfangsrichtung ($p_{\Theta} = 0$) vorliegt, verbleiben die Gleichgewichtsgleichungen in Axial- und Radialrichtung der Membranschale in Gl. (4-2a) und Gl. (4-2b).

$$\frac{\partial}{\partial s}(s \cdot n_x) = p_n \cdot s \cdot \tan\beta - p_x \cdot s \tag{4-2a}$$

$$n_{\Theta} = p_n \cdot r / \cos\beta \tag{4-2b}$$

Für die vereinfachte Trichterbelastung entsprechend Kap. 4.1.6 (Bild 4-11) erhält man auf einfache Art und Weise die Membrankräfte des Trichters. In Tab. 4-2 sind die Membrankräfte für den oberen Trichterrand ($s = R / \sin\beta$) wiedergegeben. Dabei werden auch die Kräfte für die Teillastfälle Radialdruck- bzw. Wandreibungsbelastung der Trichterbelastung gesondert behandelt. Für die spätere Tragfähigkeitsermittlung wird auch die, der Vergleichsspannung zuordenbare äquivalente Membrankraft n_{eq} angegeben (siehe Gl. (4-3)).

$$n_{eq} = \sqrt{n_x^2 + n_{\Theta}^2 - n_x \cdot n_{\Theta}} \tag{4-3}$$

Tab. 4-2 Maximale Membranschnittkräfte am oberen Trichterrand

Kraft	Teillastfälle		Gesamtlastfall (Superposition 1 + 2)
	1. Radialdruck	2. Wandreibung	
n_x	$\frac{n_{\Theta}}{2} = p_n \frac{R}{2 \cos\beta}$	$\mu p_n \frac{R}{2 \sin\beta}$	$n_{x, ges} = p_n \frac{R}{\cos\beta} \frac{\mu + \tan\beta}{2 \tan\beta}$
n_{Θ}	$p_n \frac{R}{\cos\beta}$	0	$n_{\Theta, ges} = p_n \frac{R}{\cos\beta} = n_{x, ges} \cdot \frac{2 \tan\beta}{\mu + \tan\beta}$
n_{eq}	$p_n \frac{R}{\cos\beta} \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\mu p_n \frac{R}{2 \sin\beta}$	$n_{eq, ges} = n_{x, ges} \sqrt{1 + \left(\frac{2 \tan\beta}{\mu + \tan\beta}\right)^2} - \frac{2 \tan\beta}{\mu + \tan\beta}$

4.2.2.2 Tragfähigkeiten der Membranschale bei rotationssymmetrischer Lastabtragung

Die Traglast $p_{n, \max}$ der Membranschale ist erreicht, wenn die maßgebende Vergleichsspannung $\sigma_{\text{eq}} = n_{\text{eq}}/t$ die Fließgrenze f_y erreicht:

$$p_{n, \max} = f_y \cdot t / n_{\text{eq}} \quad (4-4)$$

In Tab. 4-3 sind die Traglasten für die Teillastfälle und die vereinfachte Trichterbelastung angegeben. Die zugrundeliegenden Membrankräfte zur Berechnung von n_{eq} sind Tab. 4-2 entnommen.

Tab. 4-3 Tragfähigkeiten der Membranschale

Traglast	Teillastfälle		Gesamtlastfall
	1. Radialdruck	2. Wandreibung	(Superposition 1 + 2)
$p_{n, \max}$	$f_y t \frac{\cos \beta}{R} \frac{2}{\sqrt{3}}$	$f_y t \frac{2\mu \sin \beta}{R}$	$f_y t \frac{\cos \beta}{R} \frac{\frac{n_{\Theta, \text{ges}}}{n_{x, \text{ges}}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_{\Theta, \text{ges}}}{n_{x, \text{ges}}}\right)^2 - \frac{n_{\Theta, \text{ges}}}{n_{x, \text{ges}}}}} \quad \text{mit} \quad \frac{n_{\Theta, \text{ges}}}{n_{x, \text{ges}}} = \frac{2 \tan \beta}{\mu + \tan \beta}$

4.2.2.3 Schnittkräfte im Traglastzustand der Membranschale

Die Membranschnittkräfte $n_{x, \max}$ und $n_{\Theta, \max}$ für den Traglastzustand zugehörig zur Traglast $p_{n, \max}$ sind in Tab. 4-4 zusammengefaßt.

Tab. 4-4 Schnittkräfte der Membranschale im Traglastzustand

Membranschnittkraft	Teillastfälle		Gesamtlastfall
	1. Innendruck	2. Wandreibung	(Superposition 1 + 2)
$\frac{n_{x, \max}}{f_y \cdot t} =$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_{\Theta, \text{ges}}}{n_{x, \text{ges}}}\right)^2 - \frac{n_{\Theta, \text{ges}}}{n_{x, \text{ges}}}}$
$\frac{n_{\Theta, \max}}{f_y \cdot t} =$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{n_{\Theta, \text{ges}}}{n_{x, \text{ges}}} \cdot \frac{n_{x, \max}}{f_y \cdot t}$

Als Randbedingungen liegen Membranrandbedingungen vor. Tatsächlich entsteht am oberen Rand eine Biegestörungszone. Je nach Ausführung des Ringes im Verschneidungsbereich zwischen Schaft und Trichter werden die dort entstehenden Umfangsspannungen die Trichtertragfähigkeit mitbestimmen. Wird der Ring stark genug dimensioniert, so kann die Umfangsspannung am oberen Trichterrand beinahe zu Null werden — der Ring weist keine nennenswerte Radialverschiebung auf und die Umfangsdehnungen am Trichterrand werden quasi zu Null. Der Randbereich wird entlastet, der maßgebende Horizont zur Bestimmung der Tragfähigkeit ist nun in etwa um die Abklinglänge der Biegerandstörung ($L = 2,4\sqrt{Rt/\cos\beta}$) vom oberen Trichterrand entfernt. Dies spiegelt sich in der nachfolgend angegebenen Formel (Gl. (4-5)) im Auftreten des Nennerterms wider.

Rotter und Teng (1989) haben dazu eingehende Untersuchungen angestellt und letztendlich einen erhöhte Schalentragfähigkeit $n_{eq, Rd}$ in Gl. (4-5) in Abhängigkeit der Geometrieparameter (Radius R , Wanddicke t und Trichterneigung β) und des Wandreibungskoeffizienten μ angegeben.

$$\frac{n_{eq, Rd}}{f_y t} = \frac{0,91 + \frac{0,136}{\mu + 1,5}}{1 - \frac{2,4\sqrt{Rt/\cos\beta}}{R/\sin\beta}} \quad (4-5)$$

Der Nenner von Gl. (4-5) spiegelt, wie bereits erwähnt, den Effekt der Biegerandstörung und damit die Erhöhung der Tragfähigkeit wider. Für übliche Trichterabmessungen bedeutet dies eine Tragfähigkeitsgewinn von ca. 5 bis 15%.

Der Zählerterm in Gl. (4-5) hat für den nach DIN 1055 - Teil 6 (1987) anzusetzenden Wandreibungskoeffizienten von $\mu = 0,5$ den Wert von $0,978 \approx 1$.

Belastungsabhängigkeit

Die Trichterbelastung wirkt auf zweierlei Arten, wie in Kap. 4.1.6 dargestellt, auf den Trichter ein. In Bild 4-13 ist das Gleichgewicht am Füllgutkörper des Trichters, bildlich dargestellt durch die Gesamtbelastung P) und durch am Füllgutkörper wirkende Normaldruckkräfte und Meridiankräfte (=Wandreibungskräfte), und die entgegengesetzt gerichtete Kraftwirkung dieser Normaldruckkräfte und Meridiankräfte auf den Trichter dargestellt. Es erfolgt dabei eine Aufteilung der Trichtergesamtbelastung in zwei Grundanteile (siehe auch Kap. 4.1.6):

- Anteil 1 — Trichterlast P_1
Hier stellt sich das Gleichgewicht am Füllgutkörper nur durch die wirkenden Normaldruckkräfte p_n ein. Es liegt somit eine reine Innendruckbelastung des Trichters (Wandreibungskoeffizient $\mu = 0$) vor.
- Anteil 2 — Trichterlast P_2
Hier stellt sich das Gleichgewicht am Füllgutkörper nur durch die wirkenden Meridiankräfte (Reibungskräfte) p_x ein. Es liegt somit eine reine Wandreibungsbelastung des Trichters ($p_n = 0$) vor.

In Bild 4-13 sind weiters die zur Erfüllung des Gleichgewichtes am Trichter notwendigen Meridianrandkräfte n_x bzw. $n_{x,1}$ und $n_{x,2}$ dargestellt.

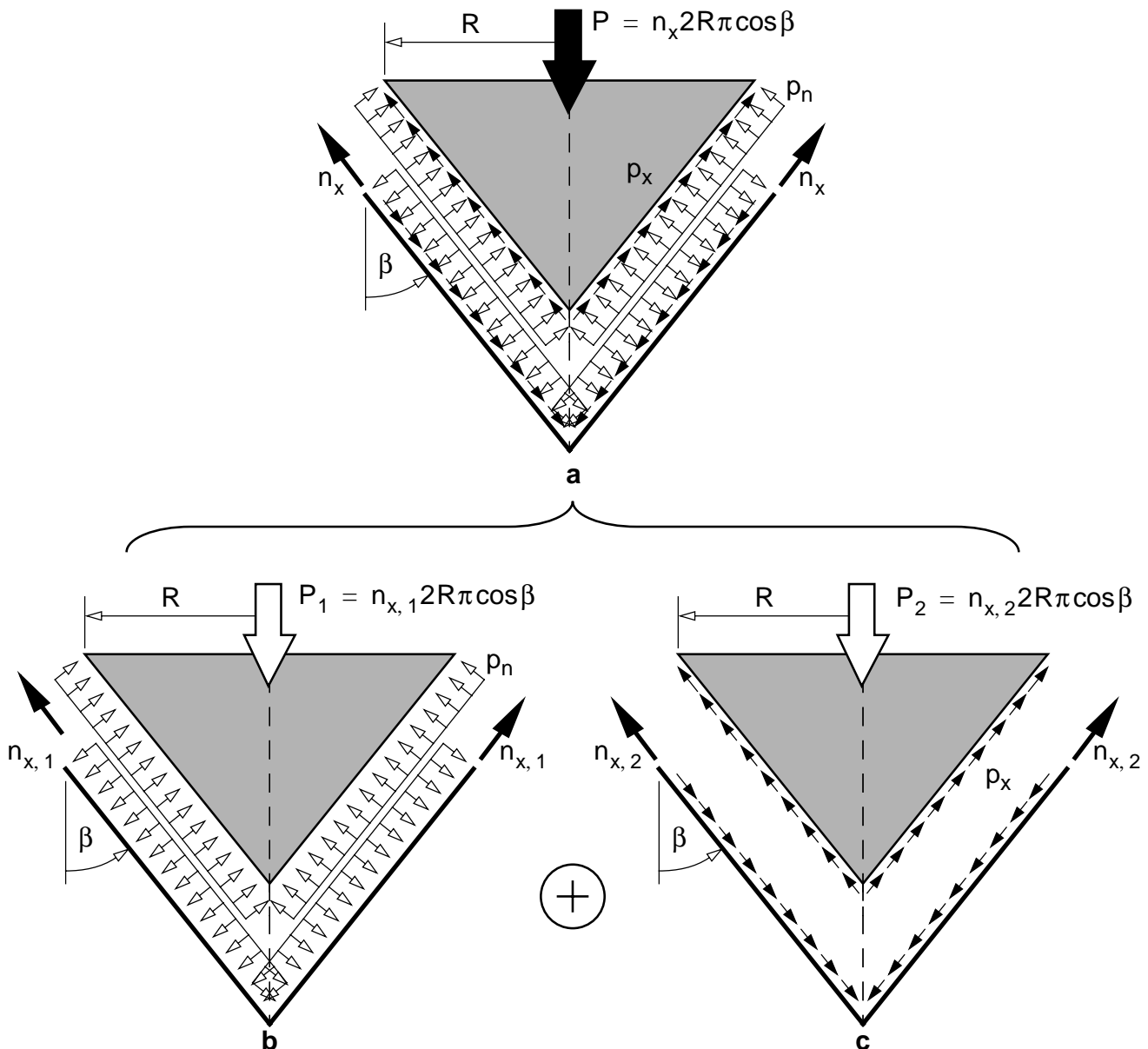


Bild 4-13 Belastung des Trichters — **a.** vereinfachte Trichterbelastung ($p_x + p_n$) und Aufteilung in die **b.** Innendruckbelastung (p_n) und **c.** die Belastung des Trichters durch Wandreibungskräfte (p_x)

Die Belastungsabhängigkeit kann somit auf Basis der in Tab. 4-4 dargestellten Schnittkräfte im Traglastzustand des Trichters dargestellt werden. Als Eingangsparameter dienen der Wandreibungskoeffizient μ und die Neigung β des Trichters.

Die mögliche Trichterbelastung hängt unmittelbar von der Meridiankrafttragfähigkeit ($n_{x, \max}$ im Traglastzustand) ab. Desto mehr die Trichtergesamtbelastung in Reibungskräfte umgesetzt werden kann, desto höher ist die ausnutzbare Meridiankrafttragfähigkeit des Trichters. Primär von Interesse ist somit die Auswirkung des Wandreibungskoeffizienten μ als Belastungsparameter. Die Trichterneigung β ist als funktionsbedingter Parameter zur Gewährleistung des Silobetriebes — schwerkraftbedingte Siloentleerung — anzusehen.

In Bild 4-14.a ist die Membrankraft $n_{x, \max}$ und damit die ausnutzbare Tragfähigkeit des Trichters in Abhängigkeit des kombinierten Parameters $\mu / \tan \beta$ dargestellt.

Signifikant in Bild 4-14.a ist, daß bei kleiner werdendem Wandreibungskoeffizienten μ die ausnutzbare Meridiankrafttragfähigkeit des Trichters immer kleiner wird. Im Grenzfall $\mu = 0$ liegt eine reine Innendruckbelastung des Trichters vor. Entsprechend Tab. 4-4 ist die Meridiankraft halb so groß wie die Umfangsmembrankraft, es können entsprechend dem Von-Mises-Vergleichsspannungskriterium nur 57% ($= 1/\sqrt{3}$) der vollplastischen Meridiantragkraft ausgenutzt werden.

Eine reine Abtragung der Trichterbelastung über Wandreibungskräfte ist ausgenommen bei extrem kohäsiven Füllgutmaterialien nicht möglich. Als praktischer Grenzfall ist in Bild 4-14.a ein Abszissenwert von $\mu/\tan\beta \approx 1$ anzusehen (z.B. $\mu = 0,5$ und $\beta = 26,6^\circ$). Dabei kann die Meridiankrafttragfähigkeit zur Gänze ausgenutzt werden.

Begleitend ist in Bild 4-14.a die zugehörige Umfangsmembrankraft $n_{\Theta, \max}$ (siehe Tab. 4-4) dargestellt. Die Darstellung der jeweils zugehörigen Meridian- und Umfangsmembrankräfte in der Mises-Ellipse in Bild 4-14.b zeigt den praktischen Bereich, der zwischen $n_{\Theta, \max}/n_{x, \max} = 2$ bei $\mu = 0$, also bei reiner Innendruckbelastung, und $n_{\Theta, \max}/n_{x, \max} \approx 1$ liegt.

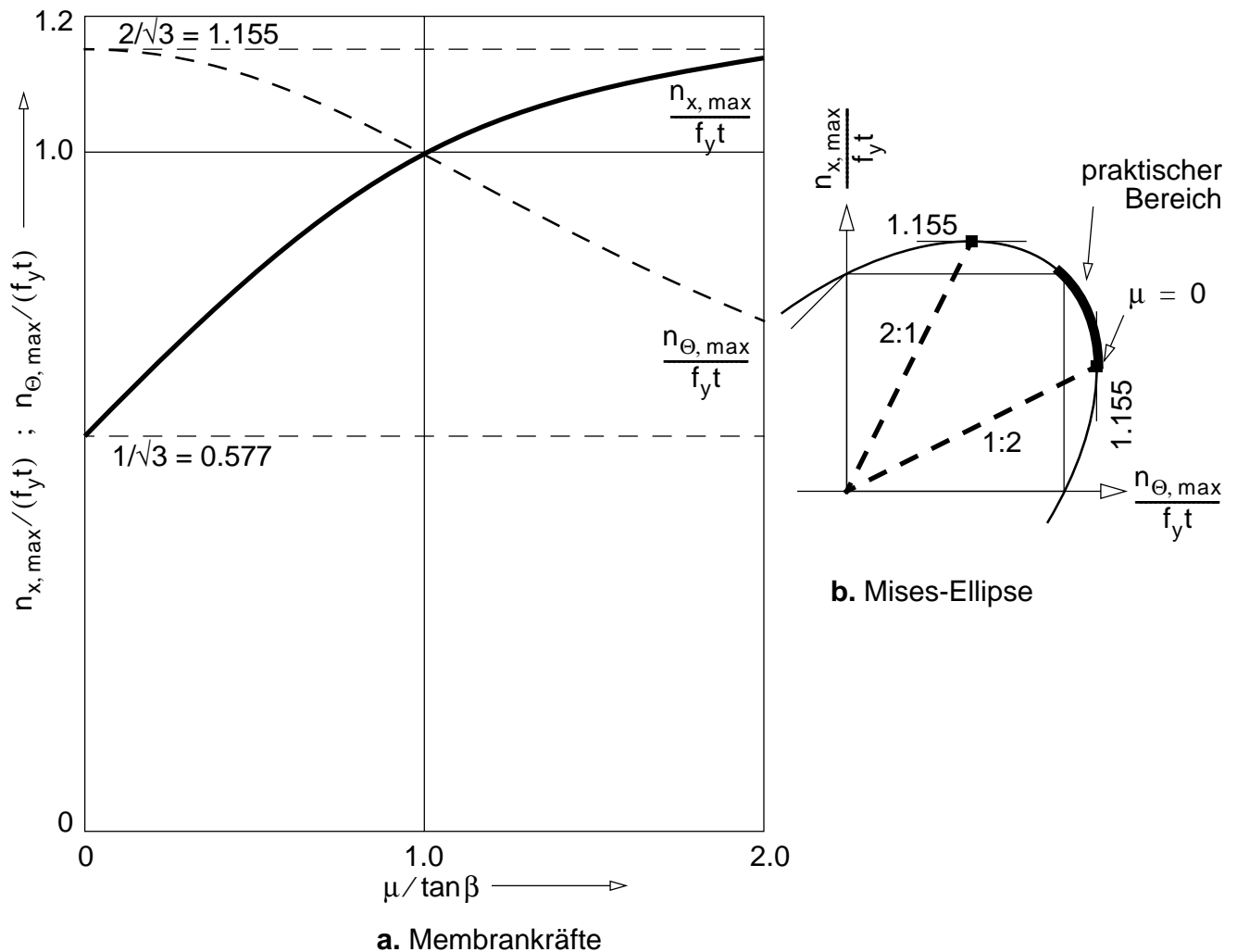


Bild 4-14 Nutzbare Meridiankrafttragfähigkeit $n_{x, \max}$ bei rotationssymmetrischer Lastabtragung in Abhängigkeit des Wandreibungskoeffizienten μ und der Trichterneigung β

4.3 Plastische Grenztragfähigkeit des Trichters bei lokaler Lastabtragung

Für die lokale Lastabtragung des Trichters werden mithilfe von materiell nichtlinearen FE-Berechnungen die plastischen Tragfähigkeiten für folgende lokale Auflagerungen bestimmt:

- lokale Auflagerung in Meridianrichtung (=Schubkraftlagerung bzw. Schottblechlagerung)
- lokale Auflagerung innerhalb einer endlichen Lagerbreite des oberen Trichterrandes (=Meridiannormalkraftlagerung bzw. Randlagerung)

Es wird ein ideal elasto-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die Materialparameter in Bild 4-15 entsprechen jenen von Baustahl St 37.

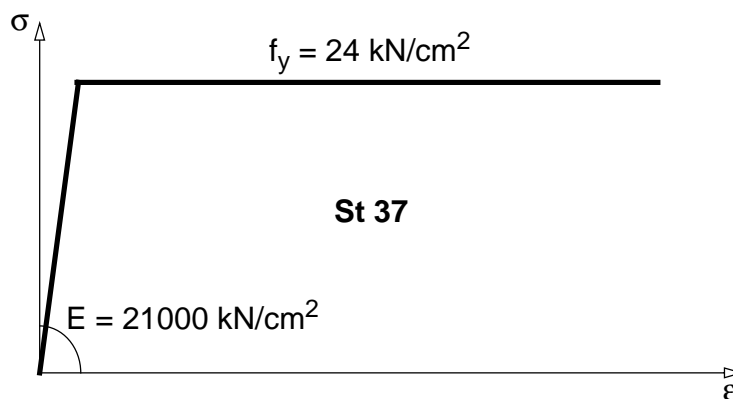


Bild 4-15 Ideal elasto-plastisches Materialverhalten

Die lokale Lastabtragung wird alleine wirkend und in Interaktion mit der rotationssymmetrischen Lastabtragung (globale Auflagerung des Trichters) untersucht. Die Durchführung der materiell nichtlinearen FE-Berechnungen (MNA) mithilfe des FE-Programmes ABAQUS (1997) erfolgt dabei in zwei Schritten:

- Schritt 1 — Aufbringen der Membranbelastung mit dem Ausnutzungsfaktor Λ_1 der Membrantraglast. Am Rechenmodell liegen nur rotationssymmetrische Membranrandbedingungen vor.
- Schritt 2 — Modifikation der Randbedingungen bei starrer Auflagerung im Lagerbereich bzw. bei unendlich nachgiebiger Auflagerung zusätzliches Aufbringen der lokalen Lagerkräfte des Trichters.

Diese Berechnungen setzen voraus, daß die axialsymmetrische Lagerung (auf der sicheren Seite) vereinfachend unendlich nachgiebig ist und daher nur über einen Lastansatz realisierbar ist.

4.3.1 Berechnungsmodell

Die materiell nichtlinearen Berechnungen (MNA) und später die linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) in Kap. 4.5 werden an folgendem Berechnungsmodell (Bild 4-17) durchgeführt. Es liegen dabei folgende Geometriedaten zugrunde:

- Radius $R = 500$ cm
- Trichterneigung $\beta = 30^\circ$
- Radius-Wanddickenverhältnis $R/t = 500$
- 4 Schottblechlagerungen ($n = 4$)
- Lagerlängen $d_S/L = 0, 10/0, 20/0, 30/0, 40/0, 50$ der lokalen Schubkraftlagerung (=Schottblechlagerung)
- Lagerbreite $d/R = 0, 20$ der lokalen Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung)

Die Berechnungen werden aufgrund der vorhandenen Symmetriebedingungen (4 Auflagermeridiane) an einem 1/8-Ausschnitt des Trichters in Bild 4-17 durchgeführt. Am oberen Rand des Trichters liegt eine Membranrandbedingung vor. Der untere Trichterradius beträgt $R_1/R = 0,04$. Als Belastung wirkt die vereinfachte Trichterbelastung entsprechend Kap. 4.1.6.

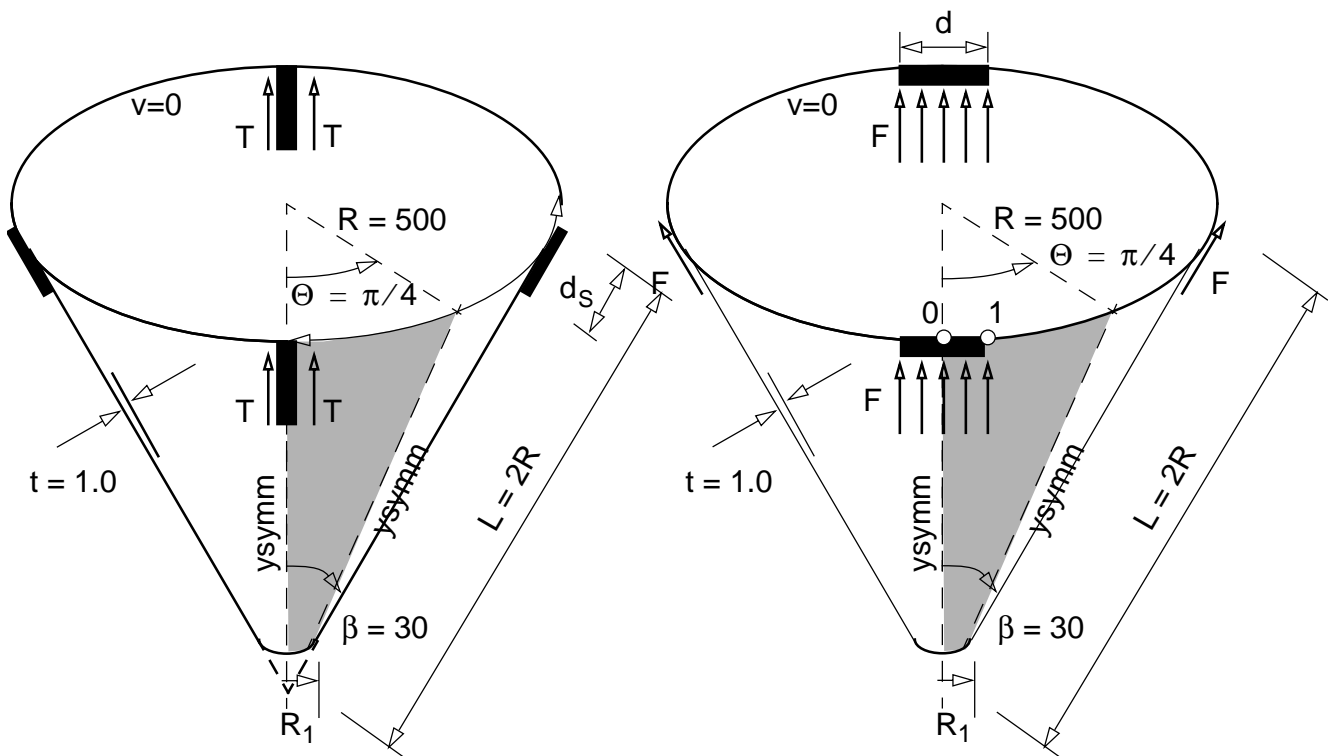


Bild 4-16 Berechnungsmodell und lokale Auflagerung des Trichters für **a.** Schubkraftlagerung und **b.** Meridiannormalkraftlagerung

4.3.2 Lokale Auflagerung in Meridianrichtung (=Schubkraftlagerung)

4.3.2.1 Auflagerungsbedingungen

Die lokale Auflagerung entlang mehrerer Meridiane (=Schubkraftlagerung) am Trichter bedingt resultierende Lagerkräfte T entlang der Lagerungslänge d_s . Je diskreter Auflagerung tritt ein Paar dieser Kräfte auf. Am oberen Trichterrand liegt für die isolierte Betrachtung des Trichters eine Membranrandbedingung $v = 0$ vor.

Bei den Auflagerungsbedingungen des Trichters in Bild 4-17 werden zwei Extremfälle untersucht:

- unendlich nachgiebiges (flexibles) Schottblech durch die kräftemäßige Einleitung der Auflagerkraft mit konstant verteilten Schubkräften in den Trichter
- starres (rigides) Schottblech durch die Verhinderung aller Verschiebungen entlang der lokalen Auflagerung

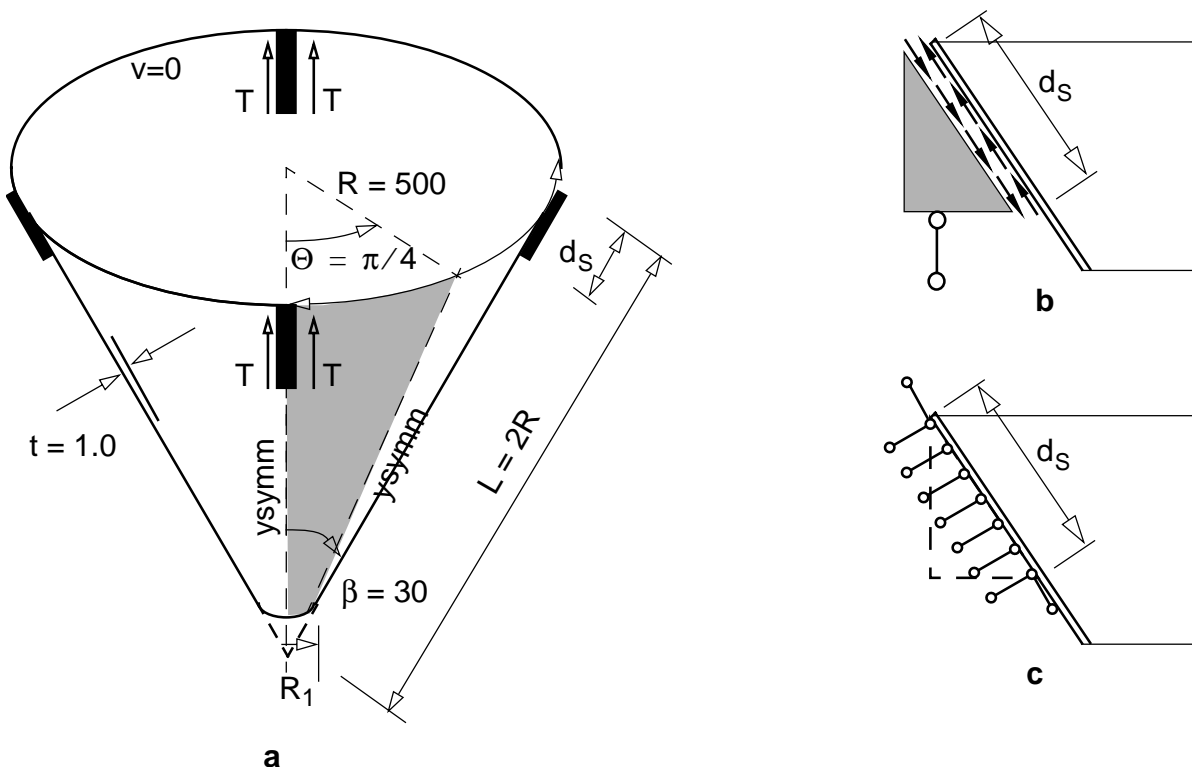


Bild 4-17 Lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung (=Schubkraftlagerung) —
a. Berechnungsmodell, **b.** unendlich nachgiebige Lagerung durch die Vorgabe verteilter Lagerkräfte und **c.** unendlich starre Lagerung durch die Vorgabe von Verschiebungsrandbedingungen

4.3.2.2 Parametervariationen

Die Lastabtragung wird für folgende Fälle untersucht:

- lokale Lastabtragung alleine durch die Auflagerung am Schottblech in Abhängigkeit der Lagerungslänge d_S
- Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung des Trichters (Ausnutzungsfaktor $\Lambda_1 = n_x/n_{x, \max}$)

Den Untersuchungen liegen diese Lagerlängen zugrunde:

- $d_S/L = 0, 10/0, 20/0, 30/0, 40/0, 50$

4.3.2.3 Plastische Grenztragfähigkeit bei lokaler Lastabtragung

MNA-Berechnungsergebnisse für starre und flexible Auflagerung

Für die alleinige lokale Lastabtragung werden die Tragfähigkeiten in Abhängigkeit der Lagerlänge d_S/L mittels materiell nichtlinearen FE-Berechnungen (ABAQUS (1997)) ermittelt.

In den folgenden Abbildungen — Bild 4-18 bis Bild 4-20 — werden einzelne Ergebnisse für die Lagerlänge $d_S/L = 0, 10$ bei starrer Auflagerung (R) (Verhinderung der Meridianverschiebungen) dargestellt:

- Membrankräfte im Gebrauchslastzustand (SLS)
- Membrankräfte im Traglastzustand (ULS)
- Lastabhängigkeit der plastischen Dehnungen der maximal beanspruchten Stelle des Trichters

Als Belastung liegt wiederum die vereinfachte Trichterbelastung mit konstanter Radialdruck- und Wandreibungsbelastung entsprechend Kap. 4.1.6 vor.

Die Darstellung der Membrankräfte erfolgt für den Gebrauchslastzustand (SLS) und den Traglastzustand (ULS). Der Gebrauchslastzustand ergibt sich bei einem angenommenen Lastsicherheitsbeiwert von $\gamma_F = 1,5$ aus der plastischen Tragfähigkeit (Traglast) des Trichters.

In Bild 4-18 und Bild 4-19 sind die Membrankräfte n_x , n_θ und $n_{x\theta}$ entlang des Auflagermeridians dargestellt. Zusätzlich ist die der Vergleichsspannung σ_{eq} zuzuordnende Membranvergleichskraft n_{eq} dargestellt. In Bild 4-18 und Bild 4-19 zeigt sich die Ausbreitung der plastischen Zone im Trichter ausgehend vom unteren Ende der lokalen Schottblechlagerung mit steigender Belastung. Die Lastabtragung dominieren die Schubkräfte $n_{x\theta}$. Die Meridiankräfte n_x nähern sich erst in einiger Entfernung vom unteren Lagerbereich jenen der elastischen Berechnung, im Lagerbereich stellen sie sich entsprechend der vorhandenen Schubkräfte ein.

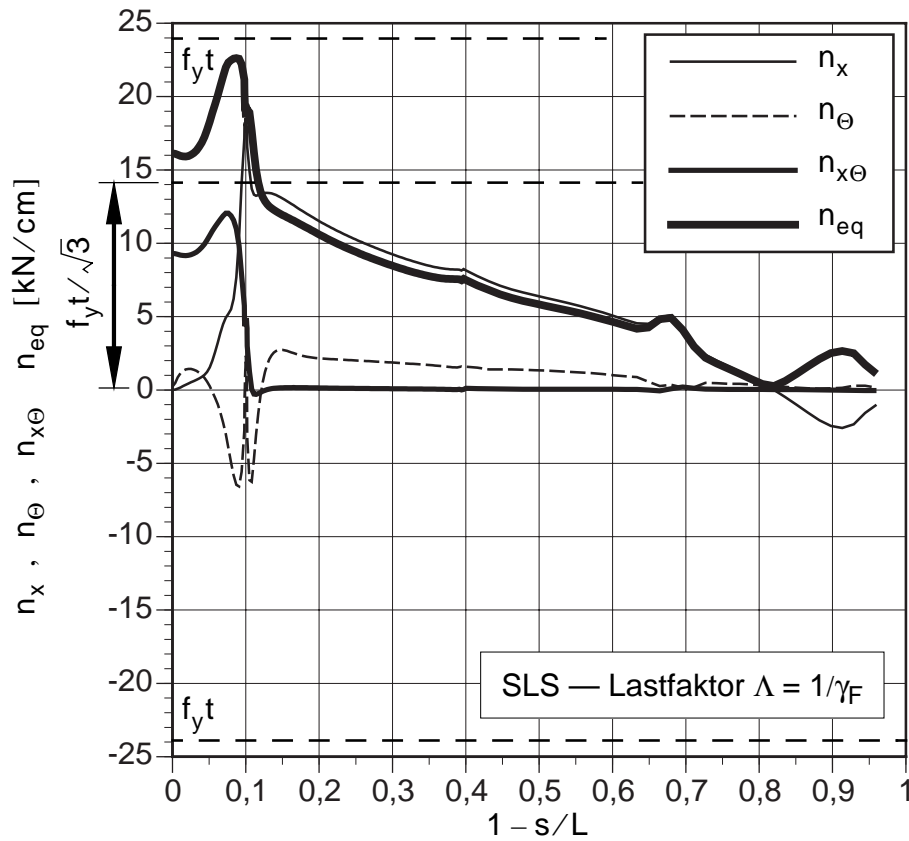


Bild 4-18 Lokale Auflagerung in Meridianrichtung — Membrankräfte entlang des Lagermeridians für den Gebrauchslastzustand (SLS=ULS/ γ_F) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d_S/L = 0,10$

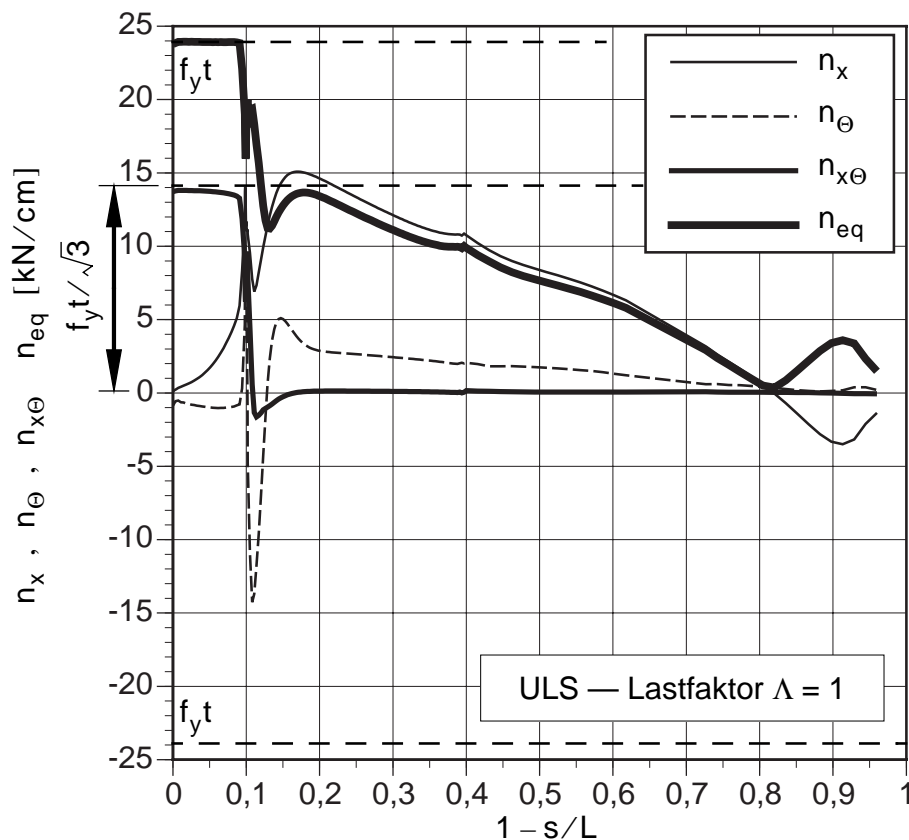


Bild 4-19 Lokale Auflagerung in Meridianrichtung — Membrankräfte entlang des Lagermeridians für den Traglastzustand (ULS) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d_S/L = 0,10$

Die lastabhängige Entwicklung der plastischen Dehnungen an der Schaleninnen- und Schalenaußenseite für den maximal beanspruchten Punkt ist in Bild 4-20 dargestellt.

Die größten plastischen Dehnungen treten knapp unterhalb der Auflagerung an der Schaleninnenseite auf. Die plastischen Dehnungen entstehen durch die konzentrierten Längsspannungen und zusätzliche lokale Biegewirkungen am unteren Rand der starren Auflagerung des Trichters über dem Schottblech.

Im Gebrauchslastzustand (SLS) beträgt die maximale Dehnung $\varepsilon_{peq} = 2,4\%$. Die plastischen Dehnungen überschreiten eine Referenzdehnung von $\varepsilon_{peq} = 0,4\%$ in einem Bereich von 2×8 cm. Der Bereich in dem die fünffache Fließdehnung ($\varepsilon_{peq} = 0,57\%$) überschritten wird hat eine Größe von ca. 2×6 cm.

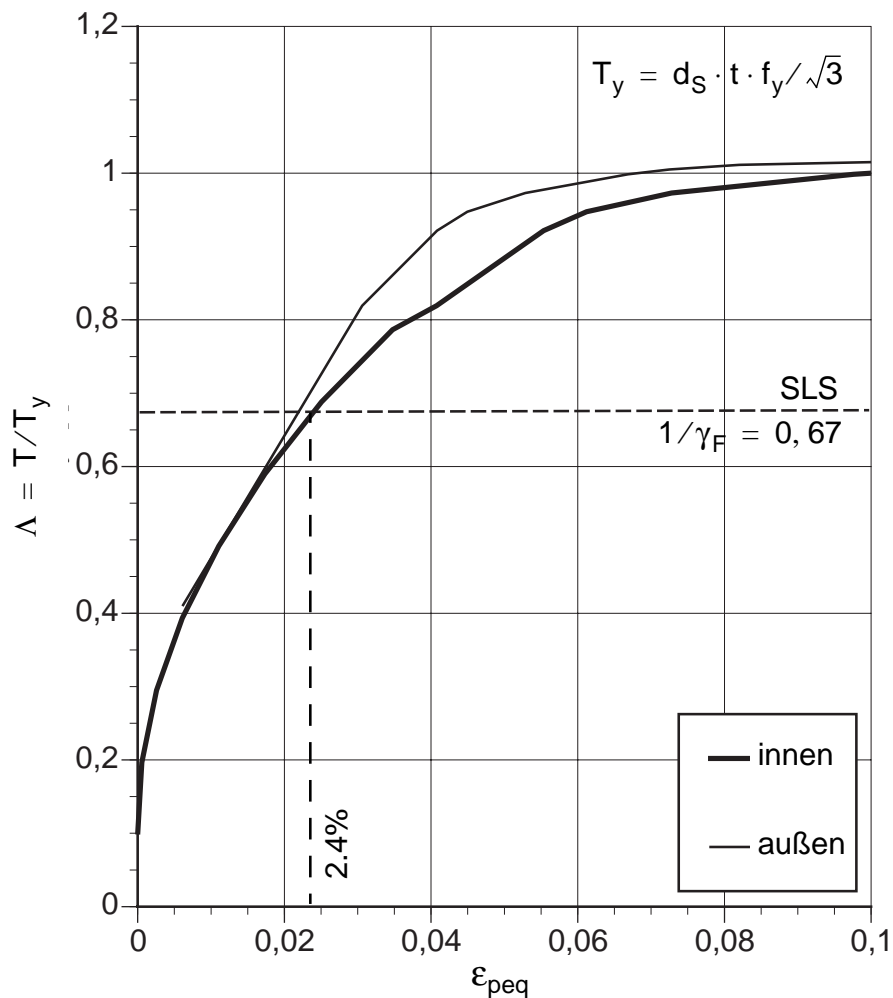


Bild 4-20 Last-Dehnungsdiagramm — plastische äquivalente Dehnungen p_{eq} für die Schaleninnen- und -außenseite am unteren Ende der Schottblechlagerung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d_s/L = 0,10$

Schubkraftverlauf im Lagermeridian in Abhängigkeit der Lagerlänge

Der Verlauf der Schubkräfte $n_{x\Theta}$ im Lagermeridian — unmittelbar über dem Schottblechansatz — ist in Abhängigkeit der Lagerlänge in Bild 4-21 dargestellt. Mit zunehmender Länge d_S kann die Schubtragfähigkeit des Schottblech-Trichter-Anschlusses in einem zunehmenden Bereich — bedingt durch die Interaktion mit Meridian- und Umfangskräften im Trichter — nicht mehr zur Gänze ausgenutzt werden.

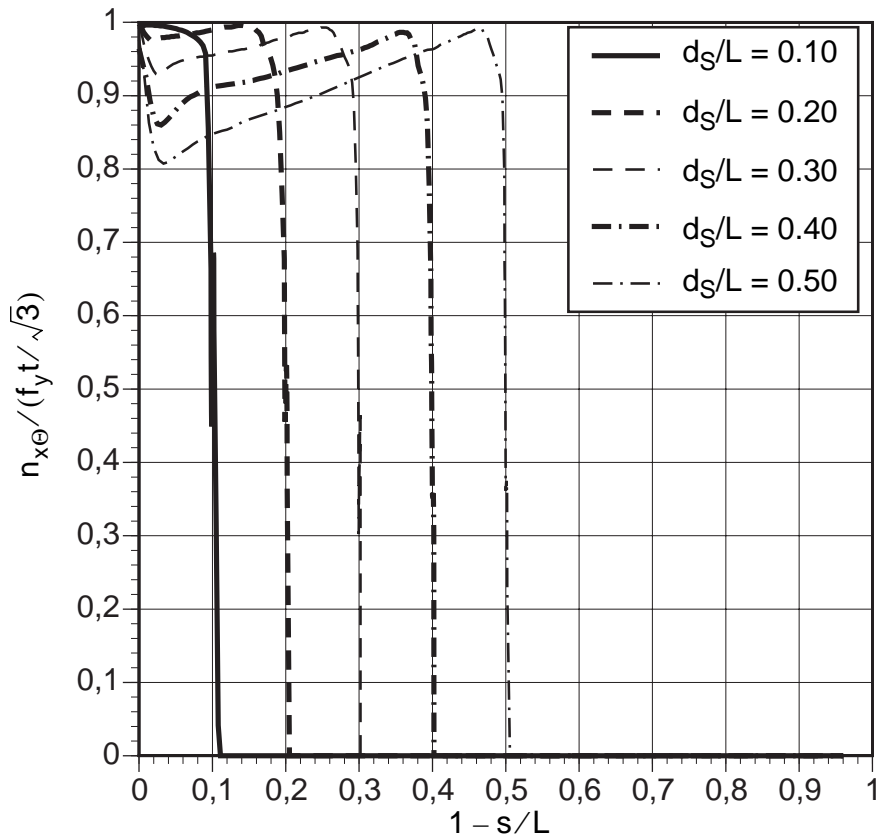


Bild 4-21 Lokale Auflagerung in Meridianrichtung (=Schubkraftlagerung) — Verlauf der Schubkräfte $n_{x\Theta}$ entlang des Auflagermeridianes in Abhängigkeit der Lagerlänge d_S für $R/t = 500$ und $\beta = 30^\circ$ bei Erreichen der plastischen Grenztragfähigkeit (ULS=Traglastzustand)

Die resultierende plastische Grenztragfähigkeit der lokalen Auflagerung in Meridianrichtung (=Schottblechlagerung) ergibt sich in Gl. (4-6) durch die Integration der Schubkräfte $n_{x\Theta}$ entlang der Lagerlänge.

$$T = \int_0^{d_S} n_{x\Theta} \cdot ds \quad (4-6)$$

Als Bezugsgröße für die Darstellung der Abhängigkeit von der Lagerlänge d_S in Bild 4-22 dient die jeweilige plastische Tragfähigkeit der Schottblechlagerung in Gl. (4-7).

$$T_y = d_S t \cdot f_y / \sqrt{3} \quad (4-7)$$

In Bild 4-22 sind die plastischen Tragfähigkeiten für starre (R=rigid) bzw. nachgiebige Auflagerung (F=flexible) des Trichters dargestellt. Dabei spiegelt sich der Verlauf der Membranschubkräfte von Bild 4-21 entsprechend wider. Bei starrer Auflagerung erzielt man durch Umlagerungsmöglichkeiten innerhalb des Lagerbereiches erwartungsgemäß höhere Tragfähigkeiten. Bei nachgiebiger Auflagerung, also durch die Vorgabe von konstant verteilten Lagerkräften ist die plastische Tragfähigkeit durch den stärksten beanspruchten Punkt im Lagerbereich limitiert.

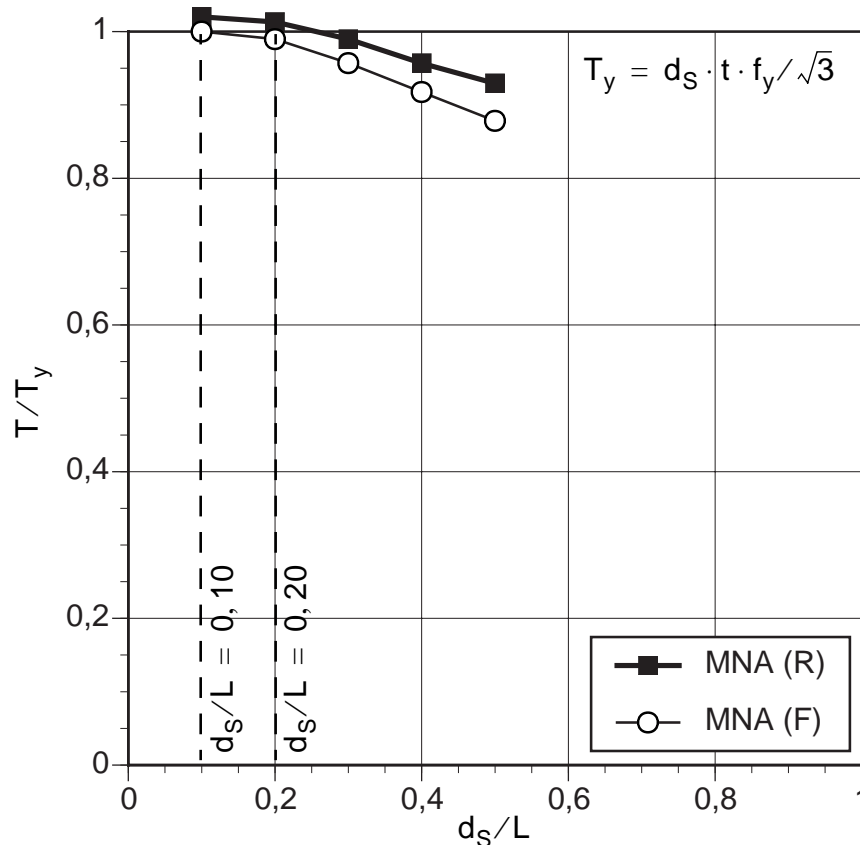


Bild 4-22 Lokale Auflagerung in Meridianrichtung — Tragfähigkeit des Trichters bei lokaler Lastabtragung ($\Lambda_1 = 0$) in Meridianrichtung bei starrer (R) und unendlich nachgiebiger (F) Schottblechlagerung für $R/t = 500$ und $\beta = 30^\circ$

4.3.2.4 Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung

In Bild 4-23 sind die Ergebnisse der materiell nichtlinearen Berechnung bei der Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung des Trichters dargestellt. Als Lagerungsbedingung wird eine unendlich starre Auflagerung über den Schottblechen vorausgesetzt.

Dabei zeigt sich, daß mit zunehmender rotationssymmetrischer Lastabtragung (Ausnutzungsfaktor $\Lambda_1 = n_x/n_{x, \max}$) die mögliche lokale Lastabtragung der Schubkraftlagerung des Trichters abnimmt.

Dies begründet sich darauf, daß die rotationssymmetrische Lastabtragung bereits einen Teil der Tragfähigkeit des Trichters aufzehrt (Ausnutzungsfaktor Λ_1 in Bild 4-23). Für die lokale Lastabtragung

bei Schubkraftlagerung verbleibt somit die reduzierte Fließgrenze $f_{y,red}$ (Gl. (4-8a)), folglich kann damit die reduzierte Tragfähigkeit der lokalen Auflagerung in Meridianrichtung (Gl. (4-8b)) approximativ berechnet werden.

Weitere Betrachtungen werden dazu in Kap. 4.4.1 angestellt.

$$f_{y,red} = f_y \cdot \sqrt{1 - \Lambda_1^2} \quad \text{mit } \Lambda_1 = \frac{n_{x,axialsymmetrisch}}{n_{x,max}} \quad (4-8a)$$

$$T = T_y \cdot \sqrt{1 - \Lambda_1^2} = (d_S t \cdot f_y / \sqrt{3}) \cdot \sqrt{1 - \Lambda_1^2} \quad (4-8b)$$

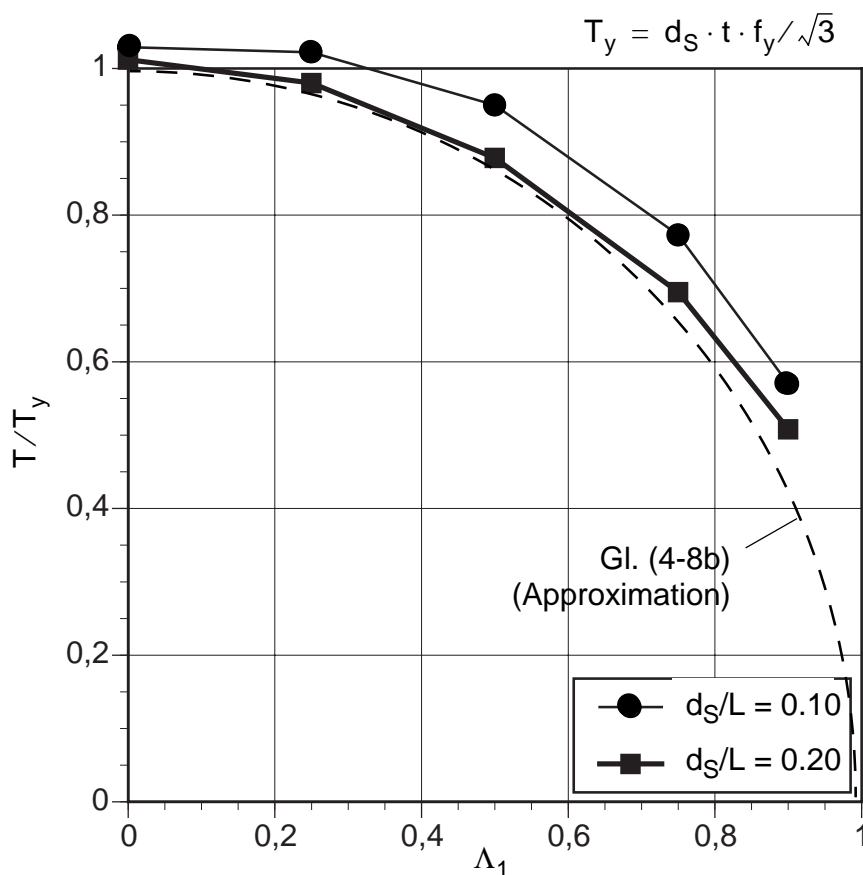


Bild 4-23 Lokale Auflagerung in Meridianrichtung — resultierende Lagerkraft T bei Interaktion von rotationssymmetrischer Lastabtragung und lokaler Lastabtragung bei starrer Auflagerung in Abhängigkeit der Lagerlänge d_S/L für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$

4.3.3 Lokale Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung)

4.3.3.1 Auflagerungsbedingungen

Die lokale Auflagerung an mehreren Meridianen innerhalb der Lagerbreite d bedingt resultierende in Meridianrichtung wirkende Lagerkräfte F innerhalb der Lagerbreite d . Am oberen Trichterrand liegt wie bei der Schubkraftlagerung die Membranrandbedingung $v = 0$ vor.

Für die Trichterauflagerungsbedingungen in Bild 4-24 werden wieder zwei Extremfälle untersucht:

- Eine unendlich nachgiebige (flexible) Meridiannormalkraftlagerung stellt die Vorgabe von konstant verteilten Lagerkräften dar.
- Eine starre (rigide) Auflagerung stellt die Behinderung der Meridianverschiebungen innerhalb der Lagerbreite d dar.

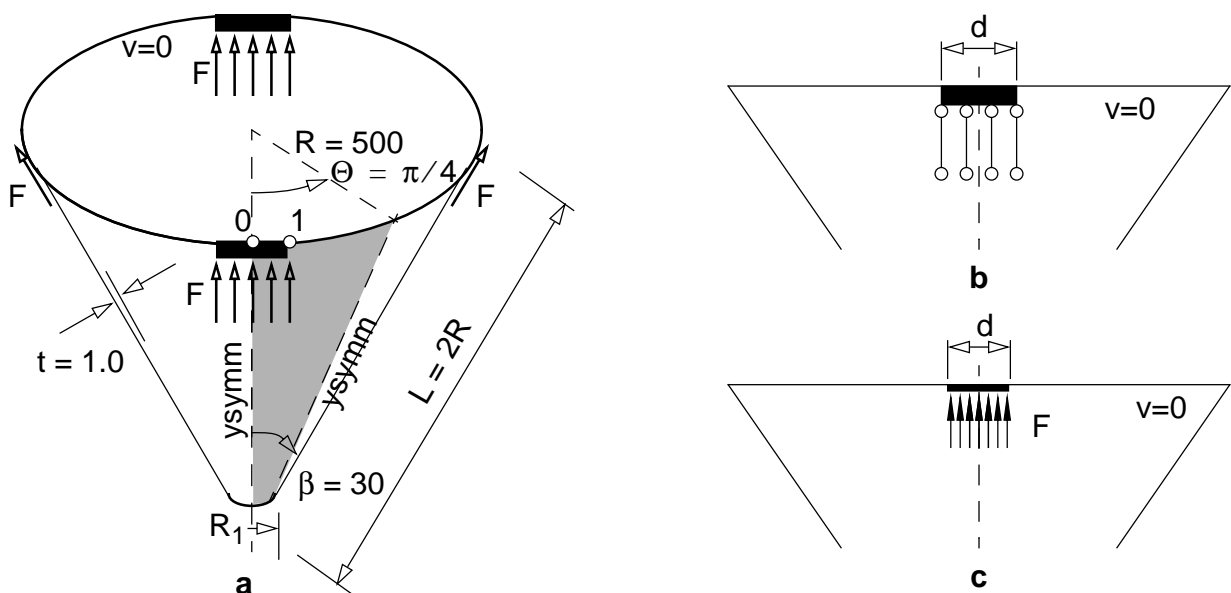


Bild 4-24 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — **a.** Berechnungsmodell und 1/8-Berechnungsausschnitt, **b.** starre (rigide - R) und **c.** unendlich nachgiebige (flexible — F) Auflagerung

4.3.3.2 Parametervariationen

Zur Ermittlung der plastischen Grenztragfähigkeit des Trichters bei lokaler Meridiannormalkraftlagerung werden materiell nichtlineare FE-Berechnungen (MNA) für folgende Fälle durchgeführt:

- alleinige lokale Lastabtragung der Meridiannormalkraftlagerung (aktuelle Lagerbreite d)
- bei Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung untersucht.

Den Untersuchungen liegt eine Lagerbreite von $d/R = 0,20$ zugrunde.

4.3.3.3 Plastische Tragfähigkeit bei lokaler Lastabtragung

Ergebnisse für starre Meridiannormalkraftlagerung

In den folgenden Abbildungen in Bild 4-26 bis Bild 4-30 werden einzelne Ergebnisse für den Fall $d/R = 0,20$ bei starrer Auflagerung (R) dargestellt:

- Membrankräfte im Gebrauchslastzustand (SLS)
- Membrankräfte im Traglastzustand (ULS)
- Lastabhängigkeit der plastischen Dehnungen für zwei ausgewählte Punkte der Lagerfläche

Als Belastung liegt wiederum die vereinfachte Trichterbelastung entsprechend Kap. 4.1.6 vor.

In Bild 4-26 ist der Verlauf der Membrankräfte n_x , n_θ und $n_{x\theta}$ bzw. der zur Vergleichsspannung zuordenbaren Membrankraft n_{eq} im Gebrauchslastzustand entlang des oberen Trichterrandes dargestellt. Die plastische Tragfähigkeit des Trichters ist noch nicht erschöpft, die Membrankraft n_x erreicht nur in einem Viertel der Lagerbreite d die Fließgrenze. Die Membranschubkräfte $n_{x\theta}$ sind innerhalb der Lagerbreite nahezu Null, unmittelbar am Auflagerungsrand erreichen sie ein Maximum. Die Umfangsmembrankräfte n_θ stellen sich im maximal beanspruchten Bereich entsprechend Bild 4-25 mit $n_x/2$ ein.

In Meridianrichtung (Bild 4-27) nehmen die Meridiankräfte n_x , Schubkräfte $n_{x\theta}$ und die Umfangskräfte n_θ rasch ab. Der maximal beanspruchte Bereich ist der Trichterrand innerhalb der Lagerbreite d . Die Ausbildung eines plastischen Bereiches erfolgt, wie aus Bild 4-27 bzw. Bild 4-29 ersichtlich, in einem kleinen Bereich.

In Bild 4-28 ist der Verlauf der Membrankräfte n_x , n_θ und $n_{x\theta}$ bzw. n_{eq} entlang des oberen Trichterrandes für den Traglastzustand (=Erreichen der plastischen Tragfähigkeit) dargestellt. Die Meridiankraft n_x erreicht innerhalb der Lagerbreite d den maximal möglichen Wert von $1,155 \cdot f_y t$ entsprechend des Mises-Vergleichsspannungskriteriums (siehe Bild 4-25). In Bild 4-29 hat sich der plastische Bereich in Meridianrichtung gegenüber dem Gebrauchslastzustand etwas ausgedehnt, verglichen mit der Länge des Trichters stellt dieser aber einen kleinen Bereich dar.

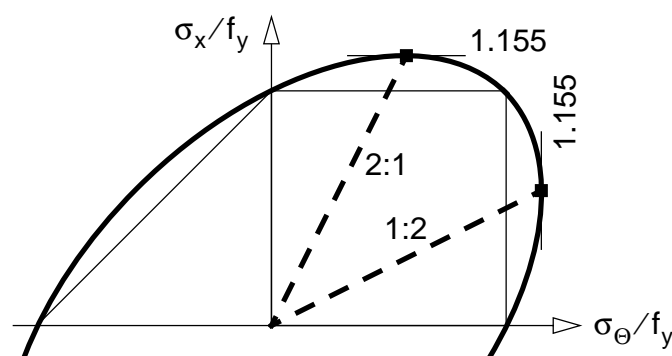


Bild 4-25 Maxima des Mises-Vergleichsspannungskriteriums

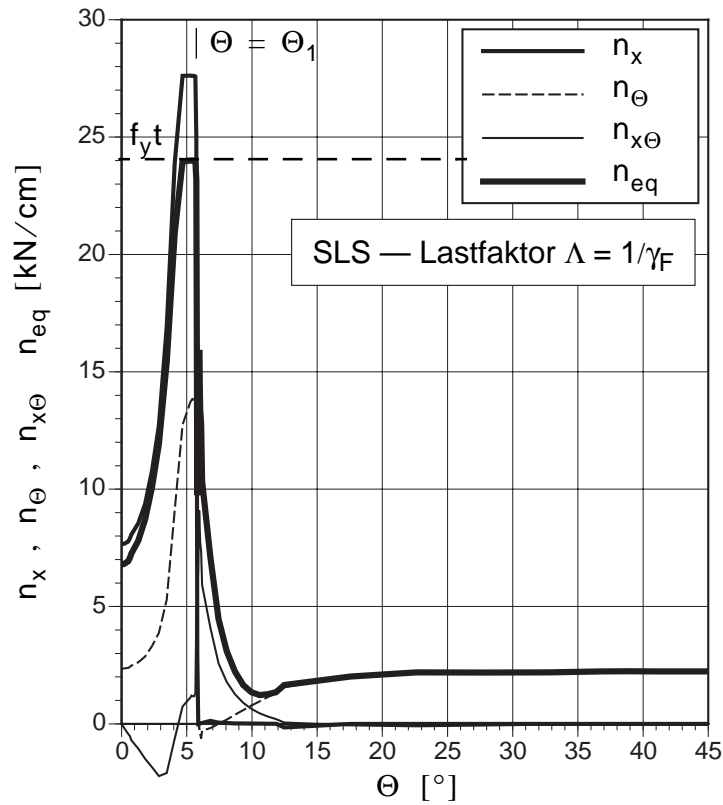


Bild 4-26 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — Membrankräfte in Umfangsrichtung im Gebrauchslastzustand (SLS) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

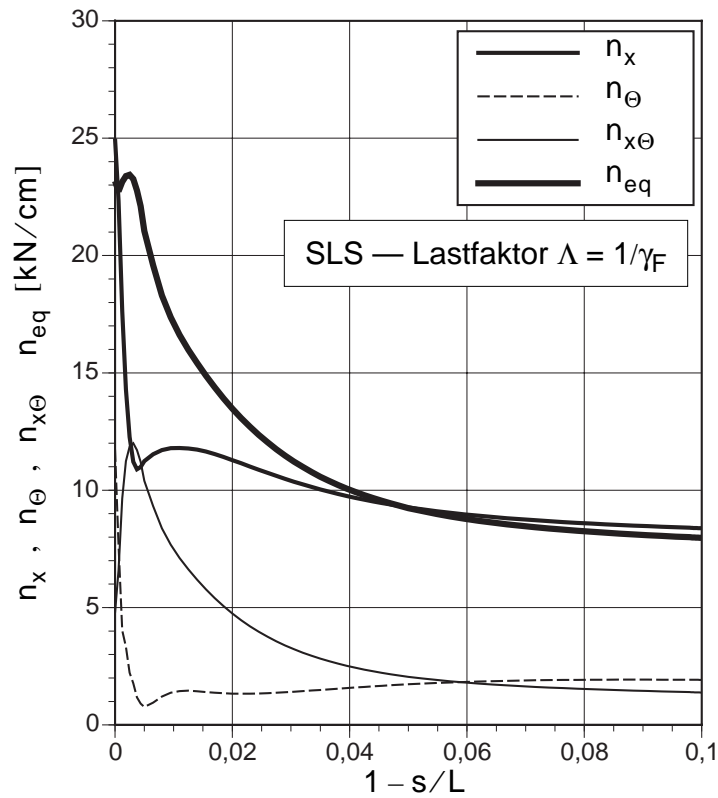


Bild 4-27 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — Membrankräfte im Gebrauchslastzustand (SLS) in Meridianrichtung am Lagerrand $\Theta = \Theta_1$ im mittelbaren Lagerbereich für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

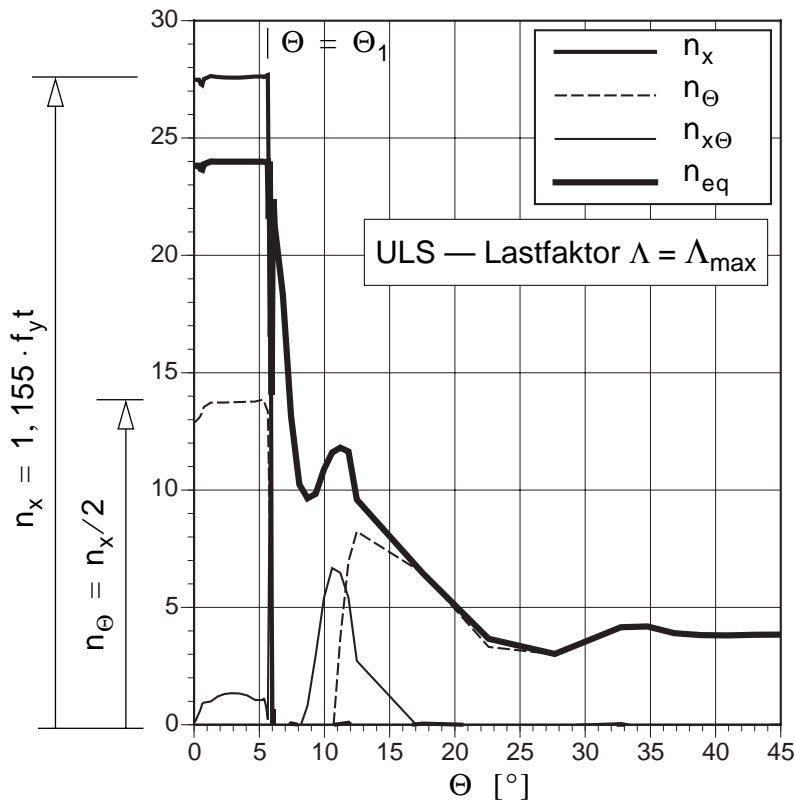


Bild 4-28 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — Membrankräfte in Umfangsrichtung im Traglastzustand (ULS) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

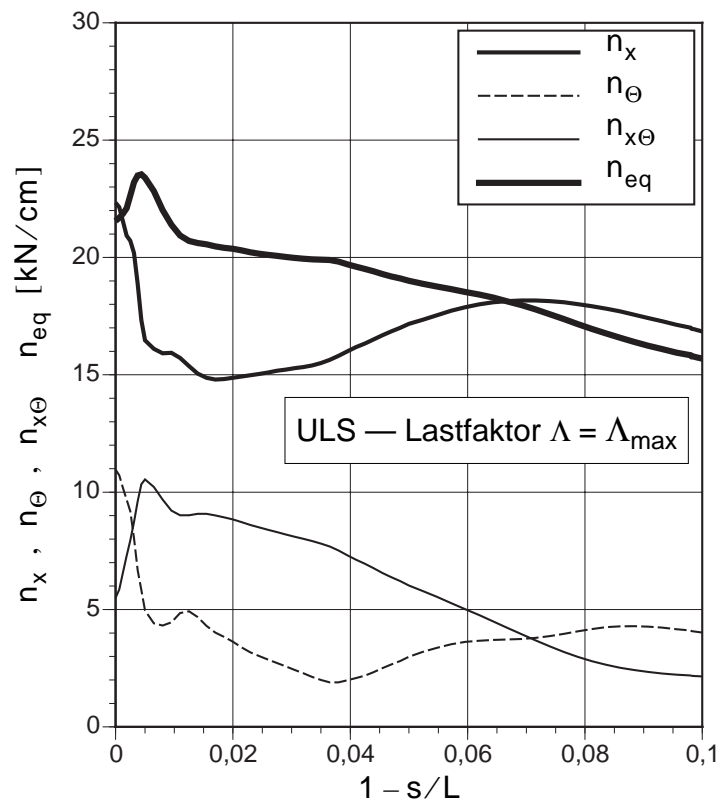


Bild 4-29 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — Membrankräfte im Traglastzustand (ULS) in Meridi-anrichtung (Lagerand $\Theta = \Theta_1$) im mittelbaren Lagerbereich für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

Bild 4-30 zeigt die Lastabhängigkeit der maximal auftretenden plastischen äquivalenten Dehnungen für die Lagermitte bzw. den Lagerrand an der maßgebend beanspruchten Schaleninnenseite. Die plastischen Dehnungen ε_{peq} erreichen ihre Maximalwerte an den Lagerrändern.

Im Gebrauchslastzustand (SLS=ULS/ γ_F) wird ein Maximalwert von $\varepsilon_{peq} = 3,2\%$, der nur punktuell auftritt, erreicht. Im Großteil der Auflagerung bleibt die plastische Dehnung unter $0,2\%$. Eine plastische Dehnung von $0,4\%$ wird in einem Bereich von $2t$ vom oberen Tricherrand überschritten.

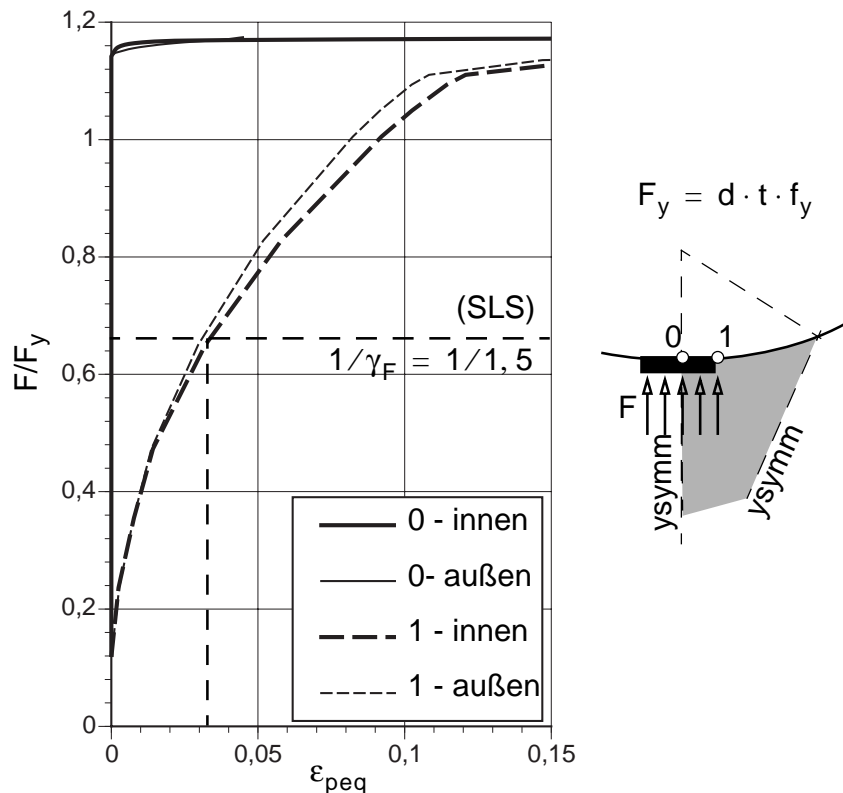


Bild 4-30 Last-Dehnungsdiagramm — plastische äquivalente Dehnungen in Lagermitte (0) und am Lagerrand (1) an Schaleninnen- bzw. -außenseite für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

4.3.3.4 Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung

Materiell nichtlineare FE-Berechnungen

In Bild 4-31 sind die Ergebnisse der materiell nichtlinearen Berechnung bei der Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung des Trichters dargestellt. Als Lagerungsbedingung wird eine unendlich starre Auflagerung des Trichters innerhalb der Lagerbreite d vorausgesetzt.

Dabei zeigt sich, wie schon bei der Schubkraftlagerung des Trichters, daß mit zunehmender rotationssymmetrischer Lastabtragung (Ausnutzungsfaktor $\Lambda_1 = n_x/n_{x,max}$) die mögliche lokale Lastabtragung der Schubkraftlagerung des Trichters abnimmt.

Bemessungsformel

Durch die rotationssymmetrische Lastabtragung wird bereits ein Teil (Ausnutzungsfaktor Λ_1) der Trichtertragfähigkeit aufgezehrt. Für die lokale Lastabtragung verbleibt somit, wie bereits für die lokale Auflagerung in Meridianrichtung dargestellt, eine reduzierte Fließgrenze $f_{y, \text{red}}$, damit kann die reduzierte Tragfähigkeit in Gl. (4-9b) berechnet werden.

Eine qualitativ bessere Beschreibung der Interaktionseffekte zwischen lokaler und globaler Lastabtragung des Trichters wird erreicht, wenn nur die Interaktion der Meridiankräfte berücksichtigt wird. Die Interaktion der Meridiankräfte der Randlagerung mit den Meridiankräften der rotationssymmetrischen Lastabtragung wird somit in Gl. (4-9c) mit einer linearen Interaktionsformel beschrieben, die Erhöhung der Meridianspannung um 15.5% wird nicht in Rechnung gestellt. Genauere Betrachtungen werden dazu in Kap. 4.4.2 angestellt.

Gl. (4-9d) stellt eine modifizierte Bemessungsformel dar die auf Basis der nichtlinearen Berechnungsergebnisse festgelegt wird und eine untere Annäherung der plastischen Grenztragfähigkeiten für alle drei Belastungsarten (reine Innendruckbelastung (p_n), reine Wandreibungsbelastung (p_x) bzw. Trichterbelastung ($\Sigma = p_x + p_n$)) der plastischen Tragfähigkeitswerte ist.

$$F_y = d \cdot t \cdot f_y \quad (4-9a)$$

$$f_{y, \text{red}} = f_y \cdot \sqrt{1 - \Lambda_1^2} \quad (4-9b)$$

$$F/F_y = (1 - \Lambda_1) \quad (4-9c)$$

$$F/F_y = \min \begin{cases} 1 \\ 1,155 - \Lambda_1 \end{cases} \quad (4-9d)$$

In Bild 4-31 ist die Abhängigkeit vom Ausnutzungsfaktor Λ_1 der rotationssymmetrischen (globalen) Lastabtragung des Trichters dargestellt. Dabei werden neben der vereinfachten Trichterbelastung auch die Ergebnisse für die Teillastfälle (siehe Kap. 4.2) — reine Innendruckbelastung p_n bzw. reine Wandreibungsbelastung p_x — dargestellt. Die Lagerkraft der lokalen Meridiannormalkraftlagerung wird dabei auf die vollplastische Lagertragfähigkeit F_y in Gl. (4-9a) bezogen.

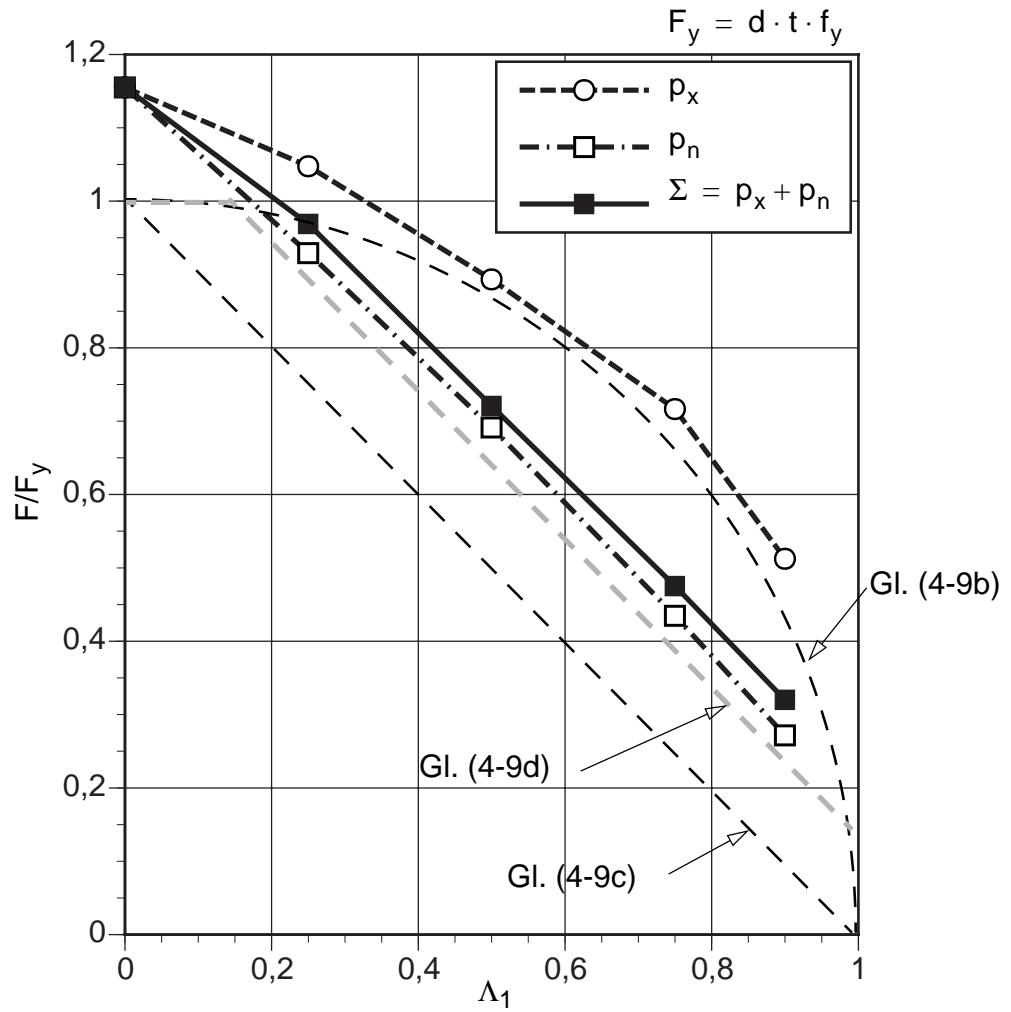


Bild 4-31 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — Einfluß der Belastungsart auf die Tragfähigkeit bei rotationssymmetrischer und lokaler Lastabtragung (starre Meridiannormalkraftlagerung) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

4.3.4 Interaktion von Schubkraftlagerung und Meridiannormalkraftlagerung

Zur Komplettierung wird die gleichzeitige lokale Auflagerung des Trichters bedingt durch die Schubkraftlagerung und Meridiankraftlagerung untersucht.

Zuerst wird die alleinige Lastabtragung über die lokalen Auflagerungen des Trichters untersucht. Als Belastung am Trichter wirkt wiederum die vereinfachte Trichterbelastung (Kap. 4.1.6). Es wird ein breiter Parameterbereich bezüglich der Dimensionen der lokalen Auflagerungen abgedeckt. Die lokalen Auflagerungen werden mit werden als starre Lagerungsbedingungen modellhaft wiedergegeben. Anschließend wird für eine spezielle Auflagerkonfiguration die Interaktion mit der globalen (=rotationssymmetrischen) Lastabtragung des Trichters untersucht.

4.3.4.1 Berechnungsmodell

Die Bestimmung der plastischen Tragfähigkeiten wird für das bereits in Kap. 4.3.1 zugrundegelegte Berechnungsmodell in Bild 4-32 vorgenommen.

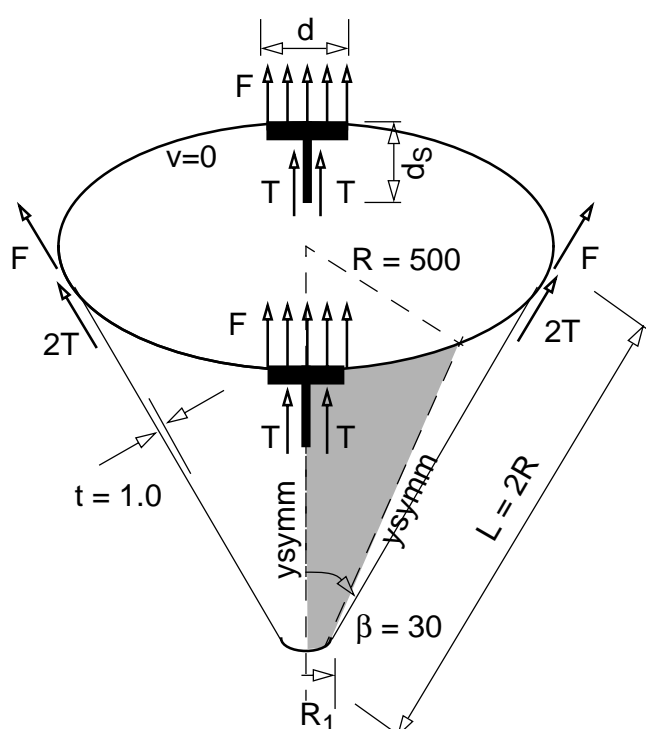


Bild 4-32 Berechnungsmodell und 1/8-Berechnungsausschnitt des Trichters

Es werden folgende geometrische Auflagerparameter untersucht:

- Lagerbreite $d/R = 0,025/0,05/0,10/0,20$ der Meridiannormalkraftlagerung
- Lagerlänge $d_s/L = 0,05/0,10/0,20/0,30$ der Schubkraftlagerung

4.3.4.2 Plastische Grenztragfähigkeiten bei lokaler Auflagerung

Für die Lastabtragung über die lokalen Auflagerungen des Trichters alleine werden als Resultate die resultierenden Lagerkräfte T und F aus den MNA-Berechnungen rückgerechnet. In den folgenden Darstellungen in Bild 4-33 und Bild 4-34 werden die resultierenden Auflagerkräfte auf die jeweiligen

- vollplastischen Auflagertragkräfte T_y und F_y bzw. auf die
- vollplastische Gesamtauflagertragkraft $F_y + 2T_y$ bezogen und in Abhängigkeit der Lagerbreite d und der Lagerlänge d_S dargestellt.

In der gewählten Darstellung ergibt sich für jedes Wertepaar von d und d_S eine neue plastische Lagergesamtragfähigkeit $F_y + 2T_y$:

$$F_y + 2T_y = d \cdot t \cdot f_y + 2 \cdot d_s \cdot t \cdot f_y / \sqrt{3} \quad (4-10)$$

Durch die Interaktion beider lokaler Auflagerungen des Trichters fällt die jeweilige betrachtete Lagerkraft mit zunehmender Lagerlänge bzw. -breite der anderen Lagerungsmöglichkeit. Die ausnutzbare Tragfähigkeit T/T_y der Schubkraftlagerung fällt mit zunehmender Lagerbreite d der Meridiannormalkraftlagerung, die Tragfähigkeit F fällt mit zunehmender Lagerlänge d_S (Bild 4-33 bzw. Bild 4-34). Größere Lagerlängen bzw. -breiten führen zu weniger ausgeprägten Interaktionseffekten, da durch die veränderlichen Spannungsverteilungen sich die Bereiche, in denen es zu Interaktionen kommt, in Bezug auf die Lagerlängen d und d_S kleiner werden.

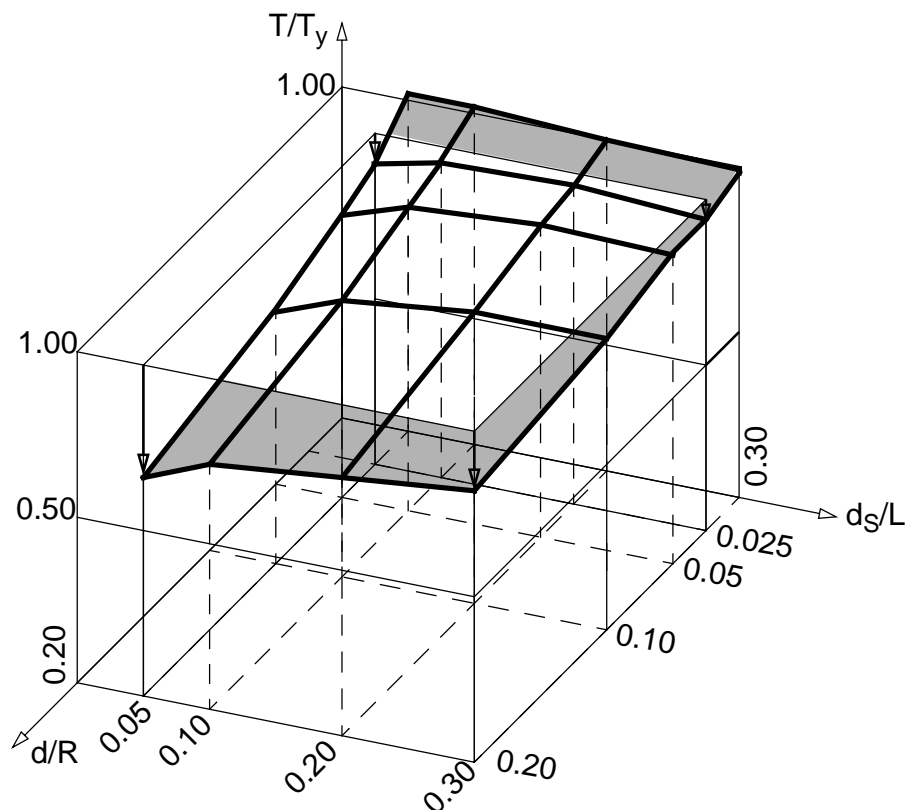


Bild 4-33 Bezogene Tragfähigkeit der lokalen Schubkraftlagerung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$

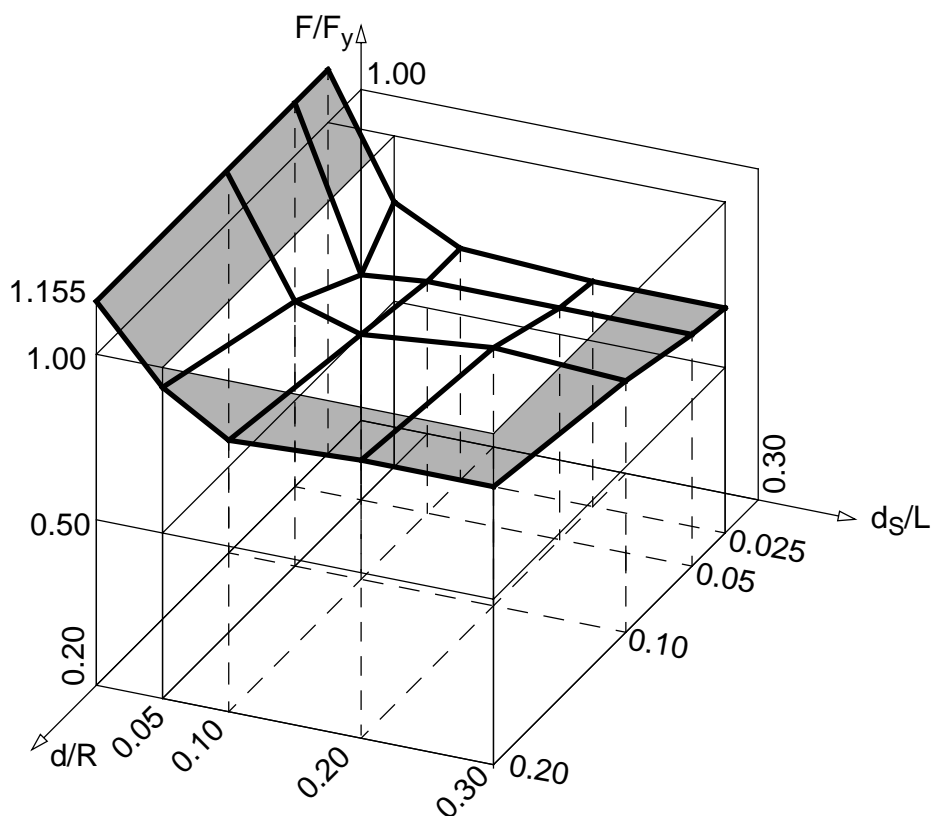


Bild 4-34 Bezogene Tragfähigkeit der lokalen Meridiannormalkraftlagerung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$

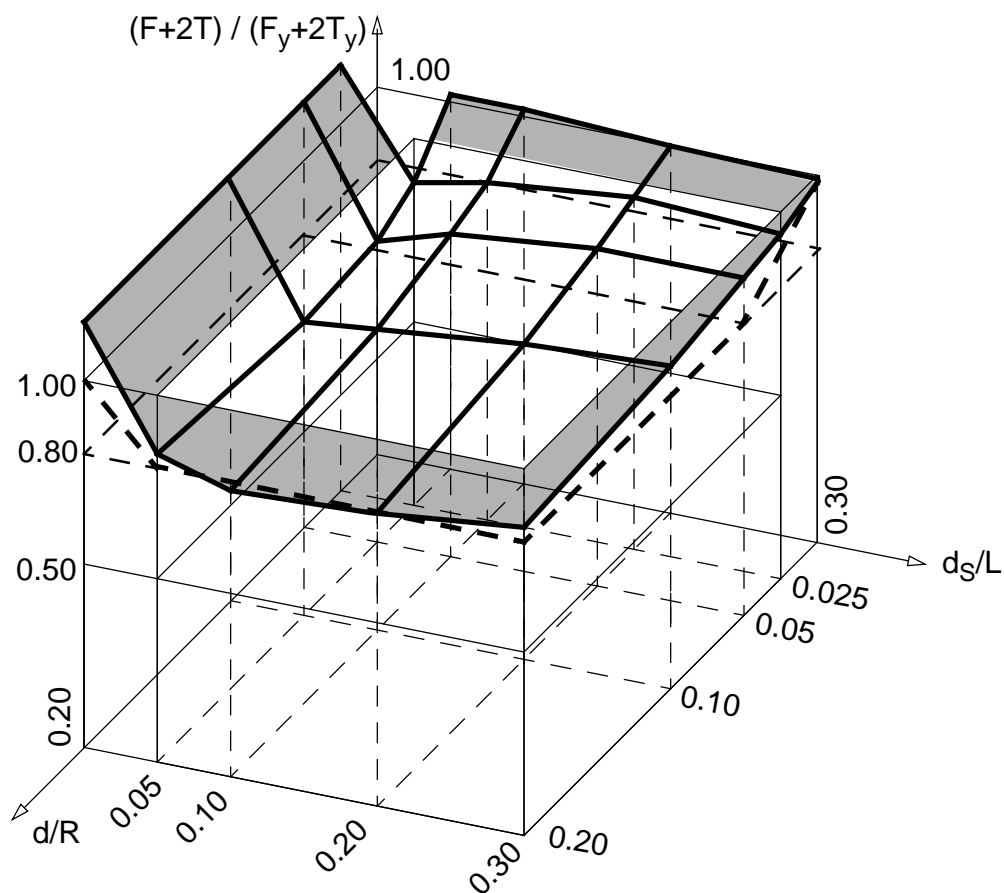


Bild 4-35 Bezogene Gesamttragfähigkeit bei lokaler Schubkraft- und Meridiannormalkraftlagerung des Trichters für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$

Für die spätere Entwicklung einer Bemessungsformel in Kap. 4.4 wird entsprechend Bild 4-35 als Gesamttragfähigkeit 80% der vollplastischen Lagergesamttragfähigkeit $F_y + 2T_y$ in Gl. (4-11a) mit den Bereich von $d/R \geq 0,05$ und $d_S/L \geq 0,05$ vorgeschlagen, in Gl. (4-11b) bis Gl. (4-11d) sind die Randübergangsbereiche der Interaktion von Schubkraftlagerung und Meridiannormalkraftlagerung wiedergegeben.

$$\frac{F + 2T}{F_y + 2T_y} = 0,8 \quad \text{für } d/R \geq 0,05 \text{ und } d_S/L \geq 0,05 \quad (4-11a)$$

$$\frac{F + 2T}{F_y + 2T_y} = 1 - 4\frac{d}{R} \quad \text{für } d/R < 0,05 \text{ und } d_S/L \geq 0,05 \quad (4-11b)$$

$$\frac{F + 2T}{F_y + 2T_y} = 1 - 4\frac{d_S}{L} \quad \text{für } d/R \geq 0,05 \text{ und } d_S/L < 0,05 \quad (4-11c)$$

$$\frac{F + 2T}{F_y + 2T_y} = 1 - 80\frac{d d_S}{R L} \quad \text{für } d/R < 0,05 \text{ und } d_S/L < 0,05 \quad (4-11d)$$

4.3.4.3 Interaktion von rotationssymmetrischer und lokaler Lastabtragung

Materiell nichtlineare Berechnungen

Die Untersuchungen werden für folgendes Beispiel vorgenommen:

- $R/t = 500$ und $\beta = 30^\circ$
- Lagerbreite $d/R = 0,10$ der lokalen Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung)
- Lagerlänge $d_S/L = 0,20$ der lokalen Schubkraftlagerung (=Schottblechlagerung)

Als Belastung liegt wiederum die vereinfachte Trichterbelastung entsprechend Kap. 4.1.6 vor.

Die resultierenden Auflagerkräfte sind in Bild 4-36 in bezogener Form dargestellt. Als Bezugsgrößen liegen die plastischen Lagertragfähigkeiten — Lagertragkräfte T_y und F_y bzw. Gesamtlagertragkraft $F_y + 2T_y$ — vor, die Abzisse stellt den Anteil der rotationssymmetrischen Lastabtragung (Ausnutzungsfaktor $\Lambda_1 = n_x/n_{x,max}$ bezogen auf die Tragfähigkeit der Membranschale) dar.

Die Auflagerkraft F der lokalen Meridiannormalkraftlagerung nimmt in Bild 4-36 linear mit der Steigerung des Grundlastanteiles Λ_1 der rotationssymmetrischen Lastabtragung ab. Dies begründet sich damit, daß sich die Meridianspannungen am Trichter mit jenen der lokalen Auflagerung linear überlagern. Zusätzlich wird durch das Vorliegen der Schubspannungen zufolge der Schottblechlagerung in diesem Bereich die Tragfähigkeit des Trichters aufgezehrt.

Die Auflagerkraft T der Schubkraftlagerung weist eine nahezu quadratische Interaktion mit dem Grundlastanteil Λ_1 auf. Dies läßt sich durch die prinzipiell quadratische Interaktion der Schubspannungen

mit anderen Spannungskomponenten entsprechend des Mises-Vergleichsspannungskriteriums erklären.

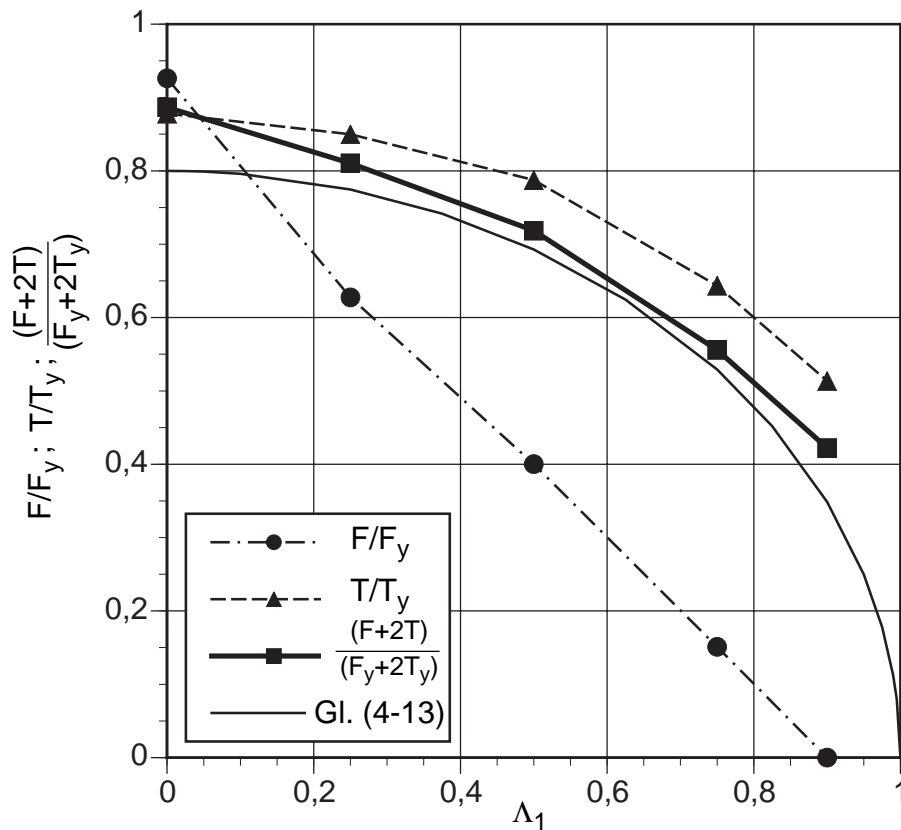


Bild 4-36 Bezogene Tragfähigkeiten bzw. Gesamttragfähigkeit der lokalen Auflagerkräfte des Trichters in Abhängigkeit der rotationsymmetrischen Lastabtragung (Ausnutzungsfaktor Λ_1) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$, $d/R = 0, 10$ und $d_S/L = 0, 20$ und Trichterbelastung ($p_x + p_n$)

Bemessungsformel

Für die Gesamttragfähigkeit bei lokaler Auflagerung kann folgende Näherungsformel in Gl. (4-12) angegeben werden. Dabei werden für die Teiltragfähigkeiten unterschiedliche Interaktionsformeln verwendet. Als Startwert bei $\Lambda_1 = 0$ wird die Tragfähigkeit von $F + 2T \approx 0,8(F_y + 2T_y)$ angesetzt.

$$F + 2T = 0,8[F_y(1 - 1,1 \cdot \Lambda_1) + 2T_y\sqrt{1 - \Lambda_1^2}] \quad (4-12)$$

Etwas vereinfacht kann die Gesamttragfähigkeit, da die Schubkraftlagerung den größeren Beitrag liefert, mit Gl. (4-13) bestimmt werden.

$$\frac{F + 2T}{F + 2T_y} = 0,8\sqrt{1 - \Lambda_1^2} \quad (4-13)$$

4.4 Entwicklung verfeinerter Bemessungsformeln

Bemessungsformeln wurden bereits in Kap. 4.2 und Kap. 4.3 auf Basis der MNA-Berechnungen hergeleitet. Nachfolgend werden gewisse Verfeinerungen durch Berücksichtigung zusätzlicher Einflüsse vorgenommen. Die Entwicklung von Bemessungsformeln folgt dabei zwei Grundsätzen:

- Primäres Ziel ist die bestmögliche Näherung der realen plastischen Grenztragfähigkeiten der MNA-Berechnungen.
- Die Basis dafür bilden Membrankräfte bzw. Membranspannungen, die im wesentlichen das Gesamtproblem anhand wesentlicher Spannungskomponenten beschreiben.

Bei der Schottblechlagerung sind dies die Schubkräfte bzw. Schubspannungen im Auflagerbereich. Bei der lokalen Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung) sind dies Meridiankräfte bzw. Meridianspannungen im Auflagerbereich. Diese werden mit den Spannungen eines rotationssymmetrischen Grundzustandes zur Bestimmung der maßgebenden Vergleichsspannung superponiert und somit die plastische Grenztragfähigkeit berechnet.

4.4.1 Lokale Schubkraftlagerung

4.4.1.1 Plastische Tragfähigkeit der Schubkraftlagerung

Der Ausgangspunkt zur Beurteilung der Tragfähigkeit ist die vollplastische Tragfähigkeit der lokalen Auflagerung in Meridianrichtung in Gl. (4-14). Dabei sind keine Interaktionseffekte mit allfälligen anderen Spannungskomponenten berücksichtigt.

$$T_y = d_S \cdot t \cdot f_y / \sqrt{3} \quad (4-14)$$

Bezieht man die Summe dieser Schubkräfte auf die rotationssymmetrische Membrankraft $n_{x, \max}$ (Kap. 4.1.5), so erhält man die bezogene Tragfähigkeit Λ_S der lokalen Auflagerung in Meridianrichtung.

$$\Lambda_S = \frac{T_y \cdot n}{n_{x, \max} \cdot R\pi} \quad (4-15)$$

4.4.1.2 Berücksichtigung von Interaktionseffekten

Die Bestimmung der Tragfähigkeit erfolgt anhand einer vereinfachten Bestimmung der Vergleichsspannung. Es werden zur Bestimmung der Tragfähigkeit zusätzlich rotationssymmetrische Kräfte berücksichtigt.

Für die lokale Lastabtragung erfolgt entsprechend Bild 4-37 die Aufteilung in einen rotationssymmetrischen Grundanteil und den Differenzzustand der lokalen Auflagerung. Im rotationssymmetrischen Grundzustand wirken am oberen Trichterrand die Kräfte n_{x0} und die zugehörigen Umfangskräfte $n_{\theta 0}$ (siehe Gl. (4-16)). Im Differenzzustand wirken die Schubkräfte der Schottblechlagerung und die gegengerichteten Meridianrandkräfte $n_{x\theta}$.

$$n_{\theta 0} = n_{x0} \cdot \frac{n_{\theta, \max}}{n_{x, \max}} \quad (4-16)$$

Die Randkräfte n_{x0} und die Auflagerkraft T weisen nun folgende Abhängigkeit auf:

$$T = n_{x0} \cdot R\pi/n \quad (4-17)$$

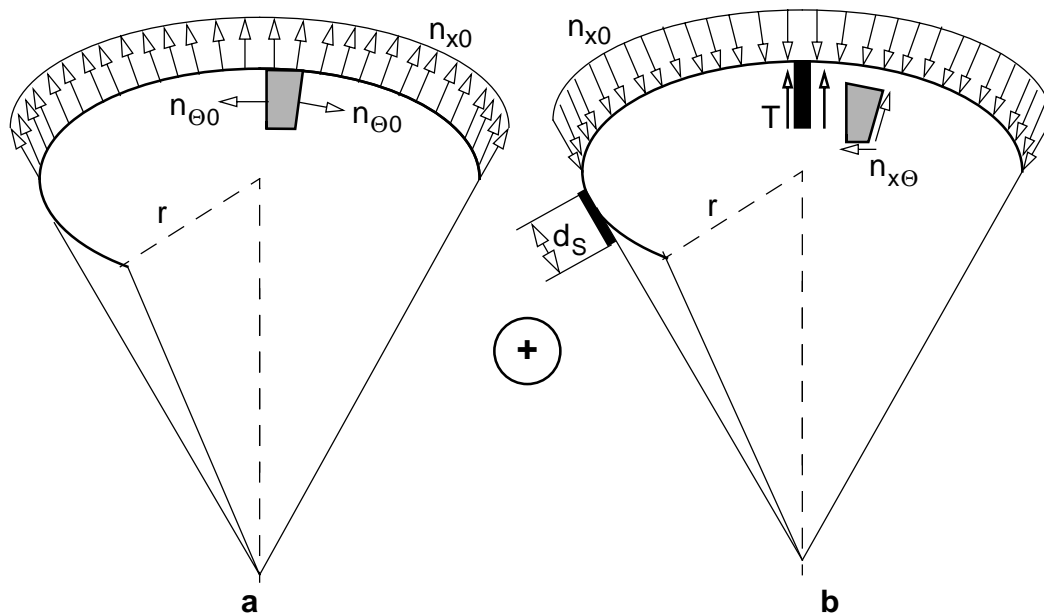


Bild 4-37 Lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung (=Schubkraftlagerung) — **a.** rotationssymmetrischer Grundanteil und **b.** Differenzzustand der Auflagerkrafteinleitung

Zur Bestimmung der Tragfähigkeit werden die Schubspannungen der Schubkrafteinleitung mit den rotationssymmetrischen Meridian- und Umfangsspannungen superponiert. Die rotationssymmetrischen Membrankräfte bestehen aus zwei Anteilen, jenen der rotationssymmetrischen Lastabtragung und jenen der lokalen Lastabtragung (siehe Gl. (4-18a) bzw. Gl. (4-18b)). Der Anteil der rotationssymmetrischen Lastabtragung ist durch den Lastfaktor (Ausnutzungsfaktor) Λ_1 im Bezug auf die Membrantragkräfte (siehe Tab. 4-4) repräsentiert. Der Lastfaktor Λ_1 stellt somit den Ausnutzungsfaktor der rotationssymmetrischen Lastabtragung dar.

$$n_x = \Lambda_1 n_{x, \max} + n_{x0} \quad (4-18a)$$

$$n_{\theta} = \Lambda_1 n_{\theta, \max} + n_{x0} \cdot n_{\theta, \max} / n_{x, \max} \quad (4-18b)$$

$$n_{x\theta} = T/d_s \quad (4-18c)$$

Die Bestimmung der Membrankraft n_{eq} , welche der Vergleichsspannung zuordenbar ist, erfolgt durch die Interaktion der drei Membrankräfte entsprechend des Mises-Vergleichsspannungskriteriums.

$$n_{eq} = f_y t \sqrt{\Lambda_1^2 + 2\Lambda_1 \cdot \frac{Tn}{n_{x,max} \cdot R\pi} + \frac{T^2 n^2}{n_{x,max}^2 \cdot R^2 \pi^2} + 3 \frac{T}{d_{st}^2 \cdot f_y^2}} \quad (4-19a)$$

$$n_{eq} = f_y t \sqrt{\Lambda_1^2 + 2 \frac{T}{T_y} \Lambda_1 \Lambda_S + \frac{T^2}{T_y^2} (1 + \Lambda_S^2)} \quad (4-19b)$$

Die Tragfähigkeit T der lokalen Auflagerung in Meridianrichtung (=Schottblechlagerung) in Gl. (4-20) ist abhängig von der bezogenen Tragfähigkeit Λ_S und dem Ausnutzungsfaktor Λ_1 der rotationssymmetrischen Lastabtragung.

$$T = T_y \cdot (\sqrt{1 - \Lambda_1^2 + \Lambda_S^2} - \Lambda_1 \Lambda_S) / (1 + \Lambda_S^2) \quad (4-20)$$

Ist die bezogene Tragfähigkeit Λ_S der lokalen Auflagerung in Meridianrichtung gering ($\Lambda_S \ll 1$), so ergibt sich folgende Approximation der Tragfähigkeit T in Gl. (4-20):

$$T = T_y \cdot \sqrt{1 - \Lambda_1^2} \quad (4-21)$$

4.4.1.3 Vergleich mit den MNA-Berechnungen

In Bild 4-38 bzw. Bild 4-39 sind die Tragfähigkeiten zufolge der entwickelten Bemessungsformeln den plastischen Grenztragfähigkeiten der MNA-Berechnungen bei lokaler Lastabtragung am Trichter gegenübergestellt. In Bild 4-39 erfolgt der Vergleich hinsichtlich der Abhängigkeit von der Belastungsart, wie vereinfachter Trichterbelastung ($p_n + p_x$) bzw. reiner Innendruckbelastung (p_n) oder Wandreibungsbelastung (p_x). Bei starrer Auflagerung ergeben sich etwas höhere Tragfähigkeitswerte als bei nachgiebiger Auflagerung. Die Tragfähigkeiten der Bemessungsformeln liefern vor allem in ihrem qualitativen Verlauf eine sehr gute Näherung.

In Bild 4-40 erfolgt der Vergleich bei Interaktion mit der rotationssymmetrischen Lastabtragung. Auch hier zeigt sich die gute Näherung der Bemessungsformeln. In Bild 4-41 ist die Gesamttragfähigkeit bei Interaktion von rotationssymmetrischer und lokaler Lastabtragung in Abhängigkeit des Grundlastanteiles Λ_1 darstellt. Dabei wird die resultierende Schubkraft T der lokalen Auflagerung auf die Tragfähigkeit $n_{x,max}$ bezogen. Daraus ergibt sich der Lastfaktor Λ_2 der lokalen Lastabtragung in Gl. (4-22).

$$\Lambda_2 = T \cdot n / (n_{x,max} \cdot R\pi) \quad (4-22)$$

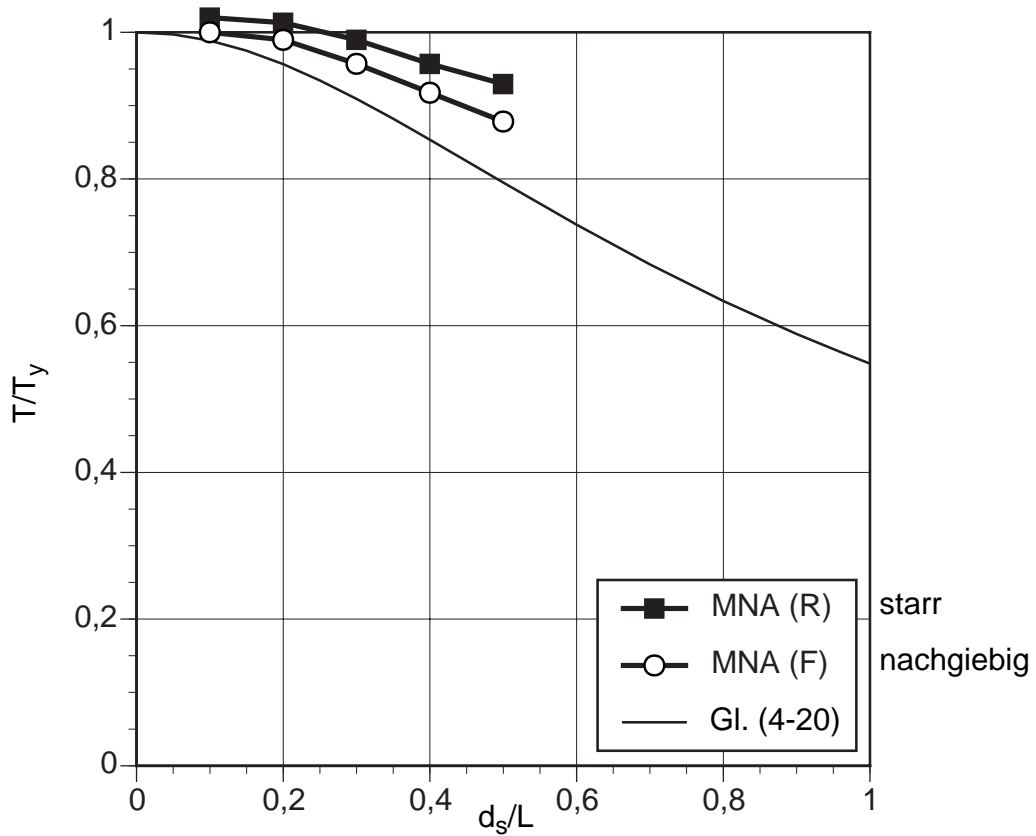


Bild 4-38 Lokale Schubkraftlagerung— Vergleich der Bemessungsformeln und der plastischen Grenztragfähigkeiten für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$

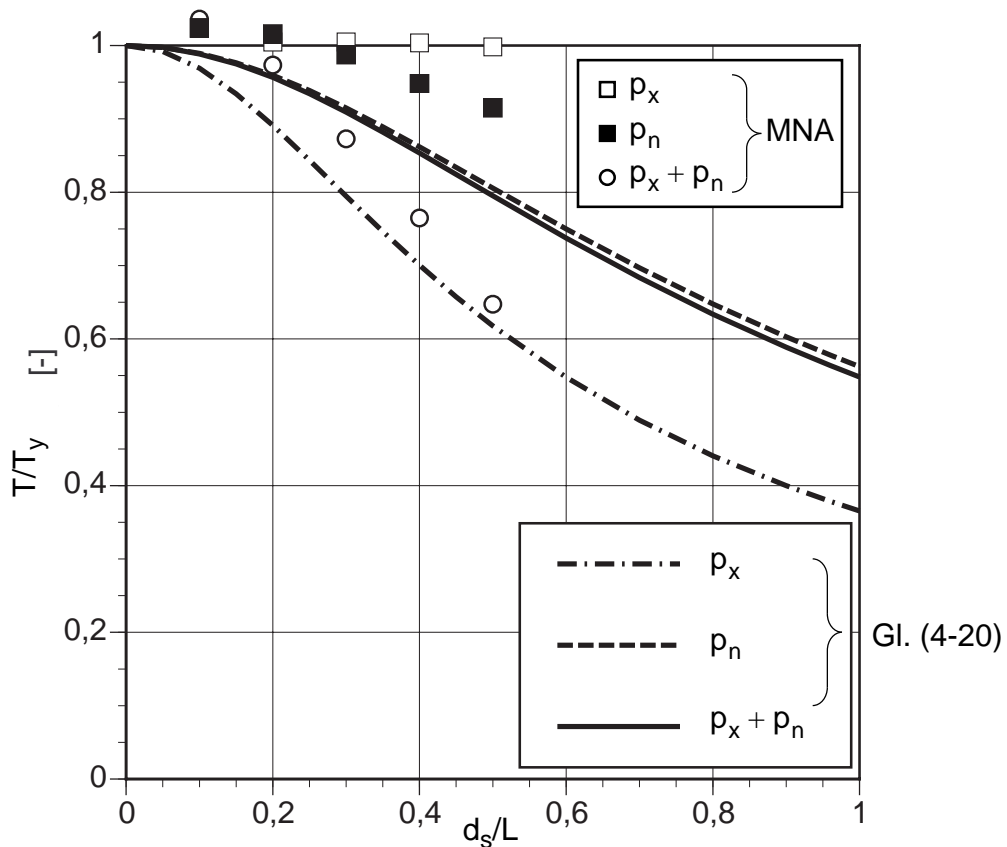


Bild 4-39 Lokale starre Auflagerung (R) in Meridianrichtung — Vergleich der Bemessungsformeln und der plast. Grenztragfähigkeiten für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ in Abhängigkeit der Belastungsart

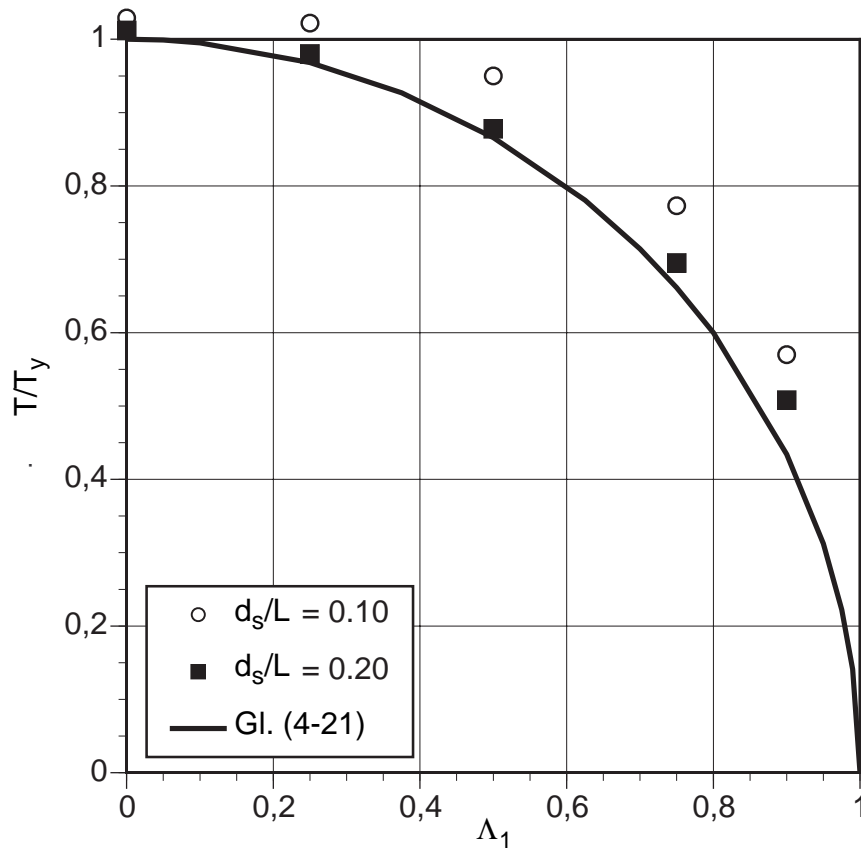


Bild 4-40 Interaktion von lokaler Schubkraftlagerung und rotationssymmetrischer Lastabtragung (Λ_1) — Bemessungsformel und plastische Tragfähigkeiten für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$

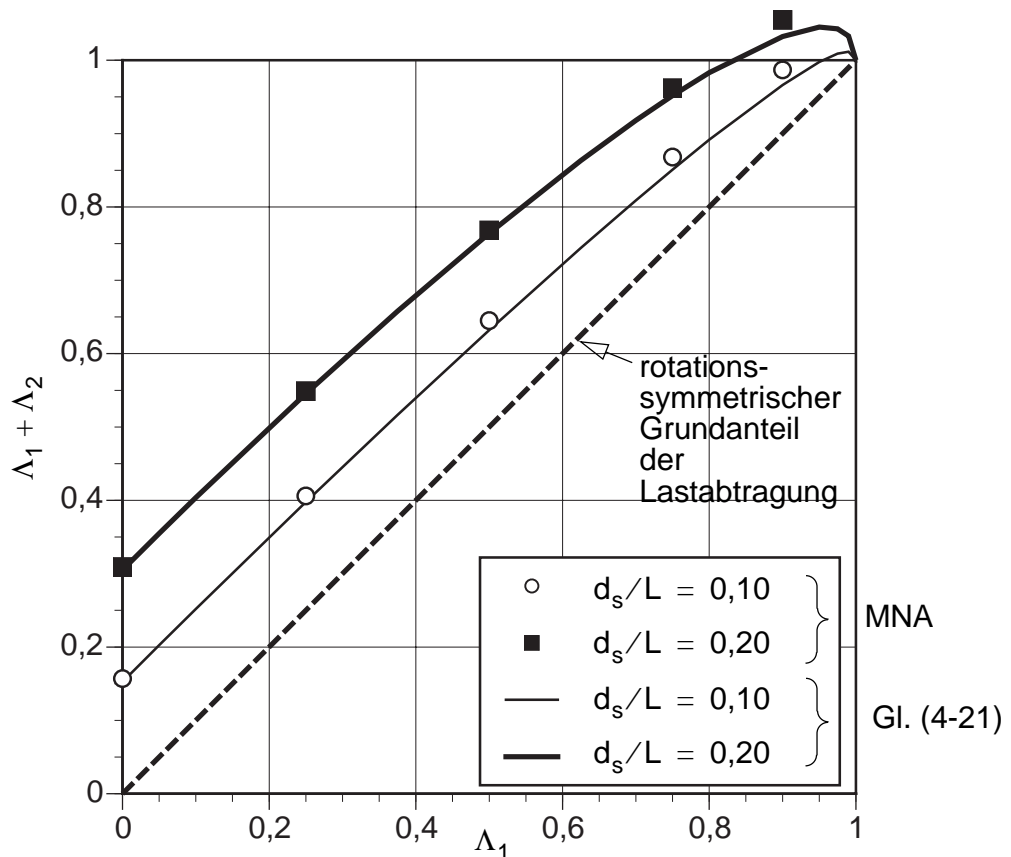


Bild 4-41 Gesamtragfähigkeit bei Interaktion von lokaler und rotationssymmetrischer Lastabtragung bei starrer Schottblechlagerung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$

4.4.2 Lokale Meridiannormalkraftlagerung

4.4.2.1 Plastische Tragfähigkeit der lokalen Meridiannormalkraftlagerung

Der Ausgangspunkt zur Beurteilung der Tragfähigkeit ist die vollplastische Grenztragfähigkeit der Meridiannormalkraftlagerung in Gl. (4-14). Dabei sind keine Interaktionseffekte mit allfälligen anderen Spannungskomponenten berücksichtigt.

$$F_y = d \cdot t \cdot f_y \quad (4-23)$$

Bezieht man die Summe dieser Schubkräfte auf die rotationssymmetrische Membrantragkraft $n_{x, \max}$, so erhält man die bezogene Tragfähigkeit der Meridiannormalkraftlagerung Λ_R .

$$\Lambda_R = F_y \cdot n / (n_{x, \max} \cdot 2R\pi) \quad (4-24)$$

4.4.2.2 Berücksichtigung von Interaktionseffekten

Die Bestimmung der Tragfähigkeit erfolgt anhand einer vereinfachten Vergleichsspannungsermittlung im Auflagerbereich. Dabei werden wiederum zur Bestimmung der Tragfähigkeit zusätzlich rotationssymmetrische Kräfte berücksichtigt.

Für die lokale Lastabtragung erfolgt in Bild 4-42 die Aufteilung in einen rotationssymmetrischen Grundanteil und den Differenzzustand der lokalen Auflagerung. Im Grundzustand wirken am oberen Trichterrand die Kräfte n_{x0} und die zugehörigen Umfangskräfte $n_{\theta 0}$ (Gl. (4-25a)). Im Differenzzustand wirken die Meridiankräfte n_{x1} der lokalen Auflagerung und die gegengerichteten Meridianrandkräfte n_{x0} . Der Zusammenhang der Randkräfte n_{x0} und der Lagerkraft F ist in Gl. (4-25b) definiert.

$$n_{\theta 0} = n_{x0} \cdot n_{\theta, \max} / n_{x, \max} \quad (4-25a)$$

$$F = n_{x0} \cdot 2R\pi / n \quad (4-25b)$$

Zur Bestimmung der Tragfähigkeit werden die Meridianspannungen der lokalen Meridiannormalkraftlagerung mit den rotationssymmetrischen Meridian- und Umfangsspannungen superponiert. Die rotationssymmetrischen Membrankräfte bestehen wiederum aus zwei Anteilen, jenen der rotationssymmetrischen Lastabtragung und jenen der lokalen Lastabtragung in Gl. (4-26a) bzw. Gl. (4-26b). Der Anteil der rotations-symmetrischen Lastabtragung ist durch den Ausnutzungsfaktor Λ_1 im Bezug auf die Membrantragkräfte des Trichters (siehe Tab. 4-4) repräsentiert.

$$n_x = \Lambda_1 n_{x, \max} + n_{x1} \quad (4-26a)$$

$$n_{\theta} = \Lambda_1 n_{\theta, \max} + n_{x0} \cdot n_{\theta, \max} / n_{x, \max} \quad (4-26b)$$

$$n_{x1} = F / d \quad (4-26c)$$

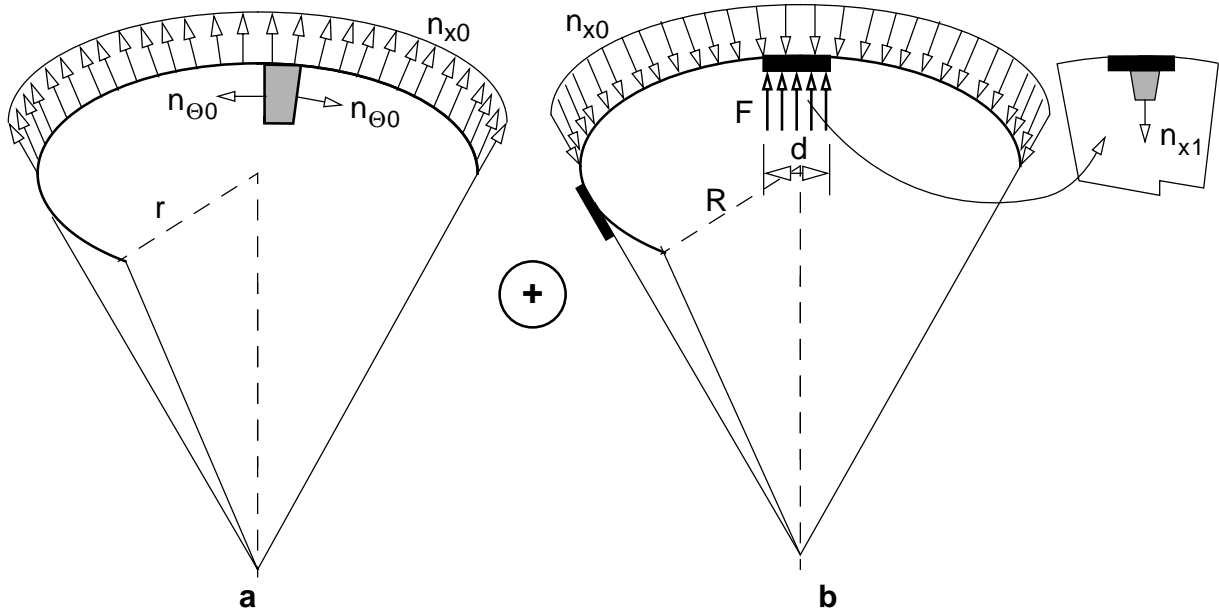


Bild 4-42 Lokale Meridiannormalkraftlagerung des Trichters — **a.** rotationssymmetrischer Grundanteil und **b.** Differenzzustand der lokalen Meridiannormalkraftlagerung

Die Bestimmung der Kraft n_{eq} erfolgt durch die Interaktion der drei Membrankräfte entsprechend des Mises-Vergleichsspannungskriteriums. Als weitere Vereinfachung wird dabei der Anteil der Umfangskraft in Gl. (4-27) zufolge der lokalen Auflagerung vernachlässigt.

$$n_{\theta} = \Lambda_1 n_{\theta, \max} \quad (4-27)$$

Somit folgt die, der Vergleichsspannung zuordenbare Kraft n_{eq} in Gl. (4-28b).

$$n_{eq} = \sqrt{\Lambda_1^2 \cdot (f_y t)^2 + 2\Lambda_1 \cdot n_{x1} \cdot \left(n_{x, \max} - \frac{n_{\theta, \max}}{2}\right) + n_{x1}^2} \quad (4-28a)$$

$$n_{eq} = f_y t \sqrt{\Lambda_1^2 + 2\Lambda_1 \cdot \frac{F}{F_y} \cdot \frac{\left(n_{x, \max} - \frac{n_{\theta, \max}}{2}\right)}{f_y t} + \frac{F^2}{F_y^2}} \quad (4-28b)$$

Die Tragfähigkeit F der Meridiannormalkraftlagerung in Gl. (4-29) ist somit abhängig von der Belastungsart des Trichters und dem Ausnutzungsfaktor Λ_1 der rotationssymmetrischen Lastabtragung.

$$F = F_y \cdot \left(\sqrt{\frac{\Lambda_1^2 \left(n_{x, \max} - \frac{n_{\theta, \max}}{2}\right)^2}{f_y^2 t^2} + (1 - \Lambda_1^2)} - \frac{\Lambda_1 \left(n_{x, \max} - \frac{n_{\theta, \max}}{2}\right)}{f_y t} \right) \quad (4-29)$$

Wird der Trichter nur durch eine Innendruckbelastung beansprucht, folgt mit der Beziehung $n_{x, \max} - n_{\theta, \max}/2 = 0$ die Tragfähigkeit in Gl. (4-30a). Wird der Trichter nur durch Wandreibungskräfte belastet, folgt mit den Beziehungen $n_{x, \max} = f_y t$ und $n_{\theta, \max} = 0$ die

Tragfähigkeit in Gl. (4-30b).

$$F = F_y \cdot \sqrt{1 - \Lambda_1^2} \quad (4-30a)$$

$$F = F_y \cdot (1 - \Lambda_1) \quad (4-30b)$$

In Kap. 4.3 wurde bereits eine modifizierte Bemessungsformel entwickelt, die eine möglichst gute Annäherung der plastischen Grenztragfähigkeiten der nichtlinearen Berechnungsergebnisse darstellt. Die Bemessungsformel ist nochmals in Gl. (4-31) angegeben, ihre Anwendbarkeit ist für alle drei Belastungsarten (reine Innendruckbelastung (p_n), reine Wandreibungsbelastung (p_x) bzw. Trichterbelastung ($\Sigma = p_x + p_n$)) möglich.

$$F/F_y = \min \begin{cases} 1 \\ 1,155 - \Lambda_1 \end{cases} \quad (4-31)$$

4.4.2.3 Vergleich mit MNA-Berechnungen

In Bild 4-43 und Bild 4-44 ist die Interaktion von globaler (=rotationssymmetrischer) und lokaler Lastabtragung am Trichter dargestellt. Auf der Ordinate ist wiederum die resultierende Lagerkraft F und auf der Abszisse ist der Grundanteil der rotationssymmetrischen Lastabtragung (Ausnutzungsfaktor Λ_1) aufgetragen.

In Bild 4-43 ist die Belastungsabhängigkeit — Trichterbelastung oder reine Innendruck- bzw. Wandreibungsbelastung — der plastischen Grenztragfähigkeiten der MNA-Berechnungen im Vergleich den Bemessungsformeln dargestellt.

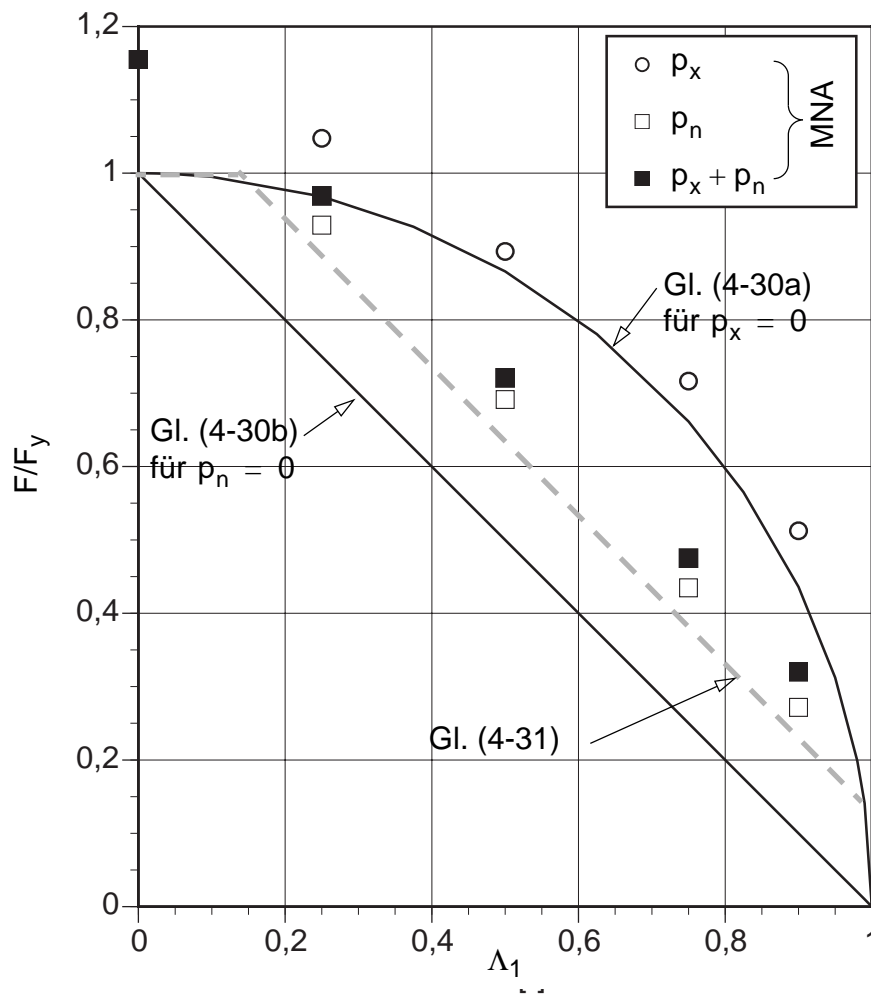


Bild 4-43 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — Vergleich der Bemessungsformeln mit den plastischen Tragfähigkeiten bei Interaktion von globaler und lokaler Lastabtragung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$, $d/R = 0,20$

Der Einfluß der lokalen Auflagerungsbedingungen — nachgiebig (F) oder starr (R) — ist in Bild 4-44 für Innendruckbelastung abgebildet. Durch die plastischen Umlagerungsmöglichkeiten weist die starre Auflagerung des Trichters etwas höhere Tragfähigkeiten auf.

Die Tragfähigkeiten entsprechend Gl. (4-30a) bzw. Gl. (4-30b) stellen wiederum eine gute Näherung der tatsächlichen Tragfähigkeiten dar.

In Bild 4-45 ist die auf die axialsymmetrische Ausnutzung bezogene Gesamttragfähigkeit $\Lambda_1 + \Lambda_2$ dargestellt. Dabei wird die bezogene Tragfähigkeit der lokalen Auflagerung Λ_2 auf die axialsymmetrische Membrantragfähigkeit bezogen (Gl. (4-32)).

$$\Lambda_2 = \frac{F \cdot n}{n_{x, \max} \cdot 2R\pi} \quad (4-32)$$

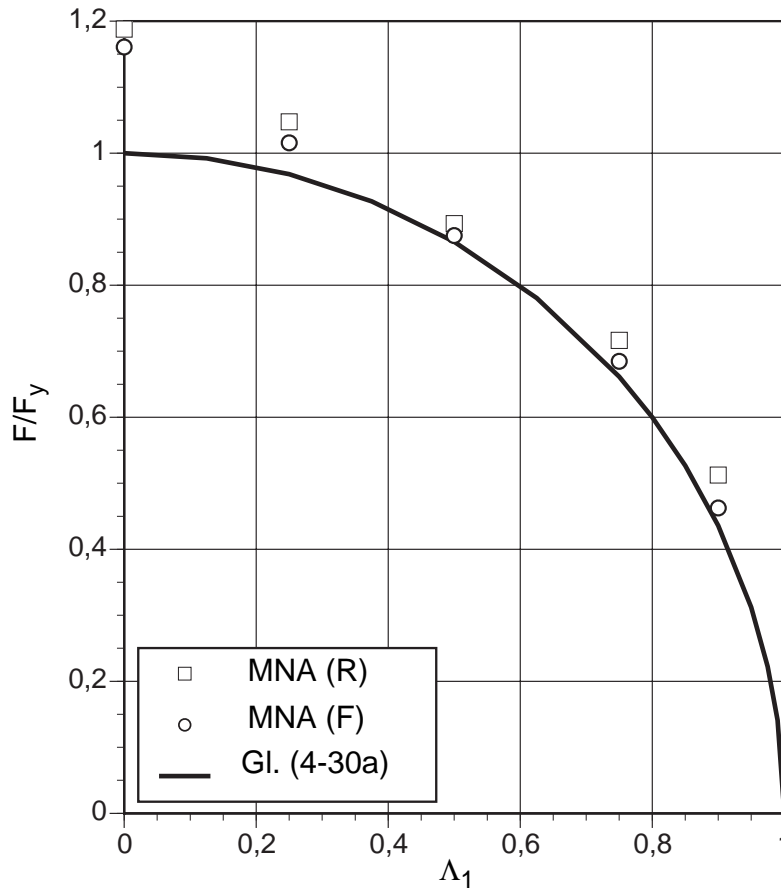


Bild 4-44 Lokale Meridiannormalkraftlagerung — Vergleich der Bemessungsformeln mit den plastischen Tragfähigkeiten bei starrer (R) bzw. nachgiebiger Lagerung (F) bei purer Innendruckbelastung (p_n) des Trichters für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

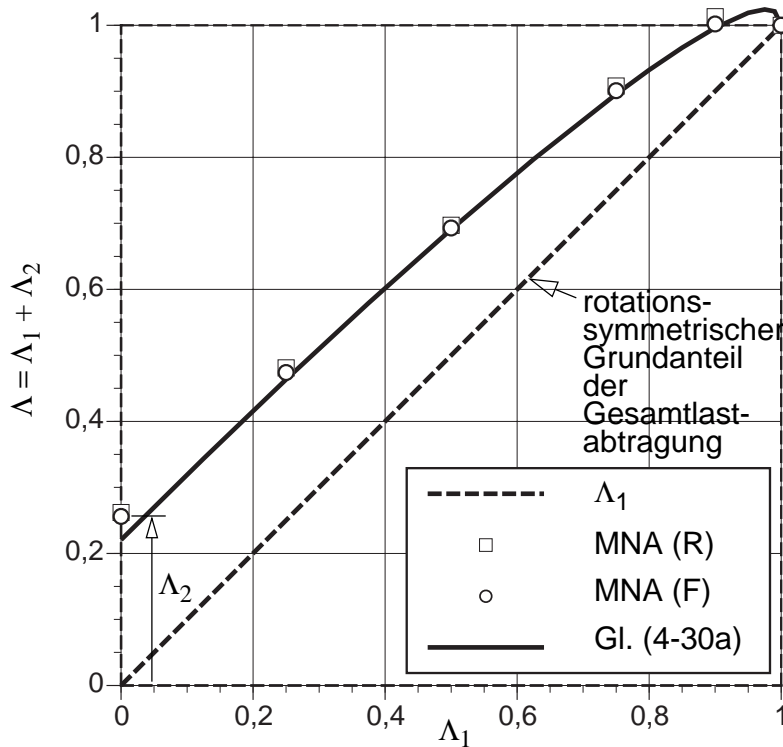


Bild 4-45 Gesamttragfähigkeit bei starrer (R) bzw. nachgiebiger Meridiannormalkraftlagerung (F) und Innendruckbelastung (p_n) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d/R = 0,20$

4.4.3 Lokale Auflagerung in Meridian- und Umfangsrichtung

Durch die Interaktion von Schub- und Meridianspannungen können auf konservative Art und Weise unter Annahme konstanter Spannungsfelder folgende modifizierte Lagerkräfte berechnet werden. Die realen Spannungsverteilungen ermöglichen eine etwas höhere Tragfähigkeit.

Aufgrund der Komplexität der beteiligten Spannungskomponenten wird aber auf eine Entwicklung einer verfeinerten Bemessungsformel verzichtet.

In Kap. 4.3.4 wurde bereits ein Vorschlag in Gl. (4-12), der mit Gl. (4-33) wiederholt wird, bzw. in modifizierter Form in Gl. (4-13) angegeben.

$$F + T = 0,8[F(1 - 1,1 \cdot \Lambda_1) + T_y \sqrt{1 - \Lambda_1^2}] \quad (4-33)$$

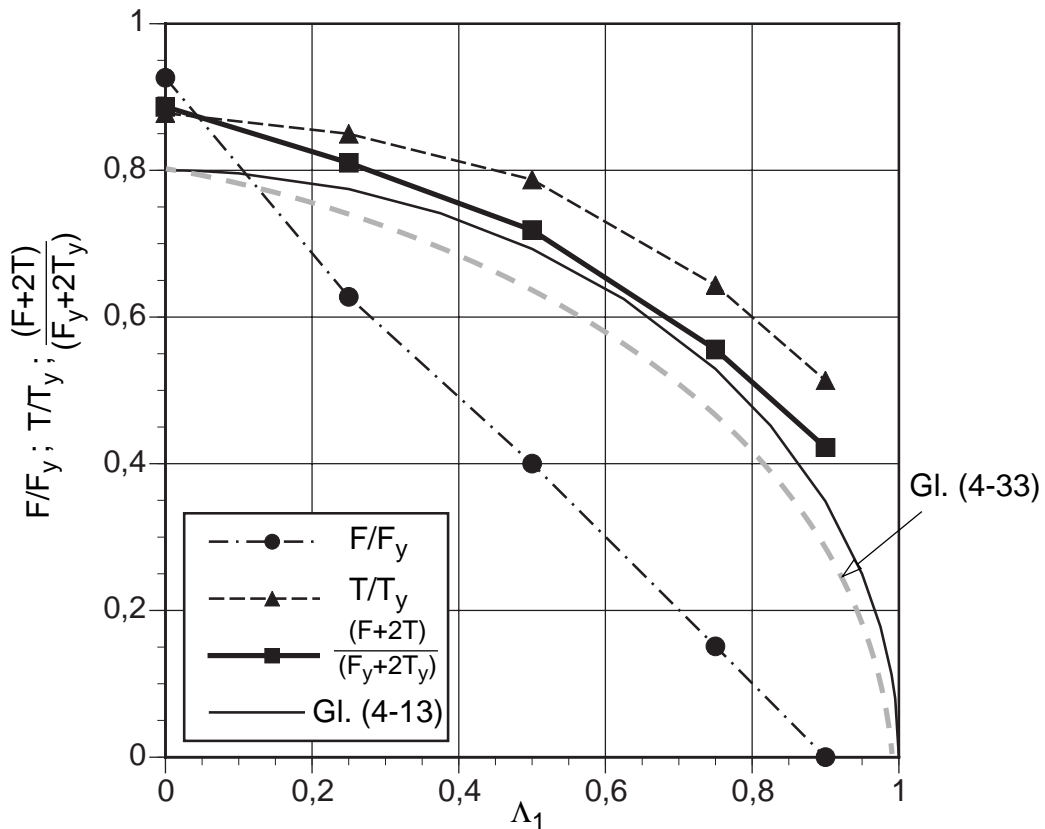


Bild 4-46 Bezogene Tragfähigkeiten bzw. Gesamttragfähigkeit der lokalen Auflagerkräfte des Trichters in Abhängigkeit der rotationssymmetrischen Lastabtragung (Ausnutzungsfaktor Λ_1) für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$, $d/R = 0,10$ und $d_S/L = 0,20$ und Trichterbelastung ($p_x + p_n$)

4.5 Tragfähigkeitsabschätzung auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen

Im folgenden werden die plastischen Grenztragfähigkeiten alternativ basierend auf linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) bzw. Membranberechnungen (MA) approximativ berechnet und mit den Ergebnissen der Kap. 4.2 bis Kap. 4.4 basierend auf materiell nichtlinearen Berechnungen verglichen.

Dieses Kapitel hat lediglich didaktischen Wert, da sich herausstellen wird, daß insbesondere die Membranlösungen für Bemessungszwecke unbrauchbar sind, da sie für extrem lokale Lastfälle von vornherein nicht anwendbar sind.

4.5.1 Lokale Lastabtragung am Trichter

Die lokale Lastabtragung des Trichters werden im folgenden mittels Membrangleichgewichtsgleichungen bzw. linearen Berechnungen zugehörig zu folgenden lokalen Auflagerungen behandelt:

- lokale Schubkraftlagerung (=Schottblechlagerung)
- lokale Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung)

Dabei wird, wie in Bild 4-47 dargestellt, der Differenzzustand von lokalen Lagerkräften F bzw. T und gegenwirkenden rotationssymmetrischen Meridianrandkräften n_{x0} untersucht.

Aufteilung der Kraftwirkungen

Die Lastabtragung der Schubkraftlagerung bzw. der Meridiannormalkraftlagerung wird durch die Superposition des rotationssymmetrischen Grundzustandes und dem Differenzzustand der lokalen Auflagerung ermittelt (Bild 4-47).

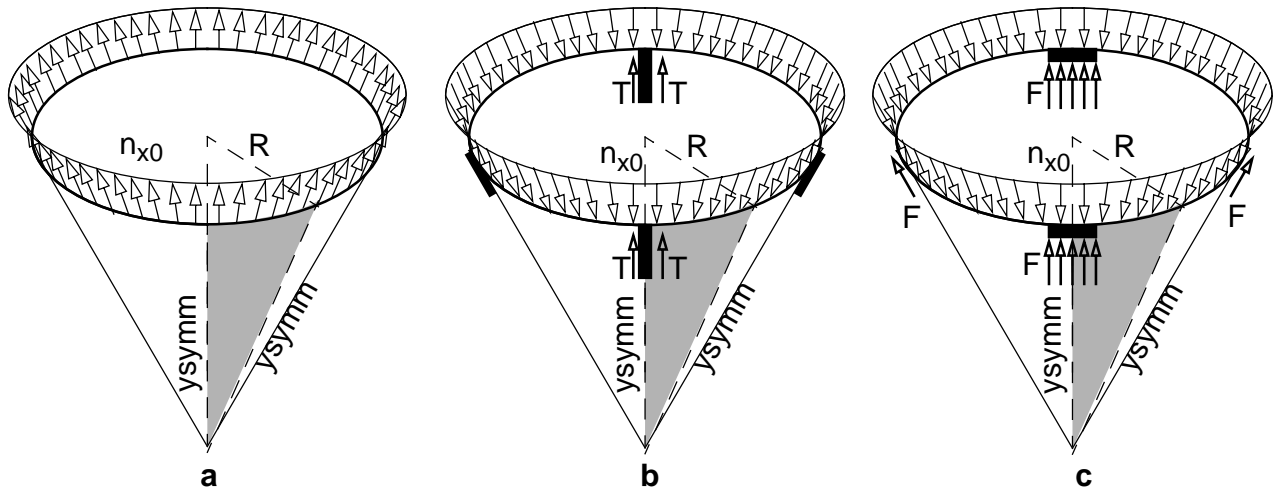


Bild 4-47 Aufspaltung in **a.** rotationssymmetrischen Grundzustand und **b.** Differenzzustand für die lokale Schubkraftlagerung bzw. **c.** der Meridiannormalkraftlagerung

4.5.2 Membranschnittkraftverteilungen

Aus den Membrangleichgewichtsgleichungen von Kap. 4.2.1 können auf direktem Weg die Membrankräfte bestimmt werden.

Die Schubkräfte der Schottblechlagerung werden als konstant verteilte Flächenlasten am Trichter aufgebracht. Die Lastverteilbreite in Umfangsrichtung ergibt sich entsprechend Bild 4-48 aus der Dicke t_S des Schottbleches, der Kehlnahtstärke a und der Wanddicke t des Trichters.

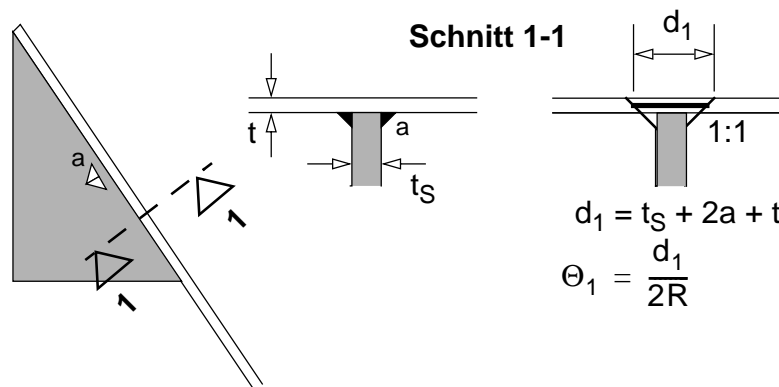


Bild 4-48 Lastverteilbreite bei Schottblechlagerung (=Schubkraftlagerung) des Trichters

Die entstehenden Membrankräfte können für die lokale Meridiannormalkraftlagerung und die Schubkraftlagerung gemeinsam bestimmt werden. Die Membrankräfte der Schottblechlagerung unterscheiden sich prinzipiell nur im Krafteinleitungsbereich von jenen der lokalen Meridiannormalkraftlagerung.

Der Differenzzustand für die Schubkraftlagerung wird somit in zwei Anteile aufgespaltet, der erste Anteil stellt die Lösung der Meridiannormalkraftlagerung in Bild 4-49 dar. Es wirken folgende Kräfte am Trichter:

- Die auf die Lagerbreite $d = d_1$ verteilte Lagerkraft F ($n_{xL} = F/d$) am oberen Rand des Trichters und die entgegengesetzt gerichteten rotationssymmetrischen Randkräfte n_{x0} .
- Die auf die Verteilbreite d_1 und die Schottblechlänge d_S verteilte Schubkraft T ($p_x = T/(d_S d_1)$) und die entgegengesetzt gerichteten Randkräfte n_{xL} .

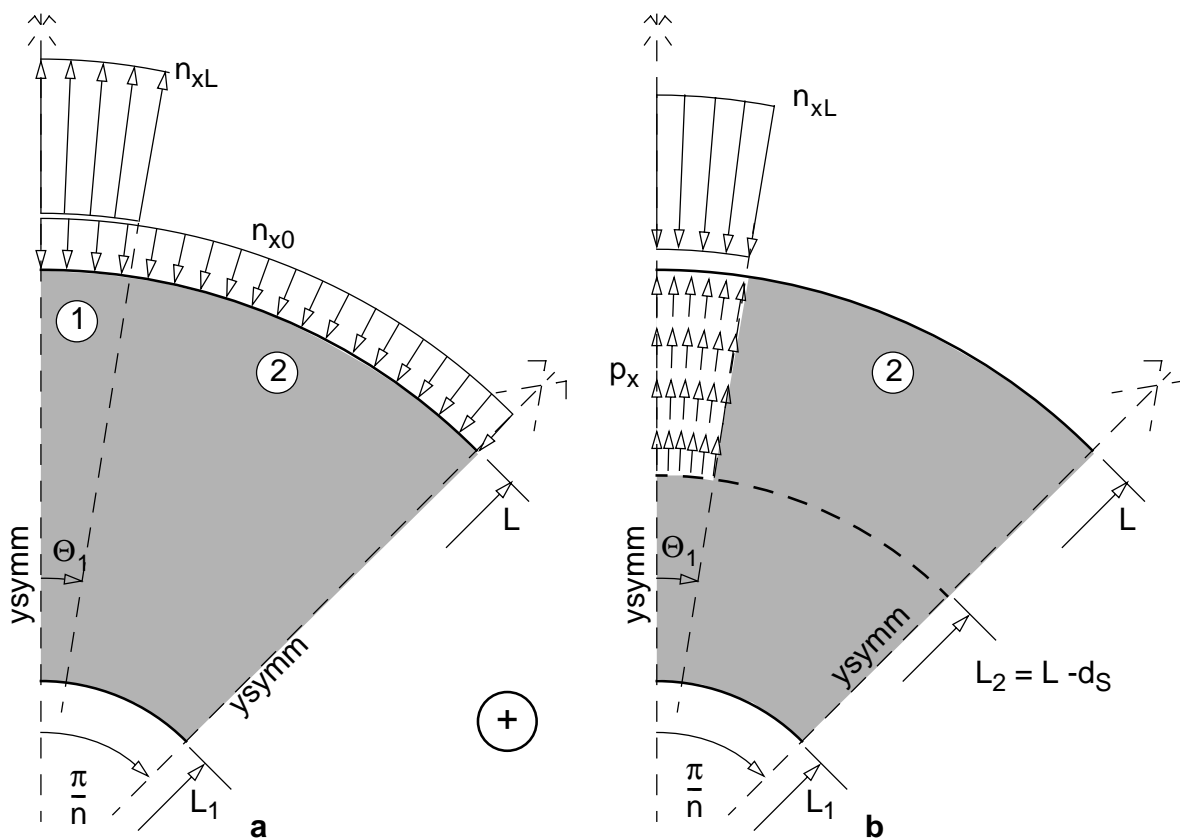


Bild 4-49 Aufspaltung des Differenzzustandes — **a.** lokale Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung) und **b.** Schubbelastung zufolge der Schubkraftlagerung (=Schottblechlagerung)

4.5.2.1 Gleichgewichtsgleichungen

Die Gleichgewichtsgleichungen werden an einem Kegelstumpf bestimmt. Dies ist notwendig, da sich der Trichter zum unteren Rand hin verjüngt, die Breite eines Trichterelementes im Grenzfall am unteren Rand zu Null wird und die Membrankräfte dadurch einen singulären Wert erreichen. Dies ist in Gl. (4-34a) bzw. Gl. (4-34b) durch die im Nenner stehende Laufordinate s , die von der Trichterspitze aus gemessen wird, gegeben.

Für die Differenzzustände verbleiben, da kein Radialdruck p_n und keine Belastungen p_Θ in Umfangsrichtung am Trichter wirkt, folgende Gleichgewichtsgleichungen in Gl. (4-34a) und Gl. (4-34b).

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s \cdot n_x) + \frac{1}{s \cdot \sin \beta} \frac{\partial n_{x\Theta}}{\partial \Theta} + p_x = 0 \quad (4-34a)$$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(s \cdot n_{x\Theta}) = 0 \quad (4-34b)$$

Der betrachtete Teil der Membranschale wird entsprechend Bild 4-49 und Bild 4-50 in Umfangsrichtung in zwei Segmente geteilt. Die resultierende Meridiankraft ergibt sich in Bereich 1 ($0 \leq \Theta \leq \Theta_1$) durch die Differenz der rotationssymmetrischen Meridianrandkräfte n_{x0} von n_{xL} . An der Trennlinie in $\Theta = \Theta_1$ wirkt die resultierende Schubkraft T_1 .

$$n_{x1} = n_{xL} - n_{x0} = n_{x0} \cdot \left(\frac{\pi/n}{\Theta_1} - 1 \right) \quad (4-35a)$$

$$T_1 = n_{x1} \cdot \frac{d}{2} = n_{x0} \cdot \left(\frac{R\pi}{n} - \frac{d}{2} \right) \quad (4-35b)$$

Die resultierende Schubkraft T_1 wirkt den Randkräften entgegen, sie erfüllt so das Gleichgewicht an den Einzelsegmenten (siehe Bild 4-50). Die Meridianmembrankräfte n_x nehmen innerhalb des Einzelsegmentes einen in Umfangsrichtung konstanten Wert an, die Schubkräfte $n_{x\Theta}$ sind in Umfangsrichtung linear veränderlich und nehmen in $\Theta = \Theta_1$ ihren Maximalwert an.

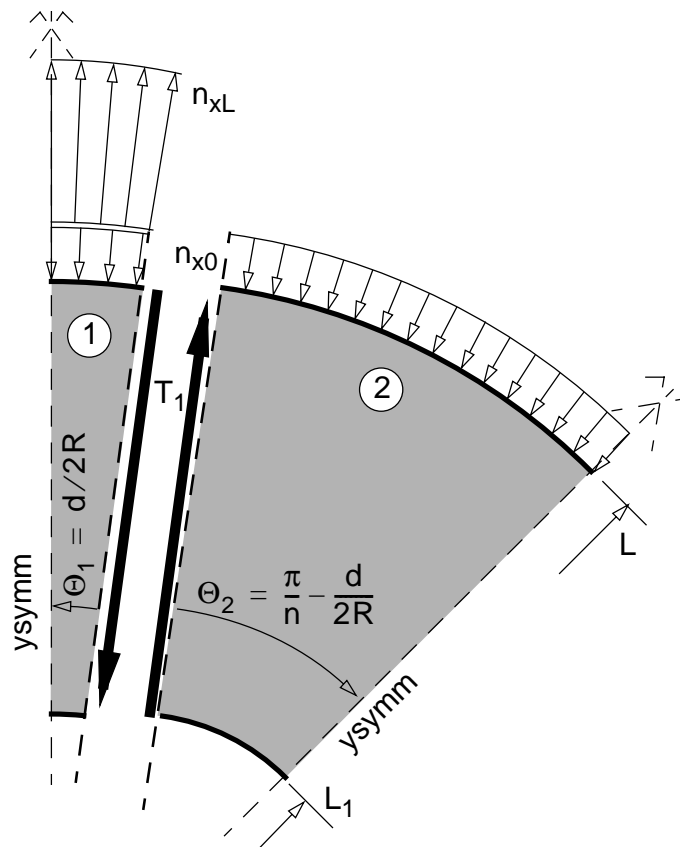


Bild 4-50 Anteil 1 des Differenzzustandes — lokale Meridiannormalkraftlagerung des Trichters

Die Lösungen der Gleichgewichtsgleichungen sind in Tab. 4-5 angegeben. Signifikant sind die logarithmischen Verläufe von n_x und $n_{x\Theta}$ in Meridianrichtung, sie sind durch die Abnahme des lokalen Radius bzw. der Segmentbreiten zum Trichterende hin bedingt.

Tab. 4-5 Lösung der Membrangleichgewichtsgleichungen — Verlauf der Membrankräfte für die lokale Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung) des Trichters

	Bereich 1 $0 \leq \Theta \leq \Theta_1$	Bereich 2 $\Theta_1 < \Theta \leq \pi/n$
Meridianmembrankraft	$n_x = n_{x1} \cdot \frac{L}{s} \cdot \frac{\ln(s/L_1)}{\ln(L/L_1)}$	$n_x = -n_{x0} \cdot \frac{L}{s} \cdot \frac{\ln(s/L_1)}{\ln(L/L_1)}$
Schubmembrankraft	$n_{x\Theta} = -n_{x1} \frac{L \sin \beta}{s} \cdot \frac{\Theta/\Theta_1}{\ln(L/L_1)}$	$n_{x\Theta} = -n_{x1} \frac{L \sin \beta}{s} \cdot \frac{1 - \frac{\Theta}{(\pi/n - \Theta_1)}}{\ln(L/L_1)}$

Die maximale Meridiankraft n_x tritt im unteren Trichterbereich auf, die Lage in Gl. (4-36a) ist abhängig vom unteren Trichterradius R_1 bzw. der zugeordneten Länge L_1 (mit $e = 2,71828\dots =$ Eulerzahl).

$$\frac{s}{L} = e \cdot \frac{L_1}{L} \quad (4-36a)$$

$$n_{x, \max} = n_{x1} \cdot \frac{L}{e \cdot L_1} \cdot \frac{1}{\ln(L/L_1)} \quad (4-36b)$$

$$n_{x\Theta, s=e \cdot L_1} = -n_{x1} \frac{L \sin \beta}{e \cdot L_1} \cdot \frac{1}{\ln(L/L_1)} = -n_{x, \max} \cdot \sin \beta \quad (4-36c)$$

Die Einleitung der Schubbelastung p_x der Schubkraftlagerung ergibt nur in ihrem Einleitungsbereich — $0 \leq \Theta \leq \Theta_1$ und $L_2 \leq s \leq L$ — einen Beitrag an den Meridianmembrankräften des Trichters. Diese Differenzmembrankraft ist in Gl. (4-37a) bzw. die resultierende Meridianmembrankraft ist in Gl. (4-37b) angegeben. Die Verteilungen der Membranschubkräfte bleiben unverändert.

$$\Delta n_x = -n_{x0} \cdot \frac{L}{s} \cdot \left(\frac{\pi/n}{\Theta_1} \cdot \frac{s^2 - L_2^2}{L^2 - L_2^2} \right) \quad (4-37a)$$

$$n_x = n_{x0} \cdot \frac{L}{s} \cdot \left(\left(\frac{\pi/n}{\Theta_1} - 1 \right) \frac{\ln(s/L_1)}{\ln(L/L_1)} - \frac{\pi/n}{\Theta_1} \cdot \frac{s^2 - L_2^2}{L^2 - L_2^2} \right) \quad (4-37b)$$

4.5.2.2 Graphische Darstellung der Membrankräfte

Die Membrankräfte n_x und $n_{x\Theta}$ werden im folgenden für beide lokale Auflagerungsmöglichkeiten des Trichters dargestellt. Der Kegelstumpf hat einen unteren Öffnungsradius von $R_1/R = 0,10$ (bzw. $L_1/L = 0,10$). Die Darstellung erfolgt in dimensionsreiner Form.

- In Bild 4-51 und Bild 4-52 sind die Membrankräfte n_x und $n_{x\Theta}$ für den Fall der lokalen Meridiannormalkraftlagerung (Anteil 1) dargestellt. Dabei wurde die Umfangswinkel der lokalen Meridiannormalkraftlagerung mit $\Theta_1 = 0,127\pi/n$ ($d/R = 0,20$) angenommen.
- Für den Fall der Schubkraftlagerung wird entsprechend Bild 4-48 eine Lastverteilungsbreite von $\Theta_1 = 0,01\pi/n$ angesetzt. In Bild 4-53 ist der Verlauf der Meridiankräfte n_x für verschiedene Längen d_S des Schottbleches dargestellt. Die Schubkräfte $n_{x\Theta}$ sind aufgrund der vorliegenden Membrangleichgewichtsgleichungen davon unbeeinflusst

Signifikant für die Membranlösung ist, daß die Verteilung der Meridiankräfte n_x direkt durch die Randkräfte am oberen Rand vorgegeben ist. Im Schaleninneren kommt es durch das Fehlen der Schalenbiegewirkungen zu keiner Umverteilungswirkung. Durch den bereichsweise konstanten Verlauf der Meridianmembrankräfte kann von einer segmentartigen Lastabtragung gesprochen werden. Die Membrankräfte weisen ihren Maximalwert im unteren Bereich des Trichters auf. Dies beruht auf der Tatsache, daß die Bezugsbreite nach unten hin linear abnimmt. Gleiches gilt für die Schubkräfte $n_{x\Theta}$, sie erreichen ihren Maximalwert am unteren Trichterrand und werden um so größer um so kleiner der untere Trichterradius bzw. die zugeordnete Segmentbreite wird. Ist der Trichter unten geschlossen (es liegt ein Kegel und kein Kegelstumpf vor), so erreicht $n_{x\Theta}$ entsprechend den Gleichgewichtsgleichungen einen singulären Wert (∞).

Aus diesen (statisch bestimmten) Membranschnittkraftverläufen wird deutlich, daß diese — zumindest wenn nicht darüberhinausgehende Zusatzüberlegungen ins Spiel gebracht werden — nicht als Basis für rationale plastische Tragfähigkeitsabschätzungen Verwendung finden können. Dies wird jedoch verständlich, wenn man betrachtet, daß die vorliegenden extrem lokalen Lasteinleitungsfälle von vornherein nicht in den Gültigkeitsbereich der Membrantheorie fallen.

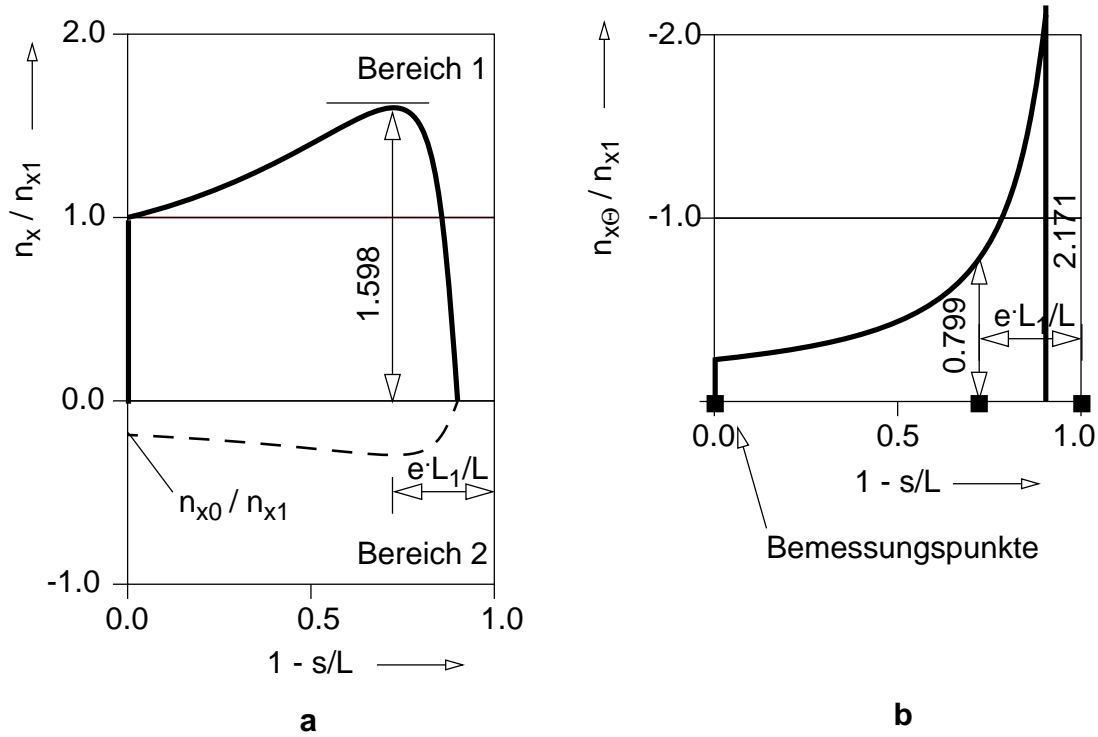


Bild 4-51 Verlauf der Membrankräfte in Meridianrichtung für die lokale Meridiannormalkraftlagerung (Anteil 1 des Differenzzustandes) — **a.** Meridiankraft n_x und **b.** Schubkraft $n_{x\theta}$ in Θ_1 für $L_1/L = 0, 10$, $\Theta_1 = 0,127\pi/n$ und $\beta = 30^\circ$

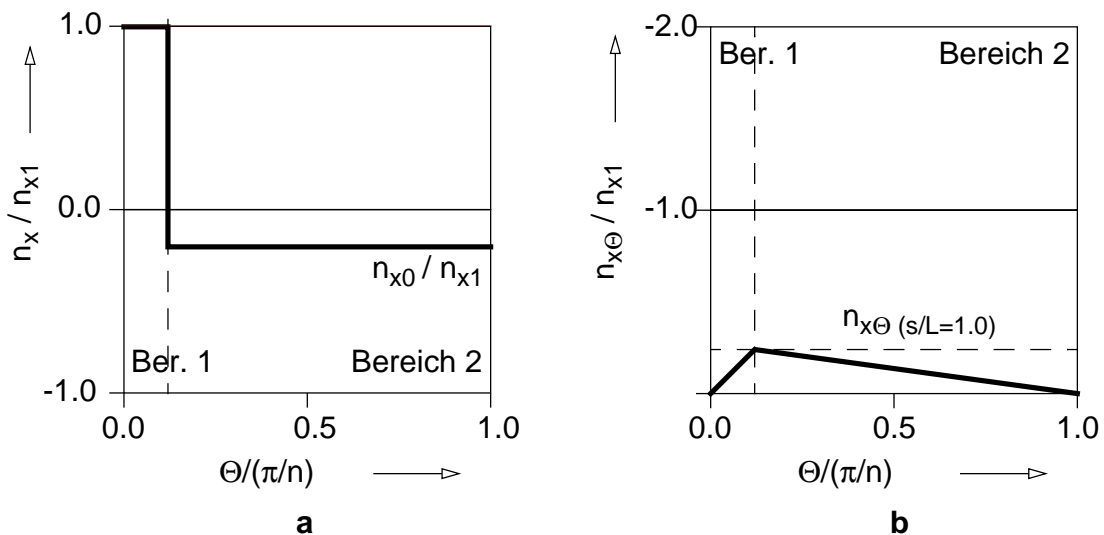


Bild 4-52 Verlauf der Membrankräfte in Umfangsrichtung in $s/L = 1, 0$ für die lokale Meridiannormalkraftlagerung (Anteil 1 des Differenzzustandes) — **a.** Meridiankraft n_x und **b.** Schubkraft $n_{x\theta}$ für $L_1/L = 0, 10$, $\Theta_1 = 0,127\pi/n$ und $\beta = 30^\circ$

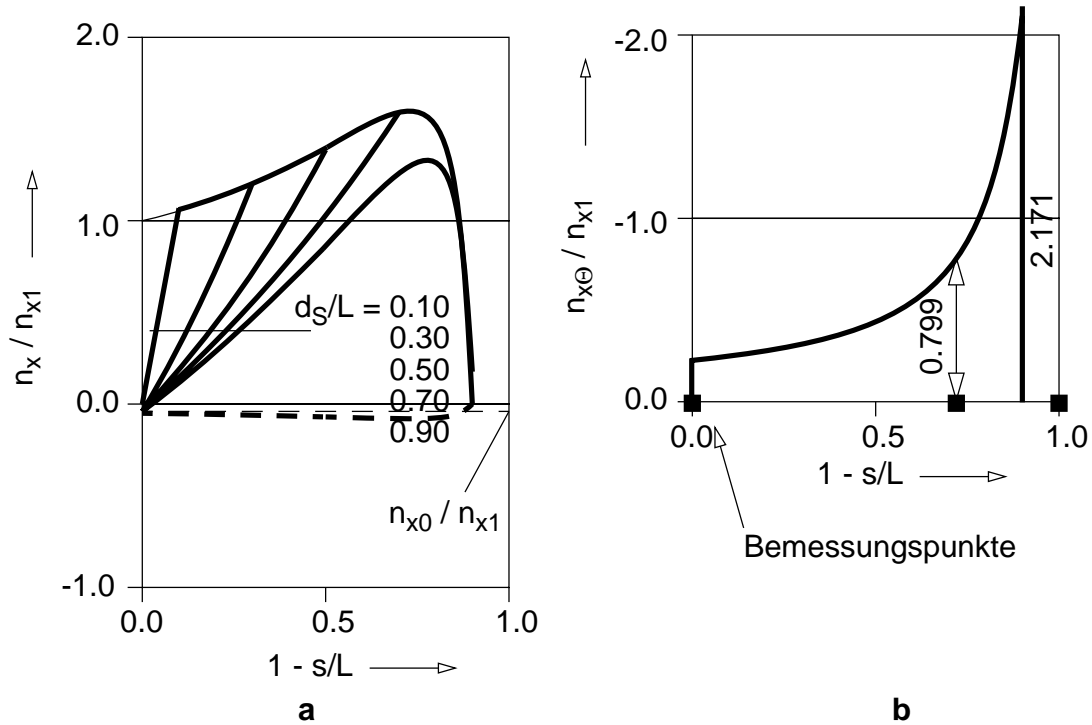


Bild 4-53 Verlauf der Membrankräfte in Meridianrichtung für die lokale Schubkraftlagerung (=Schottblechlagerung) — **a.** Meridiankraft n_x und **b.** Schubkraft $n_{x\theta}$ für verschiedene Verhältnisse von d_S/L bei $L_1/L = 0, 10$, $\Theta_1 = 0,01\pi/n$ und $\beta = 30^\circ$

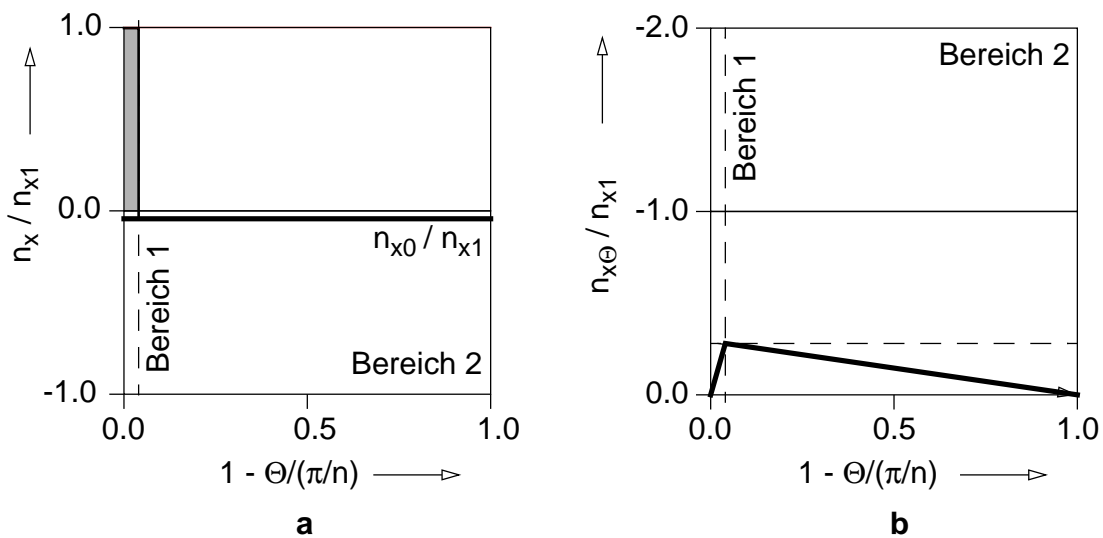


Bild 4-54 Verlauf der Membrankräfte in Umfangsrichtung am oberen Trichterrand für die lokale Schubkraftlagerung (=Schottblechlagerung) — **a.** Meridiankraft n_x und **b.** Schubkraft $n_{x\theta}$ für verschiedene Verhältnisse von d_S/L bei $L_1/L = 0, 10$, $\Theta_1 = 0,01\pi/n$ und $\beta = 30^\circ$

4.5.2.3 Berechnungsbeispiel

Die Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit erfolgt nun für das Anwendungsbeispiel:

- Radius $R = 500$ cm
- Trichterneigung $\beta = 30^\circ$
- Radius-Wanddickenverhältnis $R/t = 500$
- 4 lokale Lagerungen ($n = 4$)
- vereinfachte Trichterbelastung entsprechend Kap. 4.1.6

Die maßgebenden Membranvergleichskräfte n_{eq} werden am unteren Trichterrand ($s = L_1$) und für die Stelle der maximalen Meridiankraft ($s = e \cdot L_1$) bestimmt (Bemessungspunkte in Bild 4-53).

$$n_{\text{eq}, s = L_1} = \sqrt{3 \cdot 2,171^2} \cdot n_{x1} = 3,76 \cdot n_{x1} \quad (4-38a)$$

$$n_{\text{eq}, s = e \cdot L_1} = \sqrt{1,598^2 + 3 \cdot 0,799^2} \cdot n_{x1} = 2,113 \cdot n_{x1} \quad (4-38b)$$

Lokale Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung)

Die Referenzmeridiankraft n_{x1} in (4-39a) für die Meridiannormalkraftlagerung ($d/R = 0,20$) ergibt sich aus der rotationssymmetrischen Randkraft n_{x0} . Diese wird entsprechend der Membrantragfähigkeit des Trichters bei rotationssymmetrischer Lastabtragung mit $n_{x0} \approx f_y t$ angenommen (siehe Kap. 4.2.2.3). Maßgebend ist die Schubkraftbeanspruchung am unteren Rand des Trichters in Gl. (4-39c), daraus folgt der Lastfaktor Λ_2 in Gl. (4-39d).

$$n_{x1} = n_{x0} \cdot \left(\frac{2R\pi}{d \cdot n} - 1 \right) = 6,604 \cdot f_y t \quad (4-39a)$$

$$n_{\text{eq}, s = L_1} = 14 \cdot f_y t \quad (4-39b)$$

$$n_{\text{eq}, s = e \cdot L_1} = 25 \cdot f_y t \quad (4-39c)$$

$$\Lambda_2 = \frac{f_y t}{n_{\text{eq}, s = e \cdot L_1} = 25 \cdot f_y t} = \frac{1}{25} = 0,04 \quad (4-39d)$$

Schottblechlagerung

Für die lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung (Schottblechlagerung) erhält man, aufgrund der verringerten Lasteinleitungsbreite (Bild 4-54) eine noch geringere Tragfähigkeit $\Lambda_2 = 0,001$.

4.5.3 Linear-elastische Spannungsberechnungen

Mittels linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) werden im folgenden die lokalen Lastabtragungen des Trichters untersucht, und zwar zugehörig zur:

- lokalen Schubkraftauflagerung (=Schottblechlagerung)
- lokalen Meridiannormalkraftlagerung (=Randlagerung)

Dabei wird der Differenzzustand entsprechend Bild 4-55 der resultierenden, lokalen Lagerkräfte F bzw. T und den entgegenwirkenden rotationssymmetrischen Meridianrandkräften n_{x0} untersucht.

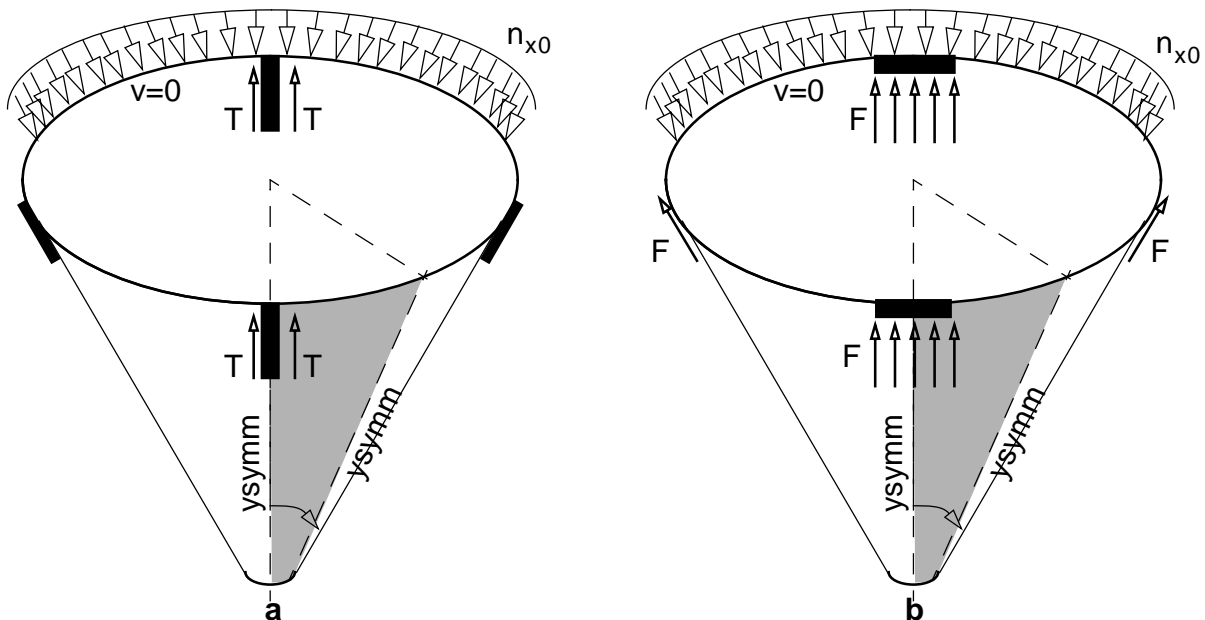


Bild 4-55 Lokale Auflagerung des Trichters — a. Schubkraft- bzw. b. Meridiannormalkraftlagerung

4.5.3.1 Lokale Schubkraftauflagerung (=Schottblechlagerung)

Die approximative Bestimmung plastischer Grenztragfähigkeiten basierend auf linear-elastischen Spannungsberechnungen wird mit folgendem Berechnungsmodell durchgeführt. Die Geometrieparameter des Berechnungsmodelles sind dabei wiederum wie in Kap. 4.3.1 zugrundegelegt:

- Radius $R = 500$ cm
- Trichterneigung $\beta = 30^\circ$
- Radius-Wanddickenverhältnis $R/t = 500$
- 4 Schottblechlagerungen ($n = 4$)
- Lagerlänge $d_S/L = 0, 10/0, 20/0, 30/0, 40/0, 50$

Die Berechnungen werden aufgrund der vorhandenen Symmetriebedingungen an einem 1/8-Ausschnitt durchgeführt. Am oberen Rand des Trichters liegt eine Membranrandbedingung vor. Der untere Trichterradius beträgt $R_1/R = 0,04$.

Darstellung der Membrankräfte

Die Darstellung der Membrankraftverläufe erfolgt für den Differenzzustand der Schubkraftlagerung, das heißt der resultierenden Schottkraft T wirken in Bild 4-55.a die rotationssymmetrischen Meridianrandkräfte n_{x0} am oberen Trichterrand entgegen. Die Verteilung der Druck- und Zugmeridianmembrankräfte n_x weist im Gegensatz zur segmentförmigen (strahlenförmigen) Verteilung der Kräfte der Membranlösung eine wesentliche Umverteilungswirkung in Umfangsrichtung auf. Dies ergibt sich durch das Mitwirken von Schalenquerkräften und Schalenbiegemomenten. Im unteren Bereich des Trichters kommt es zu einem Wechsel von Druck- und Zugbereich.

Der qualitative Verlauf der Membrankräfte bei unendlich nachgiebiger (flexibler) Auflagerung (F) ist in Bild 4-55 bzw. Bild 4-56 dargestellt. Am oberen Rand ist n_x eine Druckkraft und entsprechend den getroffenen Annahmen konstant verteilt. Der Maximalwert von n_x , also als Zugkraft wird am Ende der lokalen Auflagerung erreicht, in Umfangsrichtung erfolgt ein Abklingen bis zur nahezu konstant verteilten Druckmembrankraft. Dieser Maximalwert erreicht je nach Lagerungslänge d_S einen Wert von $n_x = 4 \div 8n_{x0}$. Im unteren Bereich des Trichters wechseln der Druck- und Zugbereich. Die Membranschubkräfte erreichen entlang der lokalen Auflagerung ihren Maximalwert und klingen in Umfangsrichtung analog den Meridiankräften n_x ab. Im unteren Bereich sind sie entlang der Ränder des Berechnungsausschnittes aufgrund der Symmetriebedingungen gleich Null und erreichen in der Mitte des Trichterausschnittes ihren Höchstwert.

Bei starrer Auflagerung sind die Verschiebungen entlang der meridionalen lokalen Lagerlinie behindert. Somit kommt es dort zu einer Dehnungsbehinderung in Meridianrichtung, daraus folgt daß die Meridiankraft n_x entlang der Lagerlinie ebenfalls Null ist. Sie erreicht aber innerhalb kurzer Entfernung von der Auflagerung weg ihren Verlauf bei flexibler Lagerung. Die Schubkräfte $n_{x\Theta}$ erreichen am oberen und unteren Ende der Lagerung, wie in Bild 4-57 dargestellt, einen deutlich erhöhten Wert gegenüber den Schubkräften bei nachgiebiger Auflagerung des Trichters.

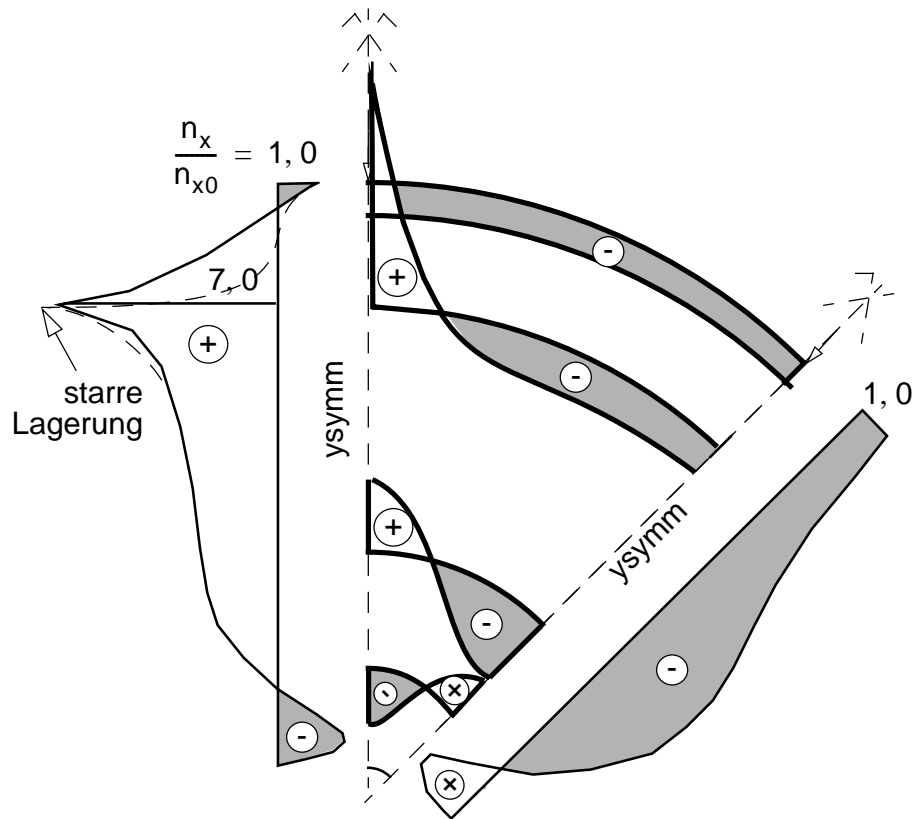


Bild 4-56 Verteilung der Meridianmembrankräfte n_x — dimensionslose Darstellung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d_S/L = 0,20$

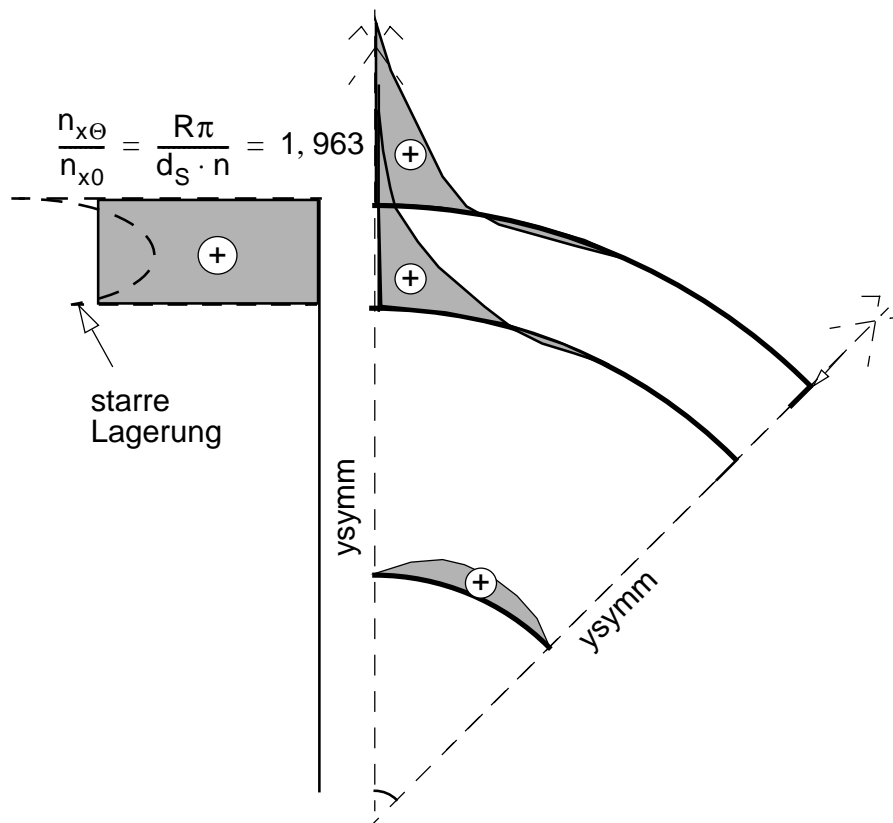


Bild 4-57 Verteilung der Membranschubkräfte $n_{x\theta}$ — dimensionslose Darstellung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und $d_S/L = 0,20$

Approximative Berechnungen plastischer Tragfähigkeiten

Plastische Tragfähigkeiten werden im folgenden auf einfache Art und Weise durch die Beurteilung der entstehenden Membranschnittkraftverläufe im Sinne des vereinfachten “Membran-Fließkriteriums“ (siehe Tab. 4-1) bestimmt.

Die Beanspruchungen der Schalenmittelfläche werden zur Bestimmung der Tragfähigkeit berücksichtigt. Somit bleibt der Einfluß von Biegespannungen, die eine höhere Beanspruchung der Schaleninnen- bzw. Schalenaußenfläche bedeuten, näherungsweise unberücksichtigt.

Dominierend sind im vorliegenden Fall die Meridiankräfte n_x zur Bestimmung der Tragfähigkeit.

Vergleich der Tragfähigkeiten

In Bild 4-58 ist die Tragfähigkeit des Trichters bei lokaler Auflagerung in Meridianrichtung dargestellt. Die resultierende Schubkraft wird dabei auf die maximale, plastische Lagertragkraft T_y bezogen. Als Belastung wirkt die vereinfachte Trichterbelastung entsprechend Kap. 4.1.6. Es erfolgt eine Gegenüberstellung der resultierenden Schubtragkraft T in Abhängigkeit der Lagerungslänge d_S für flexible (F) bzw. starre Auflagerung (R).

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen liefern bei Bestimmung der maßgebenden Vergleichsspannung in der Schalenmittelfläche — also zufolge n_x , $n_{x\Theta}$ und n_Θ — Tragfähigkeiten die ausgedrückt durch die resultierende Lagerkraft T , je nach Lagerlänge d_S circa 70 bis 40% der vollplastischen Lagerkraft T_y erreichen. Die nachgiebige oder starre Auflagerung in Meridianrichtung liefern dabei nur geringfügig unterschiedliche Ergebnisse.

Die plastischen Bemessungsformel (Gl. (4-21)) ergibt eine sehr gute Korrelation zu den berechneten MNA-Tragfähigkeitswerten. Für kürzere Lagerungslängen d_S kann die Fließschubkraft T_y zur Gänze ausgenützt werden. Bei starrer Schottblechlagerung wird eine geringfügige größere Tragfähigkeit als bei flexibler Auflagerung erreicht. Dies begründet sich darauf, daß bei unendlich nachgiebiger (flexibler) Auflagerung — also durch Vorgabe konstant verteilter Schubkräfte entlang der Lagerlinie — der maximal beanspruchte Zone am oberen Rand die Tragfähigkeit beschränkt. Bei starrer Auflagerung besteht hier noch eine Umlagerungsmöglichkeit.

Zusammenfassung

Die Abschätzungen der plastischen Tragfähigkeit aufgrund berechneter Schalenschnittkräfte nach der Membrantheorie als auch nach der linearen Schalenbiegetheorie liefern praktisch unbrauchbare, weil extrem konservativ, Resultate. Hierbei kommt in beiden Fällen, also auch im Fall der lokalen Meridiankraftlagerung, das Kriterium ersten Membranfließens im ungünstigst beanspruchten Punkt der Schalenmittelfläche zur Anwendung. Der Grund liegt im Auftreten extremer Membranspannungsspitzen, welche formal miterfaßt werden müssen.

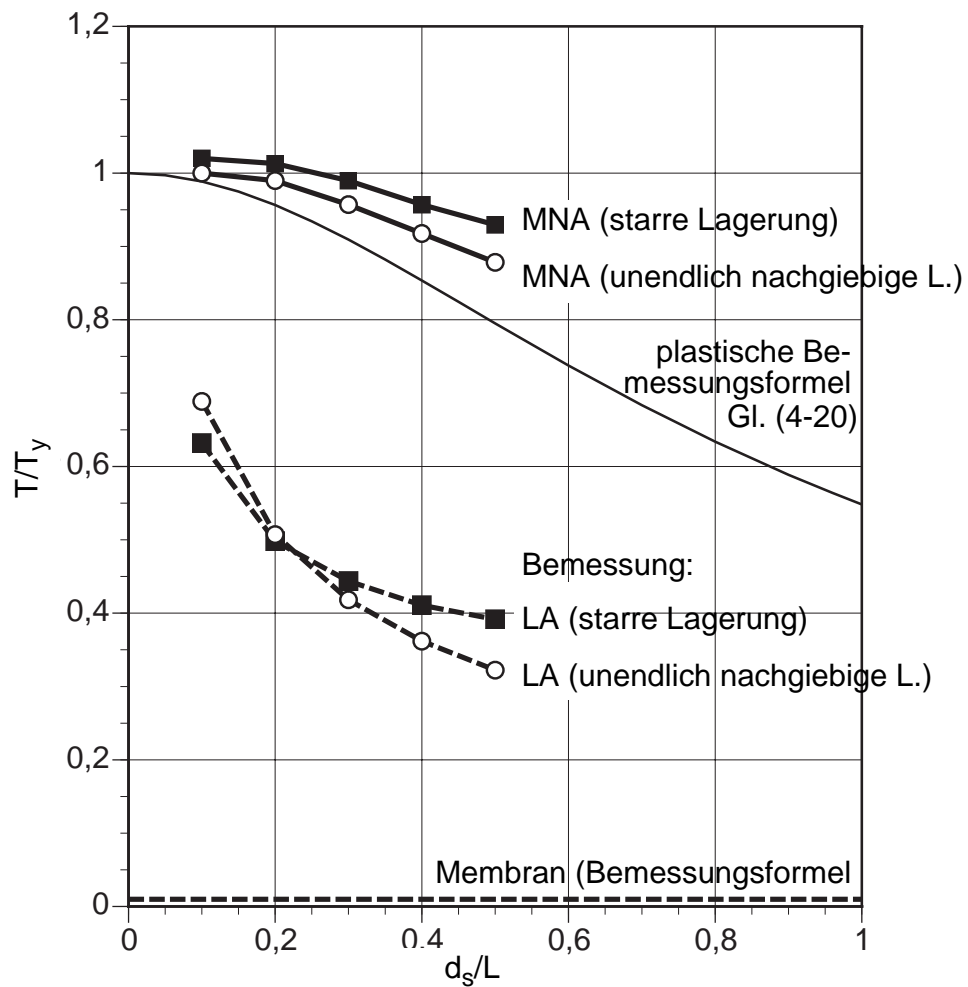


Bild 4-58 Tragfähigkeit des Trichters bei lokaler Lastabtragung in Meridianrichtung ($\Lambda_1 = 0$) bei unendlich nachgiebiger (F) und starrer Schottblechlagerung (R) — $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$ und Trichterbelastung ($p_x + p_n$)

4.5.3.2 Lokale Meridiannormalkraftlagerung

Die Bestimmung der plastischen Tragfähigkeiten basierend auf linear-elastischen Spannungsberechnungen wird wiederum für folgendes Berechnungsmodell in Bild 4-59 durchgeführt:

- Radius $R = 500$ cm
- Trichterneigung $\beta = 30^\circ$
- Radius-Wanddickenverhältnis $R/t = 500$
- 4 Randlagerungen ($n = 4$)
- Lagerbreite $d/R = 0,20$

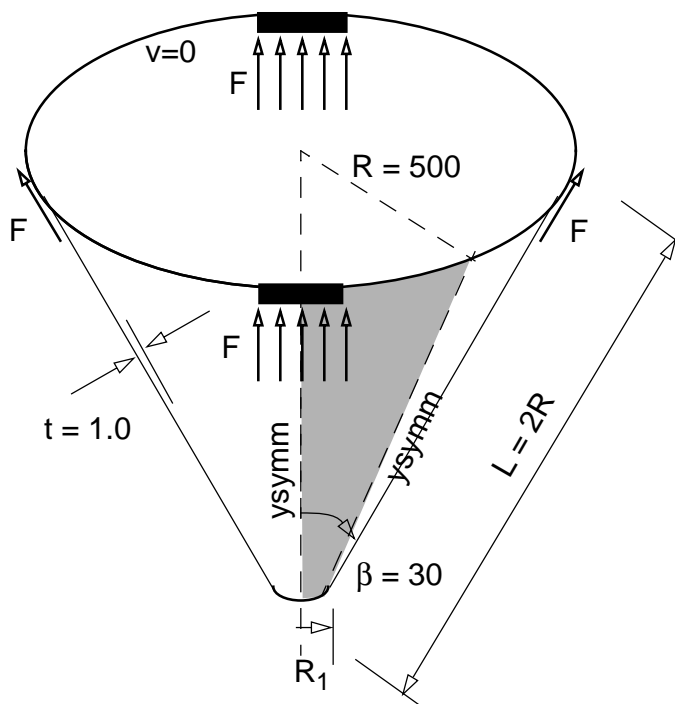


Bild 4-59 Lokale Meridiannormalkraftlagerung des Trichters — Berechnungsmodell und 1/8-Berechnungsausschnitt

Die Berechnungen werden aufgrund der vorhandenen Symmetriebedingungen wiederum an einem 1/8-Ausschnitt durchgeführt. Am oberen Rand des Trichters liegt eine Membranrandbedingung vor. Der untere Trichterradius beträgt $R_1/R = 0,04$.

Bei der Lastabtragung kommt es durch das Mitwirken von Schalenquerkräften und Schalenbiegemomenten zu einer Umverteilung der Membrankräfte in Bild 4-60. In mittlerer Entfernung der Auflagerung weisen die Membrankräfte gleichen Verlauf wie bei der Schottblechauflagerung auf.

Bei nachgiebiger Auflagerung (flexibel) wird die resultierende Lagerkraft F mittels konstant verteilten Meridianrandkräften (Streckenlast) aufgebracht. Am Rand ist somit die Meridiankraft n_x entsprechend dieser Vorgabe abschnittsweise konstant. Bei starrer Auflagerung kommt es lokal zu einer Erhöhung der Meridiankraft am seitlichen Rand des Lagers (in Bild 4-60 nicht dargestellt).

Die Schubkräfte in Bild 4-61 erreichen ihr Maximum am seitlichen Rand des Lagers und haben einen stark abklingenden Verlauf ins Innere der Trichterschalenmittelfläche.

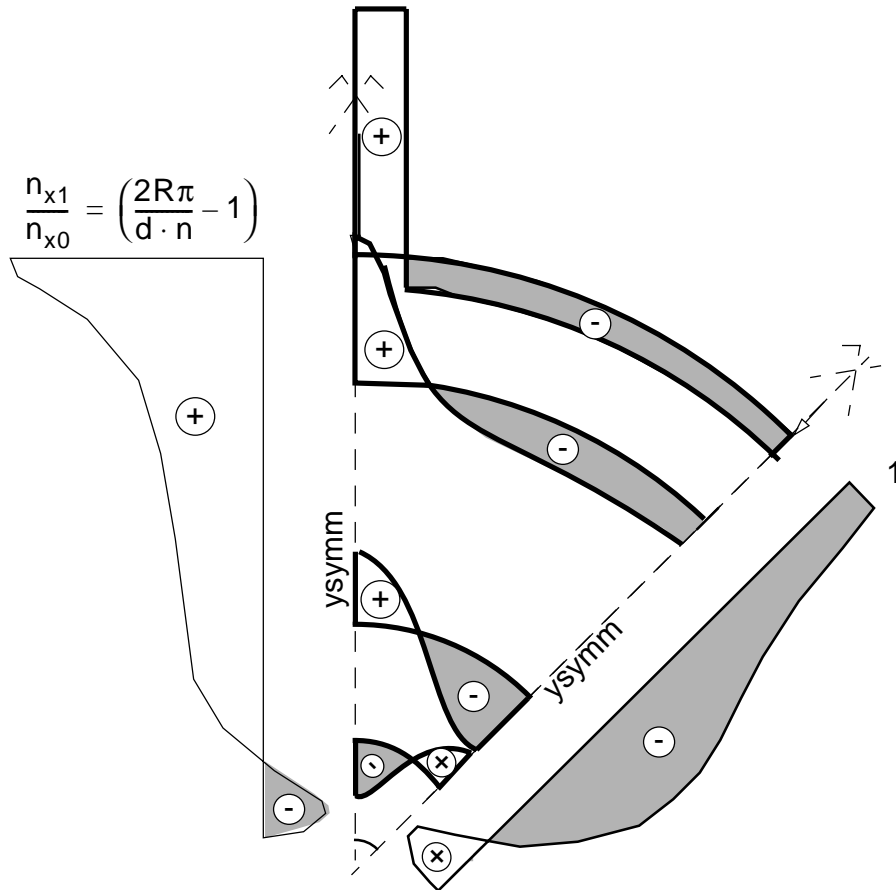


Bild 4-60 Verteilung der Meridiankräfte n_x in dimensionsloser Darstellung (n_x/n_{x0})

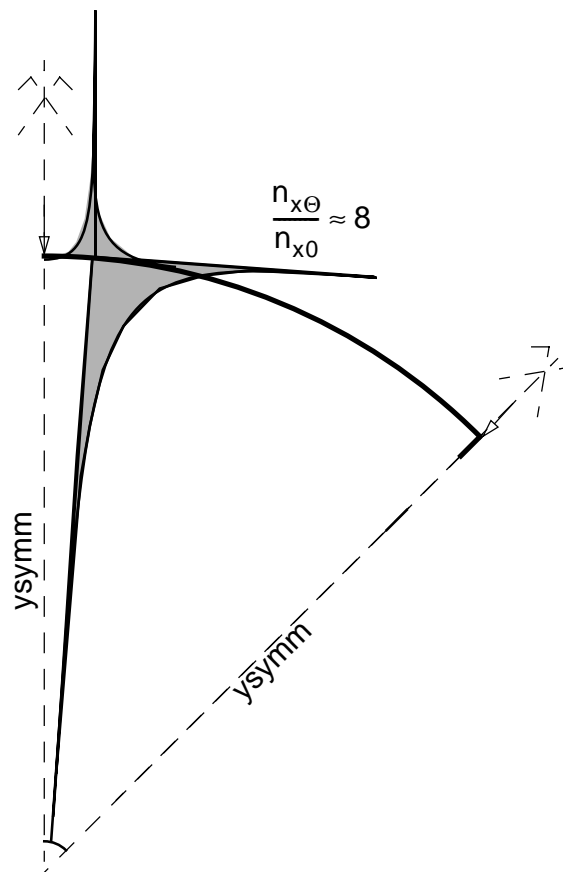


Bild 4-61 Verteilung der Meridiankräfte $n_{x\theta}$ in dimensionsloser Darstellung ($n_{x\theta}/n_{x0}$)

Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeiten

Dominierend sind die Meridiankräfte n_x im Auflagerbereich zur Bestimmung der Tragfähigkeit. Der maximal beanspruchte Ort innerhalb der Lagerbreite liegt durch das lokale Auftreten von hohen Schubkräften $n_{x\Theta}$ am Rand der Auflagerung. Es ergibt sich bei alleiniger lokaler Lastabtragung folgende Vergleichsmembrankraft (zufolge n_x und $n_{x\Theta}$) bzw. folgende Tragfähigkeit $n_{x0, \max}$.

$$n_{\text{eq}} \approx n_{x0} \sqrt{\left(\frac{R2\pi}{d} \frac{1}{n} - 1\right)^2 + 3 \cdot 8^2} \quad (4-40a)$$

$$n_{x0, \max} = \frac{f_y t}{15} \quad (4-40b)$$

Durch die Interaktion mit den Schubspannungen ergibt sich eine stark reduzierte plastische Tragfähigkeit. Werden die Schubkräfte $n_{x\Theta}$ vernachlässigt und nur die Meridiankräfte n_x berücksichtigt, so entspricht die Tragfähigkeit jener von Kap. 4.4.2. In Bild 4-62 sind die Tragfähigkeiten der linear-elastischen Berechnungen bzw. der Membranberechnungen mit jenen der MNA-Berechnungen und den erarbeiteten plastischen Bemessungsformeln verglichen.

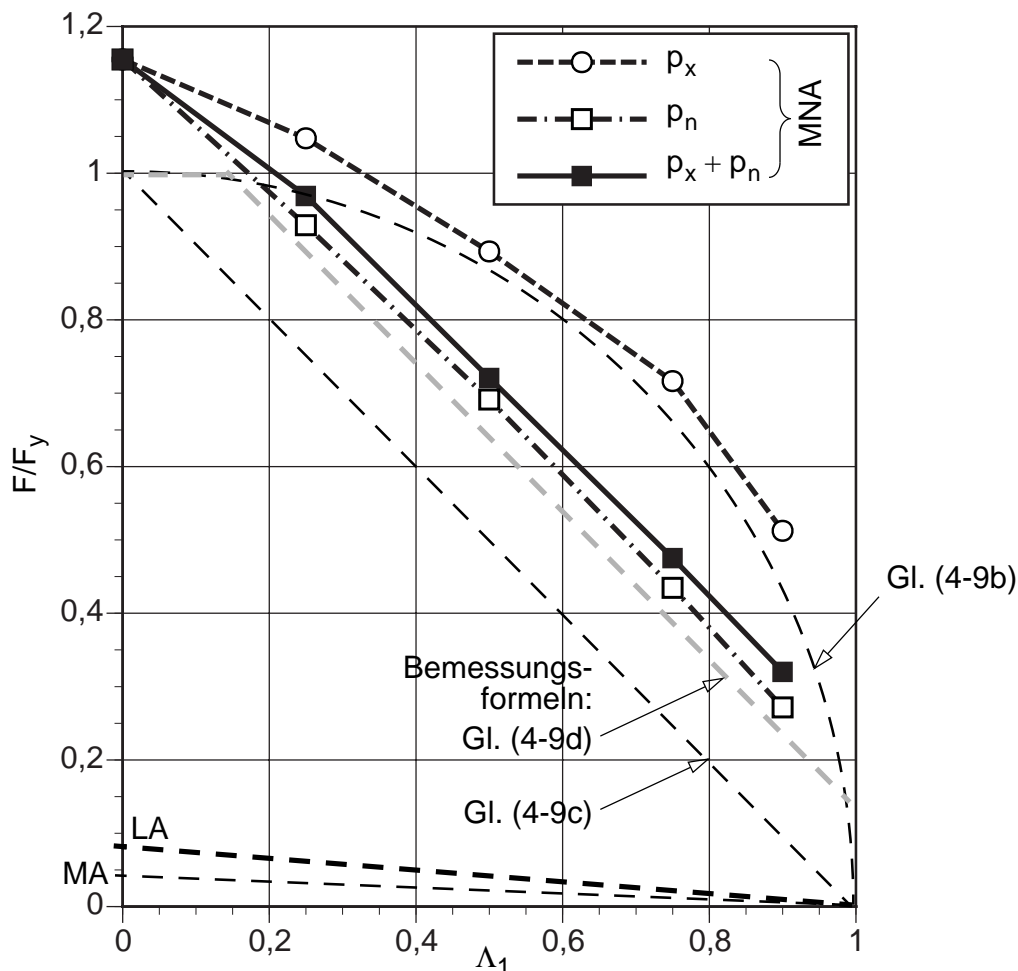


Bild 4-62 Vergleich der Tragfähigkeiten bei globaler (=rotationssymmetrischer) und lokaler Lastabtragung für $R/t = 500$, $\beta = 30^\circ$, $d/R = 0,20$ und Trichterbelastung ($p_x + p_n$)

4.6 Zusammenfassung von Kap. 4

Zusammenfassung

Zusammenfassend ergeben sich bei isolierter Behandlung des Trichters und der Aufteilung der Lastabtragung in einen rotationssymmetrischen Grundanteil — repräsentiert durch konstant verteilte meridionale Randkräfte n_x — und den lokalen Anteil der zusätzlichen lokalen Auflagerungsmöglichkeiten folgende Resultate:

- Der rotationssymmetrische Lastanteil wurde auf Basis der Membrantheorie untersucht. Es ergibt sich erwartungsgemäß eine gute Übereinstimmung mit plastischen Tragfähigkeiten auf Basis der elasto-plastischen Schalenbiegetheorie, welche zusätzlich begünstigende Randeffekte berücksichtigen.
- Die plastische Grenztragfähigkeit des isolierten Trichters setzt sich aus dem rotationssymmetrischen Grundanteil und dem Anteil optional möglicher lokaler Auflagerungen zusammen. Die Interaktionseffekte beider Lastabtragungsmöglichkeiten können auf Basis einfachster Von-Mises-gesteuerter plastischer Interaktionen zutreffend rechnerisch abgeschätzt und in die Form von Bemessungsformeln gekleidet werden. Dadurch können die Ergebnisse der numerischen MNA-Berechnungen ökonomisch und auf der sicheren Seite liegend qualitativ dargestellt werden.
- Alternativ durchgeführte Abschätzungen der plastischen Tragfähigkeiten auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen führen zu unrealistisch kleinen Werten der Tragfähigkeiten. Die Membrantheorie erweist sich zur Bestimmung der Tragfähigkeit der lokalen Auflagerungen des Trichters als gänzlich ungeeignet.

Ausblick

Die isolierte Betrachtung des aus dem Gesamttragwerk herausgelöst gedachten Trichters geht von der Aufteilung der Lastabtragung in einen rotationssymmetrischen Grundanteil (konstant verteilte meridionale Randkräfte n_x) und zusätzlichen lokalen Lagerungsbedingungen bzw. Vorgabe lokaler Auflagerkräfte aus.

Weitere Untersuchungen sind daher hinsichtlich der am Gesamtsystem auftretenden Ungleichförmigkeiten, z.B. zufolge ungleichförmiger meridionaler Randkräfte n_x , der Trichterbeanspruchungen anzustellen. Dabei ist zu klären, ob diese ungleichförmig verteilten Meridianrandkräfte zu einem vorzeitigen Versagen des Trichters führen oder im elasto-plastischen Grenzzustand des Gesamtsystems der rotationssymmetrische Grenzzustand des Trichters, wie in der vorliegenden Studie dieser Arbeit angenommen, tatsächlich erreicht wird.

Weiters wird festgehalten, daß in dieser Studie unsymmetrische Belastungseffekte, wie sie sich aus dem Silobetrieb (Entleerungsvorgänge) ergeben können, in keinsten Weise, wie in der vorliegenden Gesamtarbeit sonst auch, berücksichtigt wurden.

5

TRICHTER-SCHAFT- ÜBERGANG

Inhalt von Kapitel 5:

- 5.1 Einführung**
- 5.2 Untersuchung der Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung**
- 5.3 Entwicklung "vollplastischer" Bemessungsformeln**
- 5.4 Anwendungsbeispiele**
- 5.5 Zusammenfassung von Kap. 5**

5.1 Einführung

Zylindrische Bauteile oder Verbindungen von Zylinder- und Kegelteilen mit und ohne Ringversteifungen werden durch rotationssymmetrische radiale Ringlasten beansprucht. Diese Ringlasten entstehen vielfach durch die Umlenkkomponenten von Meridiankräften. Da die lokal auftretenden Beanspruchungen vielfach — wie im Fall des Trichter-Schaft-Übergangsbereiches von Silokonstruktionen (siehe Bild 5-1) — sehr hoch ist, ist dies für die Bemessung von Bedeutung.

5.1.1 Verwendung mitwirkender Breiten

Die Anwendung elastischer mitwirkender Breiten für die Berechnung von rotationssymmetrischen Schalenteilen, die durch eine rotationssymmetrische Ringlast belastet werden, wurde von mehreren Autoren vorgeschlagen. (z.B. Mang (1966)). Die mitwirkenden Breiten werden aus der elastizitätstheoretischen Biegelösung der axialsymmetrisch belasteten Kreiszylinderschale bzw. Kugelschale ermittelt und können somit als elastische mitwirkende Breiten bezeichnet werden.

Die plastische mitwirkende Breite wird aus der plastischen Tragfähigkeit einer Schale bei radialer Ringlast rückgerechnet. Grundlegende Arbeiten dazu stammen von Sawzuk und Hodge (1960). Dabei finden ein allfälliger Innen- bzw. Außendruck oder eine Axialbelastung der Schale keine Berücksichtigung. Der Vorschlag zur Verwendung von plastischen mitwirkenden Breiten stammt von Rotter (1987) und wurde von Teng & Rotter für Schalenstöße mit Wanddickensprung modifiziert (1991,1996). Die Bestimmung der Tragfähigkeit mithilfe dieser mitwirkenden Breiten und wird von den Autoren als “effective area method” bezeichnet.

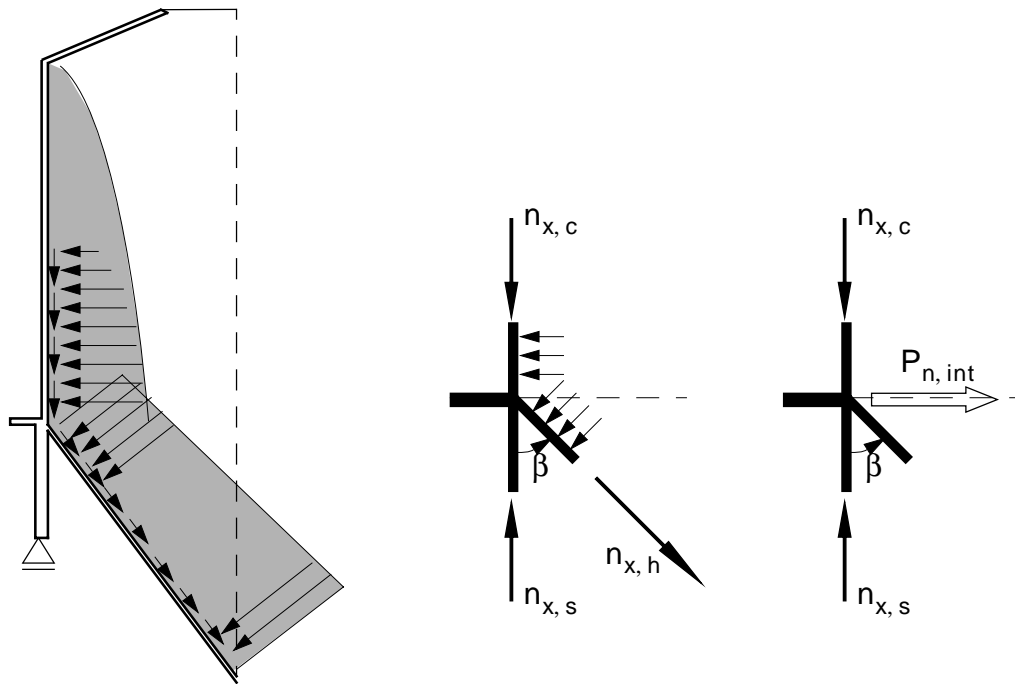


Bild 5-1 Rotationssymmetrisch belasteter Silo und radiale Ringlast am Trichter-Schaft-Übergang, die aus der Umlenkkomponente der Meridianmembrankraft $n_{x,h}$ des Trichters folgt

5.1.2 Problemstellung

Die Berechnung der Tragfähigkeit von Schalenstößen nach Rotter und Teng (1987,1991,1996) erfolgt durch die Berechnung an einem Ersatzring, der durch die plastischen mitwirkenden Breiten der einzelnen Schalenteile definiert ist, durch die Bestimmung von Umfangsspannungen zufolge der radialen Ringlast und der Superposition mit jenen zufolge der Radialdruckbelastung an den einzelnen Schalenteilen. Bei komplexeren Stößen wird die Überlagerung der Umfangsspannungen im Stoßbereich vorab durch eine Gleichgewichtsbetrachtung in radialer Richtung durch die folglich Bestimmung der resultierenden radialen Ringlast. Die Membranmeridianspannungen der einzelnen Schalenteile werden dabei nicht berücksichtigt.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die plastische Tragfähigkeit von Schalenstößen unter Einbeziehung der Beanspruchungen (Membrangrundspannungen der Schalenteile) aus konstanten Radialdruck- und Axialbelastungen zu bestimmen.

Ausgehend von materiell nichtlinearen FE-Berechnungen an einer Kreiszyinderschale mit konstanter Wanddicke unter radialer Ringlast mit Radialdruck- bzw. Axialbelastung wird eine Bemessungsformel entwickelt. Dabei werden modifizierte mitwirkende Breiten in Abhängigkeit des Membrangrundzustandes berechnet. Deren Anwendung wird für signifikante Beispiele gezeigt und mit den nach Rotter bzw. Teng bestimmten Tragfähigkeiten bzw. mit den Ergebnissen von materiell nichtlinearen Berechnungen verglichen.

5.1.3 Existierende Lösungen für spezielle Fälle

Die plastischen mitwirkenden Breiten ergeben sich durch Rückrechnung aus der plastischen Tragfähigkeit der untersuchten Schalenkonfiguration. Ausgangspunkt ist die plastische Tragfähigkeit der kreiszylindrischen Schale mit konstanter Wanddicke.

5.1.3.1 Plastische mitwirkende Breiten für Kreiszylinderschalen

Bild 5-2 zeigt die Möglichkeiten des Angriffes der radialen Ringlast an einer Kreiszylinderschale und die zugehörigen mitwirkenden plastischen Breiten $b_{\text{eff, pl}}$. Der Basisfall ist die Kreiszylinderschale mit konstanter Wanddicke. Zum Vergleich sind die elastischen mitwirkenden Breiten $b_{\text{eff, el}}$ dargestellt.

Radiale Ringlast im Schaleninneren (Bild 5-2a)

Die plastische mitwirkende Breite ergibt sich durch Rückrechnung aus der plastischen Tragfähigkeit bei Belastung durch radiale Ringlast (Sawzuk und Hodge (1960), Rotter (1987)).

$$P_{n, \text{pl}} = 1,95 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-1)$$

Radiale Ringlast am freien Schalenrand (Bild 5-2b)

Für eine am freien Schalenrand angreifende radiale Ringlast ergibt sich folgende plastische Tragfähigkeit (Rotter und Teng (1991)) in Gl. (5-2):

$$P_{n, \text{pl}} = 0,690 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-2)$$

Mitwirkende Breiten bei Wanddickensprüngen (Bild 5-2c)

In Abhängigkeit des Wanddickenverhältnis $\eta = t_1/t_2$ in Gl. (5-3a) ergibt sich nach Rotter und Teng (1991) folgende abgeminderte mitwirkende Breite für den dickeren Schalenteil (t_2) in Gl. (5-3c), die mitwirkende Breite des dünneren Teiles bleibt unverändert.

$$\gamma = 0,7 + 0,6 \cdot \eta^2 - 0,3 \cdot \eta^3 \quad (5-3a)$$

$$b_{\text{eff, 1}} = 0,975 \cdot \sqrt{R} \cdot t_1 \quad (5-3b)$$

$$b_{\text{eff, 2}} = 0,975 \cdot \gamma \cdot \sqrt{R} \cdot t_2 \quad (5-3c)$$

Die Abminderung erfolgt mit dem Faktor γ , in den das Wanddickenverhältnis $\eta = t_1/t_2$ eingeht. Der untere Grenzfall liegt vor, wenn $t_1 = 0$ ist, es liegt ein Zylinder mit freiem Ende vor. Der Korrekturbeiwert γ wird dann zu $\gamma = 0,7$ ($= 0,690/0,975$). Der obere Grenzfall liegt vor, wenn

$t_1 = t_2$ ist, der Korrekturbeiwert γ wird dann zu $\gamma = 1$. Die Darstellung des Korrekturbeiwertes erfolgt in Bild 5-3.

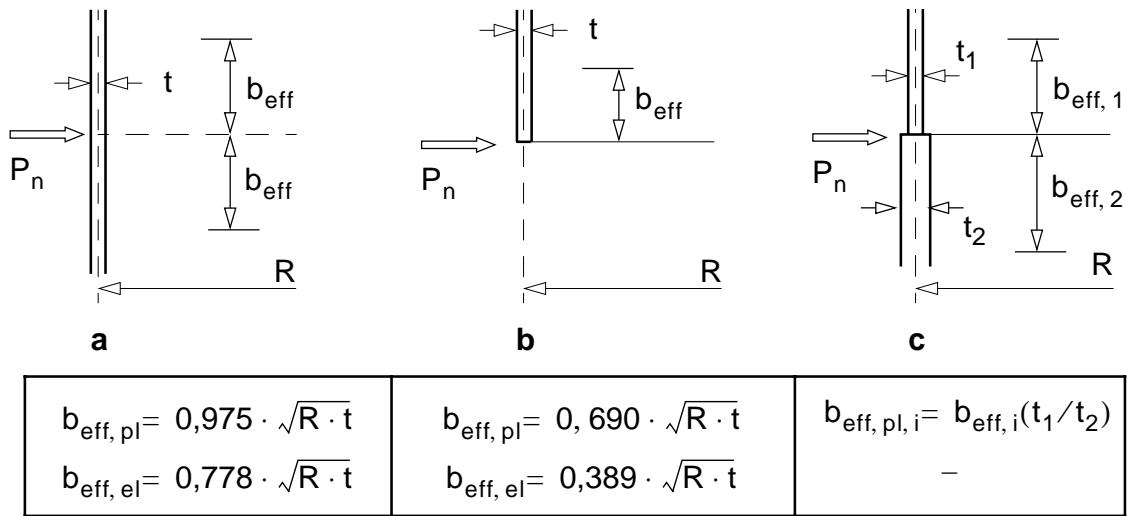


Bild 5-2 Mitwirkende Breiten von Kreiszylinderschalen bei Radialbelastung **a.** im Schaleninneren bei konstanter Wanddicke, **b.** am freien Schalenrand und **c.** am Waddickensprung

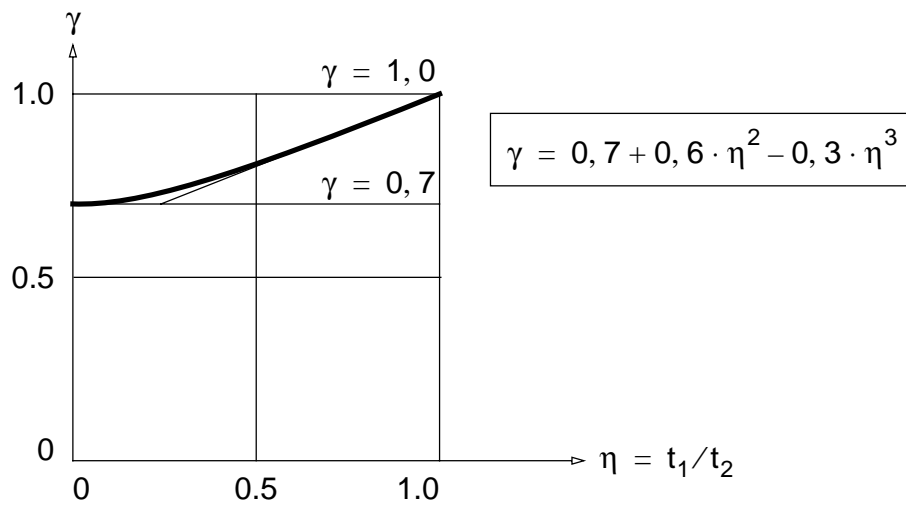


Bild 5-3 Korrekturbeiwert γ zur Berücksichtigung von Waddickensprüngen

5.1.3.2 Mitwirkende Breiten von Kegelschalen

Der Vorschlag von plastischen mitwirkenden Breiten für Kegelschalen stammt von Rotter (1987) und wurde später in Zusammenarbeit mit Teng mittels materiell nichtlinearer Berechnungen für verschiedenste R/t - Verhältnisse und mehrere Neigungswinkel β des Kegels überprüft (1991).

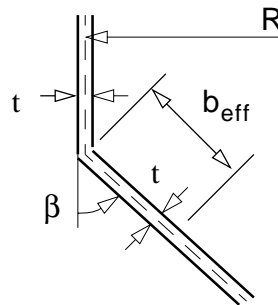


Bild 5-4 Mitwirkende Breite von Kegelschalen

Die mitwirkende Breite von Kegelschalen in Gl. (5-4) ergibt sich anstelle des Zylinderradius R aus dem Hauptkrümmungsradius $R_K = R / \cos \beta$ in Umfangsrichtung.

$$b_{\text{eff, pl}} = 0,975 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot t}{\cos \beta}} \quad (5-4)$$

5.1.3.3 Berechnung der Tragfähigkeit von Schalenstößen nach Rotter und Teng

Aufbauend auf den zuvor dargestellten mitwirkenden Breiten wurde von Rotter & Teng die “effective area method“ zur Berechnung der plastischen Tragfähigkeit von Schalenstößen entwickelt.

Die plastische Tragfähigkeit wird durch die Anwendung der mitwirkenden Breiten berechnet, die resultierende radiale Ringlast ergibt sich aus dem radialen Gleichgewicht unter Einbeziehung der inneren und äußeren radialen Ringlast und den innerhalb der mitwirkenden Breiten wirkenden Radialdruckbelastung. Bei komplexen Stößen von Schalentteilen - z.B. Zylinder, Ringsteife, Standzarge und Kegel - bildet man zwei Schalengruppen, deren Trennung durch die radiale Ringlast gegeben ist. Für jede Gruppe wird eine äquivalente Wanddicke t_{eq} berechnet. Damit wird analog der Kreiszyinderschale mit Wanddickensprung eine Abminderung für den dickeren Teil — hier der “dickeren“ Schalengruppe — vorgenommen.

$$t_{\text{eq}} = \sqrt{\sum t_i^2} \quad (5-5)$$

Für die Gruppe mit der größeren äquivalenten Schalendicke - Gruppe B - ist der Korrekturbeiwert γ zu berechnen. Somit kann für jeden Schalenteil die mitwirkende Breite $b_{\text{eff, i}}$ berechnet werden. Die aufnehmbare radiale Ringlast ergibt sich aus der Gleichgewichtsgleichung in radialer Richtung. In Bild 5-5 ist die Anwendung für ein Beispiel des Silobaus — den Trichter-Schaft-Übergang — illustriert.

$$\eta = t_{\text{eq},A} / t_{\text{eq},B}$$

$$\gamma = 0,7 + 0,6 \cdot \eta^2 - 0,3 \cdot \eta^3$$

(5-6)

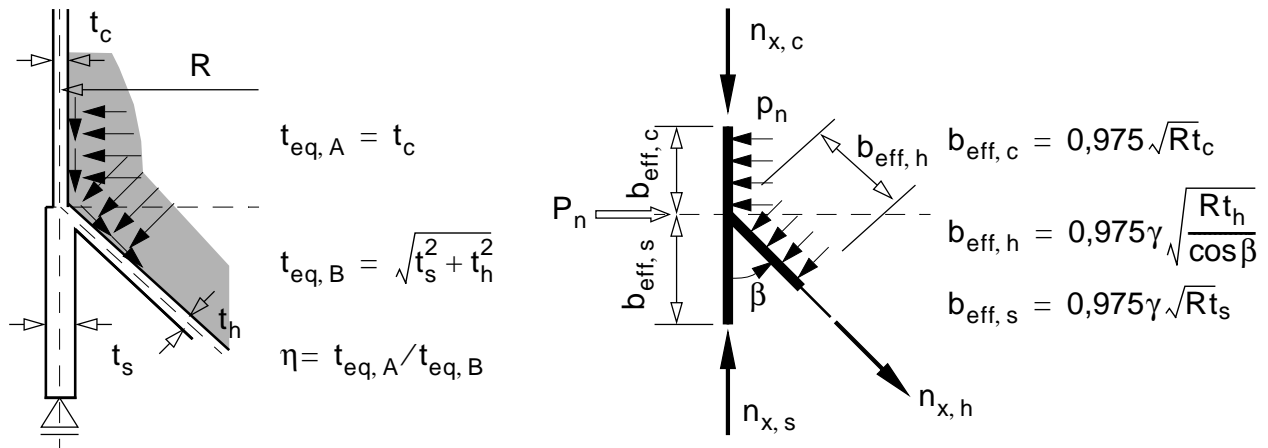


Bild 5-5 Übergangsbereich von Trichter, Schaft und Standzarge und die Anwendung der mitwirkenden Breiten

Die radiale Ringlast entsteht einerseits aus der Umlenkwirkung der Meridiankräfte $n_{x,h}$ des Trichters $P_{n,int}$, andererseits kann noch zusätzlich eine äußere Ringlast am Trichter wirken ($P_{n,ext}$). In die Gleichgewichtsbeziehungen in radialer Richtung gehen neben den radialen Ringlasten noch die resultierenden Radialkräfte zufolge der Radialdruckbelastung im Bereich der mitwirkenden Breiten ein. Die plastische Tragfähigkeit ergibt sich aus der Summe der mitwirkenden Flächen der angrenzenden Schalteile und einem allfällig vorhandenen zusätzlichen externen Ring (Fläche A_R) in Gl. (5-7c).

$$P_{n,int} = n_{x,h} \cdot \sin \beta \quad (5-7a)$$

$$P_n = P_{n,ext} + P_{n,int} - (b_{\text{eff},c} \cdot p_n + b_{\text{eff},h} \cdot p_n \cdot \cos \beta) \quad (5-7b)$$

$$P_{n,pl} = \frac{f_y}{R} (\sum b_{\text{eff},i} \cdot t_i + A_R) = \frac{f_y}{R} (b_{\text{eff},c} \cdot t_c + b_{\text{eff},h} \cdot t_h + b_{\text{eff},s} \cdot t_s) \quad (5-7c)$$

5.2 Untersuchung der Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung

5.2.1 Rechenmodell und Untersuchungsplan

Die Berechnung der aufnehmbaren radialen Ringlast einer Kreiszylinderschale wird bei folgenden Belastungsfällen durchgeführt:

- Radiale Ringlast im Schaleninneren bei konstanter Wanddicke (symmetrisches Berechnungsmodell (Bild 5-6.a))
- Radiale Ringlast am freien Schalenrand (Bild 5-6.b)

Es wird die Interaktion mit einer rotationssymmetrischen Innen- bzw. Außendruckbelastung p_n (Radialdruck) und Axialbelastung P_x — also den daraus resultierenden konstant verteilten Meridian- und Umfangsspannungen — der Schale untersucht. Diese konstant verteilten Spannungen werden im weiteren auch als Membrangrundspannungen bezeichnet.

Die plastische Tragfähigkeit wird dabei folgendermaßen bestimmt:

- Berechnung der Tragfähigkeit auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen zufolge der maximalen Vergleichsspannung an der Schaleninnen- bzw. -außenseite (Fließen des maximal beanspruchten Punktes)
- Vereinfachte Berechnung der plastischen Tragfähigkeit durch die Abminderung der Fließgrenze zufolge der konstanten Meridian- und Umfangsgrundspannungen und der folglich Berechnung einer reduzierten plastischen Tragfähigkeit
- Materiell nichtlineare FE-Berechnungen (ABAQUS (1997)) an einer kreiszylindrischen Schale

Das zugrundegelegte elasto–plastische Materialverhalten entspricht in etwa jenem von Baustahl St 37:

- $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$
- $f_y = 25 \text{ kN/cm}^2$

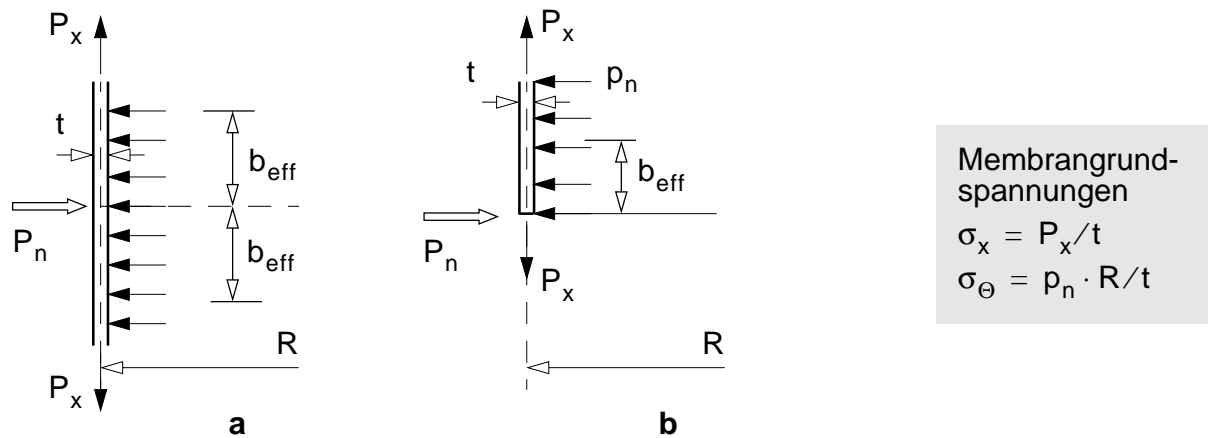


Bild 5-6 Berechnungsmodelle — **a.** symmetrisches Berechnungsmodell (Belastung im Schaleninneren) und **b.** Schale mit am freiem Rand angreifender radialer Ringlast

5.2.2 Radiale Ringlast im Schaleninneren

5.2.2.1 Symmetrisches Berechnungsmodell

Die linearen Spannungsberechnungen und die materiell nichtlinearen Berechnungen erfolgen an einem symmetrischen Berechnungsmodell, wobei die halbe Länge L des Modelles circa doppelt so groß wie die Abklinglänge L_B der Randbiegestörung ist und damit der Randeinfluß nicht gegeben ist.

$$L = 250 \text{ cm} > L_B \approx 5 \cdot \sqrt{R \cdot t} = 5 \cdot \sqrt{500 \cdot 1,0} = 112 \text{ cm} \quad (5-8)$$

Die lineare Spannungsberechnung erfolgt analytisch durch Lösung der Differentialgleichung für die axialsymmetrisch belastete Kreiszylinderschale und kann in dimensionsloser Form in Bild 5-8 dargestellt werden.

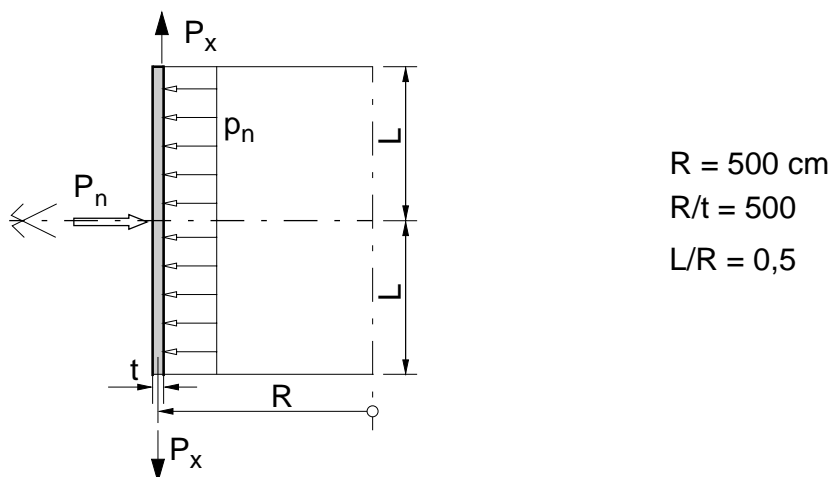


Bild 5-7 Berechnungsmodell und Systemparameter

5.2.2.2 Spannungsbasierte Berechnung der Tragfähigkeit

Zu Vergleichszwecken wird die Interaktion zwischen radialer Ringlast, Radialdruck und Axialbelastung auch mittels linear-elastischen Spannungsberechnungen untersucht. Das Kriterium für die Tragfähigkeit ist das Erreichen der maximal zulässigen Vergleichsspannung in der maximal beanspruchten Umfangslinie an der Schaleninnen-, -mittel- bzw. -außenfläche.

Spannungsverteilungen bei radialer Ringlast

In Bild 5-8 sind die Spannungen bei Belastung durch die radiale Ringlast bei Erreichen der Tragfähigkeit in Gl. (5-9) auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen dimensionslos dargestellt. Für die Bestimmung der Tragfähigkeit ist die Vergleichsspannung an der Schaleninnenseite maßgebend.

$$P_{n,el} = 0,748 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-9)$$

Als Bezugsgröße der Darstellungen wird folgende Referenzspannung in Gl. (5-10) verwendet.

$$\sigma_{\Theta,ref} = \frac{P_{n,el}}{t} \sqrt{\frac{R}{t}} \quad (5-10)$$

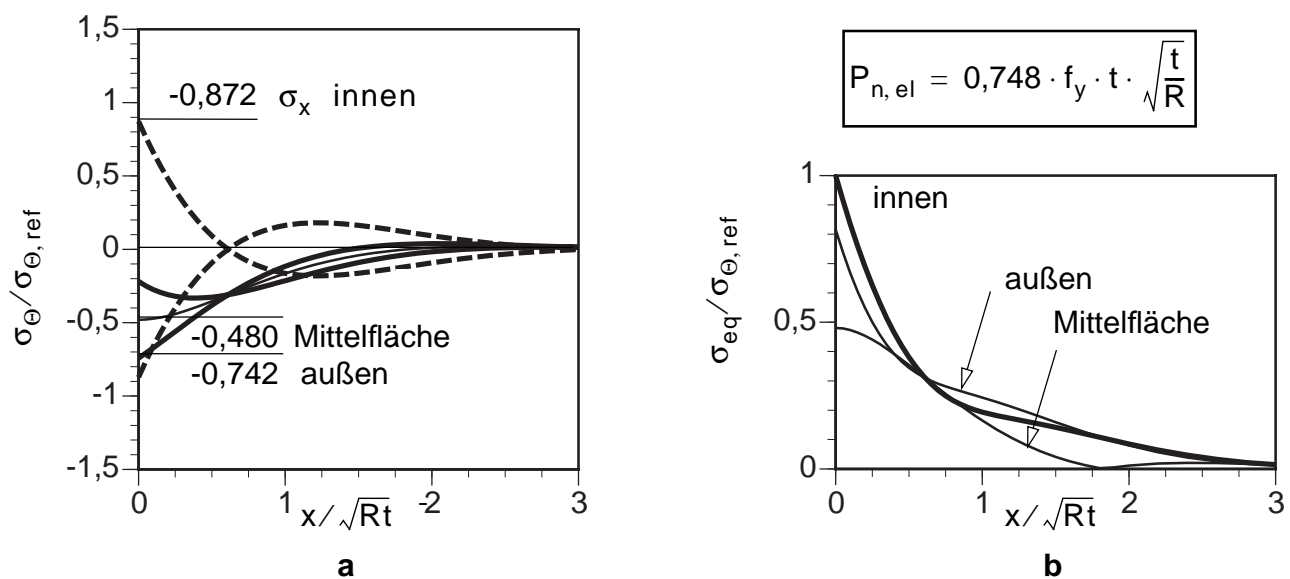


Bild 5-8 Symmetrische Schale — **a.** Axial- und Umfangsspannungen bzw. **b.** Vergleichsspannungen bei radialer Ringlast bei linearer Berechnung

Interaktion von radialer Ringlast mit Axial- und Radialdruckbelastung

Die Interaktion mit konstanten Radialdruck- und Axialbelastungen erfolgt durch Berechnung der Vergleichsspannungen in der maßgebenden Umfangslinie. Diese liegt je nach Größe der Meridian- und Umfangsgrundspannungen nicht mehr unter der Umfangslinie der radialen Ringlast.

In Bild 5-9 sind die Tragfähigkeiten in Form eines Schichtendiagrammes dargestellt. Die Ordinaten sind die auf die Fließgrenze f_y bezogenen Grundspannungen σ_x und σ_θ . Die Schichtenlinien stellen die Tragfähigkeit bezüglich der radialen Ringlast dar. Als Scharparameter dient die bezogene Tragfähigkeit $P_n/P_{n,ref}$, wobei als Bezugswert die vollplastische Tragfähigkeit $P_{n,pl}$ der Schale verwendet wird.

$$P_{n,ref} = P_{n,pl} = 1,95 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{\frac{t}{R}} \tag{5-11}$$

Die maximale Tragfähigkeit wird bei Radialdruckbelastung erzielt ($\sigma_\theta > 0$). Wird die Tragfähigkeit bereits durch die Membrangrundspannungen aufgezehrt, so kann keine radiale Ringlast abgetragen werden, diesen Zustand stellt die Mises-Ellipse bei $P_n/P_{n,ref} = 0$ dar (dick ausgezogene Umrandungsellipse in Bild 5-9).

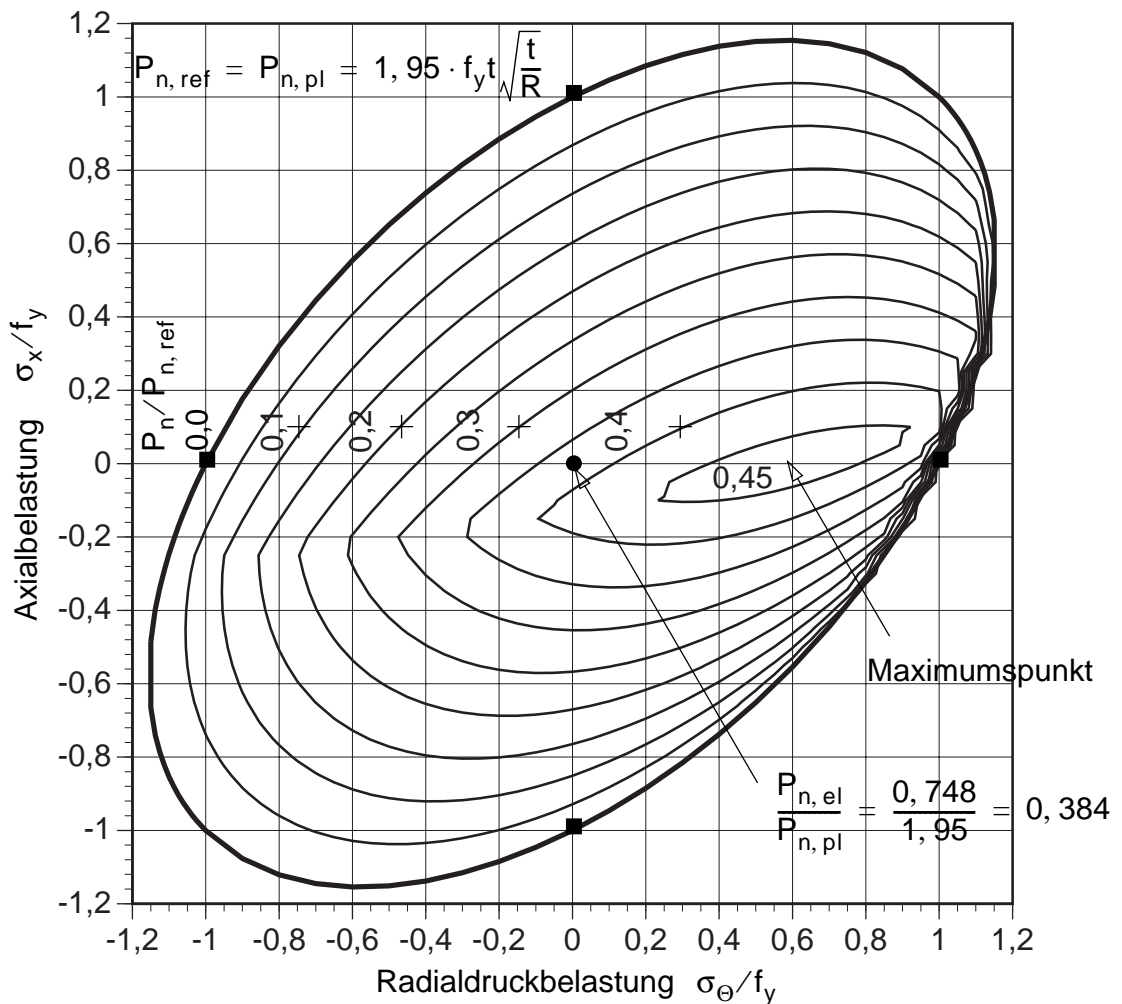


Bild 5-9 Symmetrische Schale — auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen berechnete Tragfähigkeiten bei Interaktion der radialen Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung

5.2.2.3 Approximative Berechnung der Tragfähigkeit

Die Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit kann approximativ durch einfache Superposition des Radialdruckes im Gleichgewicht in Radialrichtung erfolgen (Gl. (5-12a) bzw. Gl. (5-12b)).

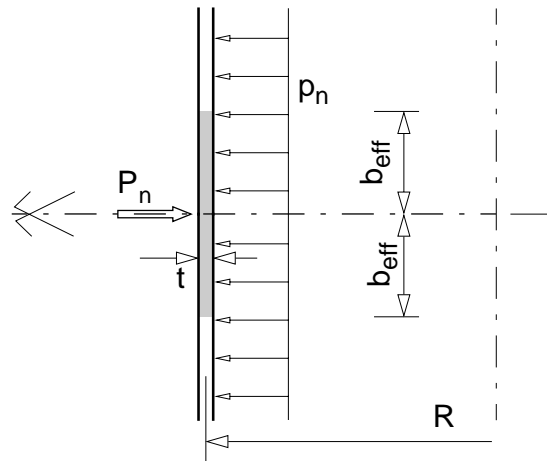


Bild 5-10 Belastung der Zylinderschale im Schaleninneren durch die radiale Ringlast und Radialdruck

Das Gleichgewicht in radialer Richtung bzw. die Superposition der Umfangsspannungen (Gl. (5-12a)) ergibt einen linearen Zusammenhang in Abhängigkeit der aktuellen Radialdruckbelastung. Eine Steigerung der aufnehmbaren Ringlast erfolgt bei Innendruckbelastung und eine Minderung bei Außendruckbelastung (Gl. (5-12b)).

$$P_n - p_n \cdot 2b_{\text{eff}} = 2b_{\text{eff}} \cdot \frac{t}{R} \cdot f_y \quad \text{mit } p_n = \sigma_{\Theta} \cdot \frac{t}{R} \quad \text{ergibt:} \quad (5-12a)$$

$$P_n = 2b_{\text{eff}} \cdot \frac{t}{R} \cdot f_y + p_n \cdot 2b_{\text{eff}} = P_{n,\text{pl}} \left(1 + \frac{\sigma_{\Theta}}{f_y} \right) \quad (5-12b)$$

Zusatzannahme: Reduktion der Fließgrenze zur Berücksichtigung der Membrangrundbeanspruchungen

Die Reduktion der Fließgrenze f_y zufolge der vorhandenen Meridian- und Umfangsgrundspannungen hat die Reduktion der plastischen Tragfähigkeit bezüglich der aufnehmbaren radialen Ringlast zur Folge. Die Fließgrenze $f_{y,\text{red}}$ wird zufolge der vorhandenen Vergleichsgrundspannung σ_{eq} berechnet.

$$f_{y,\text{red}} = f_y \cdot \sqrt{1 - (\sigma_x^2 + \sigma_{\Theta}^2 - \sigma_x \sigma_{\Theta}) / f_y^2} = f_y \cdot \sqrt{1 - \sigma_{\text{eq}}^2 / f_y^2} \quad (5-13)$$

Die vereinfacht berechnete Tragfähigkeit ergibt sich in Gl. (5-14). Die Radialdruckbelastung ergibt nach wie vor in Übereinstimmung mit Gl. (5-12b) (Gleichgewicht in radialer Richtung) eine Steigerung, wenn die Ringlast und die Radialdruckbelastung entgegengesetzt gerichtet wirken, bzw. eine Verringerung der Tragfähigkeit, wenn die Ringlast und die Radialdruckbelastung in gleicher Richtung wirken.

$$P_n = P_{n,\text{pl}} \left(1 + \frac{\sigma_{\Theta}}{f_y} \right) \cdot \sqrt{1 - \sigma_{\text{eq}}^2 / f_y^2} \quad (5-14)$$

Bei Interaktion von radialer Ringlast und konstanter Radialdruckbelastung alleine in Gl. (5-15a) bzw. radialer Ringlast und konstanter Axialbelastung alleine in Gl. (5-15b) vereinfacht sich Gl. (5-14):

$$P_n = P_{n,pl}(1 + \sigma_\Theta/f_y) \cdot \sqrt{1 - \sigma_\Theta^2/f_y^2} \quad \text{bei } P_x = 0 \quad (5-15a)$$

$$P_n = P_{n,pl}\sqrt{1 - \sigma_x^2/f_y^2} \quad \text{bei } p_n = 0 \quad (5-15b)$$

Die damit berechneten Tragfähigkeiten werden in Bild 5-13 bis Bild 5-15 den Tragfähigkeiten der linearen bzw. materiell nichtlinearen Berechnungen gegenübergestellt.

5.2.2.4 Materiell nichtlineare Berechnungen (MNA)

Für die jeweilige Kombination von Radialdruck und Axialbelastung wird die aufnehmbare radiale Ringlast ermittelt. Das Materialverhalten wird als ideal-elasto-plastisch angenommen. Die Durchführung der FE-Berechnungen erfolgten mit ABAQUS (1997).

Als Referenzbelastungswert wird die bekannte vollplastische Tragfähigkeit für die Belastung nur durch die radiale Ringlast verwendet.

$$P_{n,ref} = P_{n,pl} = 1,95 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-16)$$

Spannungsverteilungen bei radialer Ringlast

In Bild 5-11 und Bild 5-12 sind die Verteilungen der Spannungen für zwei Laststufen der materiell nichtlinearen Berechnung (MNA) dargestellt. Die Darstellung anhand der Spannungsverteilungen, dient zu Vergleichszwecken mit den linear-elastischen Spannungsverteilungen (Bild 5-8). Eine Beurteilung des plastischen Versagensmechanismus kann aber sinnvollerweise nur mit den Schnittkraft- bzw. Schnittmomentenverteilungen erfolgen.

- $\Lambda = 0,610$ stellt jene Laststufe dar, bei der in etwa die Last des ersten Fließens des maximal beanspruchten Punktes um 60% überschritten wird.
- $\Lambda = 1,0$ ist jene Laststufe, bei der die Traglast erreicht wird.

In den Verteilungen der Vergleichsspannungen erkennt man die zunehmende Ausbildung der plastischen Zonen in der Schale. Die Verteilung der Meridianspannungen σ_x geben teilweise Aufschluß über den plastischen Tragmechanismus auf. Unter der radialen Ringlast und in $x/\sqrt{Rt} \approx 1$ bilden sich sogenannte Fließgelenke in der Schale aus.

Die Zusatzbezeichnungen (m), (i) und (a) in Bild 5-11 und Bild 5-12 beziehen sich auf die Mittel-, Innen- und Außenfläche der Schale.

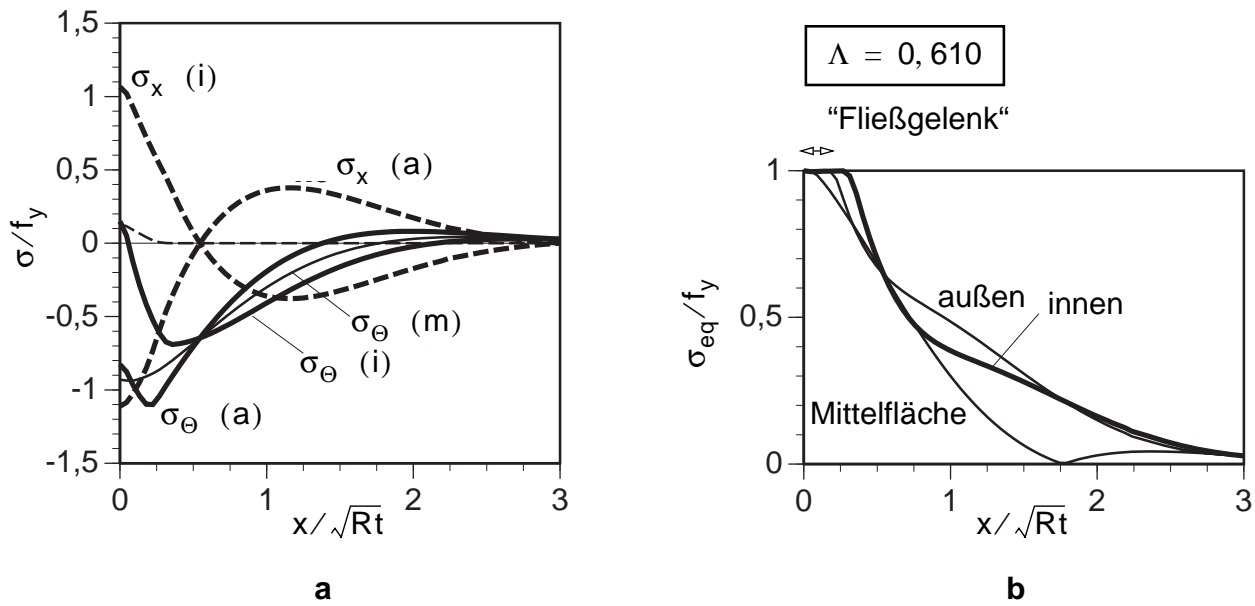


Bild 5-11 Symmetrische Schale — **a.** Axial- und Umfangsspannungen bzw. **b.** Vergleichsspannung bei Belastung durch radiale Ringlast an der Laststufe $\Lambda = 0,610$ der materiell nichtlinearen Berechnung

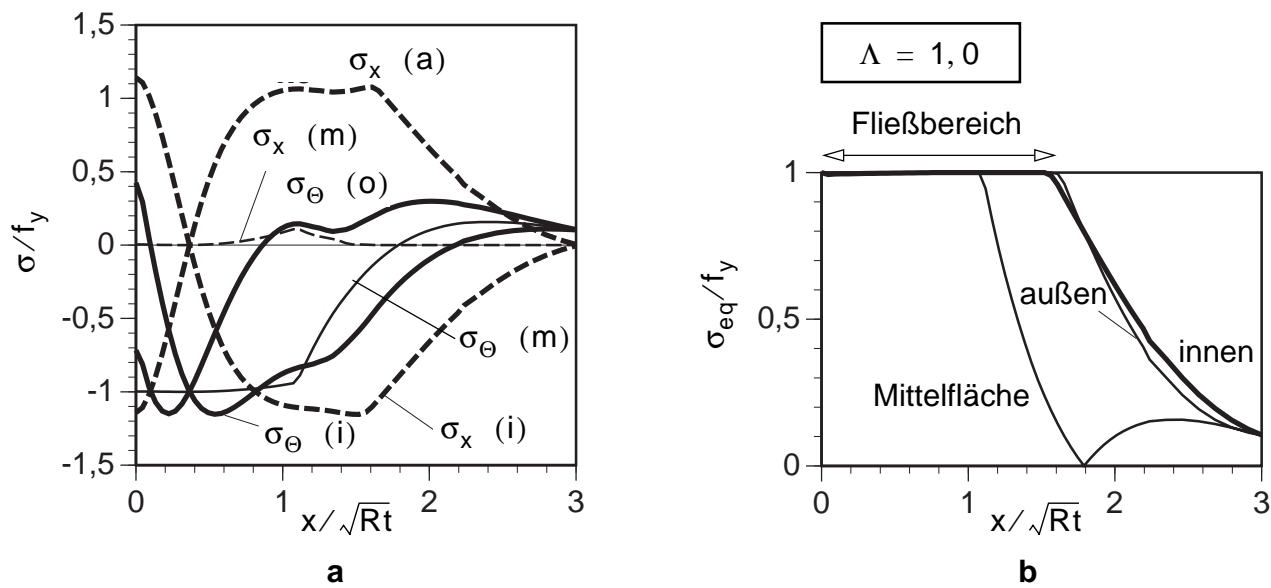


Bild 5-12 Symmetrische Schale — **a.** Axial- und Umfangsspannungen bzw. **b.** Vergleichsspannungen bei Belastung durch radiale Ringlast an der Laststufe $\Lambda = 1,0$ der materiell nichtlinearen Berechnung

Radiale Ringlast und Interaktion mit Radialdruck- und Axialbelastung

Die plastischen Grenztragfähigkeiten der materiell nichtlinearen Berechnungen werden verglichen mit:

- Tragfähigkeiten die auf Basis der linear-elastischen Berechnungen — maßgebend ist das Fließen der maximal beanspruchten Stelle der Schalenoberflächen — bestimmt werden
- approximativ berechnete Tragfähigkeiten durch die Reduktion der Fließgrenze

In Bild 5-13 sind die Tragfähigkeiten bei Interaktion von radialer Ringlast und Radialdruckbelastung verglichen.

- Die linear-elastischen Berechnungen (LA) liefern aufgrund des zugrundegelegten Versagenskriteriums (Auftreten des Fließzustandes lokal im ungünstigsten Bemessungspunkt) die geringste Tragfähigkeit. Die Tragfähigkeiten zeigen aber einen grob affinen Verlauf zu jenen der MNA-Berechnungen.
- Die approximativen Berechnungen der plastischen Grenztragfähigkeiten nach Rotter und Teng liefern Tragfähigkeiten, die linear vom aktuellen Radialdruck abhängen. Damit werden die tatsächlichen Tragfähigkeiten bei Innendruckbelastung zum Teil stark überschätzt. Bei Außendruckbelastung $\sigma_{\Theta} < 0$ ergibt sich jedoch eine sichere Näherung der realen Tragfähigkeit (strichlierte Linie in Bild 5-13).
- Die vereinfachten Berechnungen durch die vorweg erfolgte Reduktion der Fließgrenze ($f_{y, red}$) weisen zum Teil eine Überbewertung der Tragfähigkeit auf, zeigen aber prinzipiell eine gute Approximation der plastischen Tragfähigkeitswerte der materiell nichtlinearen FE-Berechnungen.

In Bild 5-14 sind die Tragfähigkeiten bei Interaktion von radialer Ringlast und Axialbelastung dargestellt.

- Die linear-elastischen Berechnungen (LA) liefern aufgrund des idealisierten Versagenskriteriums die geringsten Tragfähigkeiten. Die Tragfähigkeiten zeigen aber wiederum einen grob affinen Verlauf zu jenen der MNA-Berechnungen.
- Die approximative Berechnungen der plastischen Grenztragfähigkeiten nach Rotter und Teng liefern von der aktuellen Axialbelastung unabhängige Tragfähigkeiten ($P_n/P_{n, pl} = 1$).
- Die approximative Berechnungen durch die vorweg erfolgte Reduktion der Fließgrenze weisen zum Teil eine Überbewertung der Tragfähigkeit auf. Zu bemerken ist dabei, daß das Vorzeichen der Axialbelastung (Druck- bzw. Zugbelastung) nicht berücksichtigt wird.

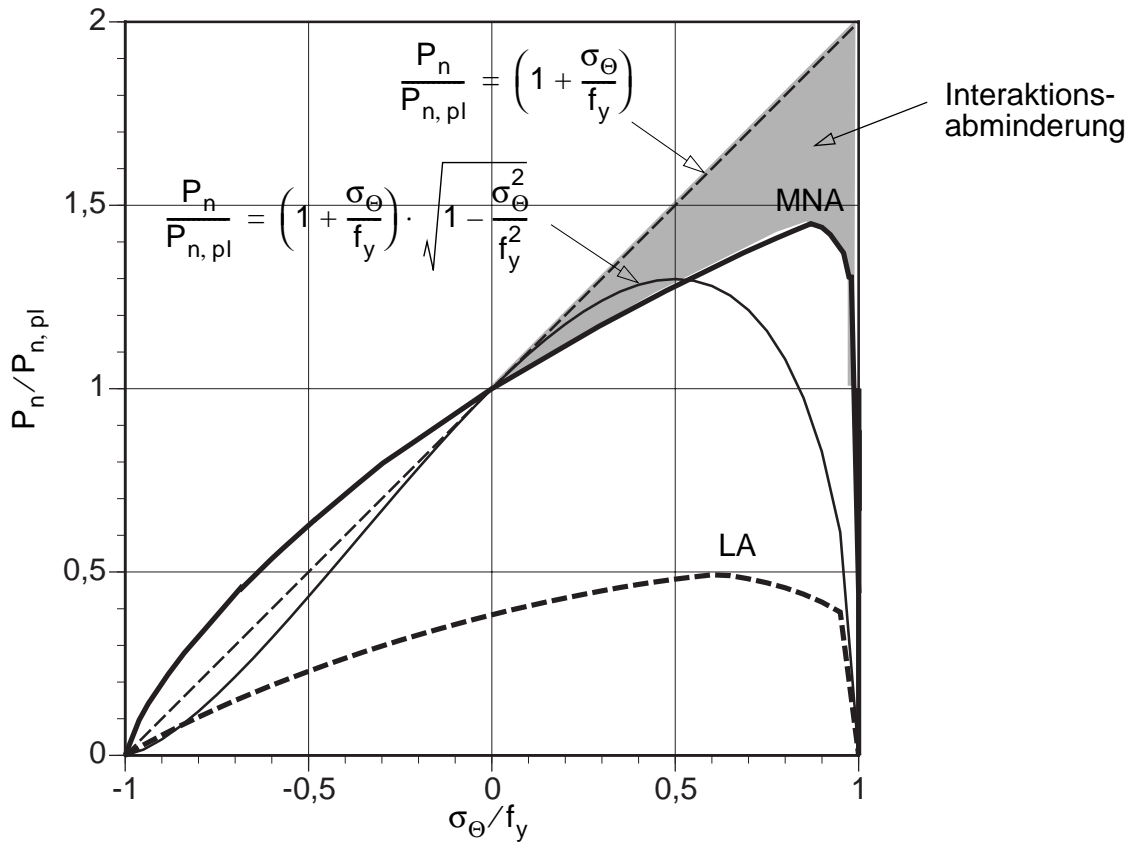


Bild 5-13 Symmetrische Schale — Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruckbelastung

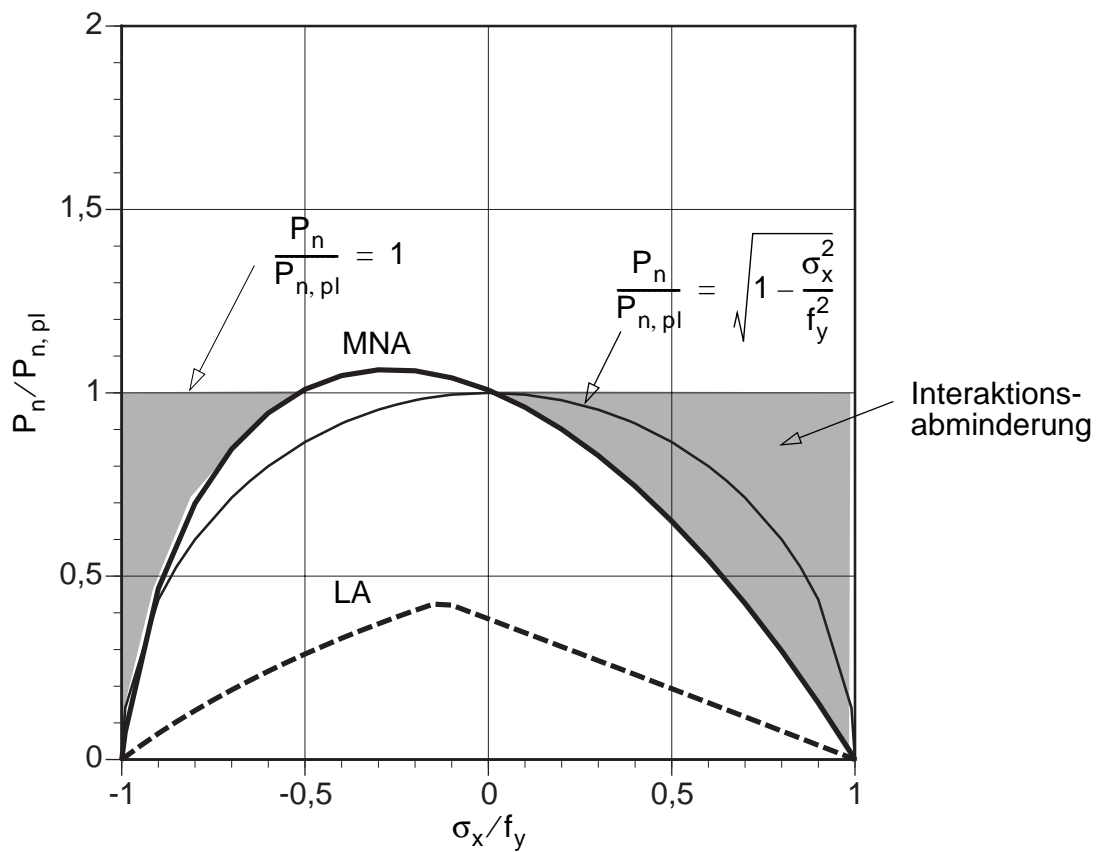


Bild 5-14 Symmetrische Schale — Interaktion von radialer Ringlast mit Axialbelastung

In Bild 5-15 ist die Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung dargestellt. In der dreidimensionalen Darstellung sind in der Grundfläche die Umfangsspannungen und die Meridianspannungen in bezogener Form dargestellt. Über der Grundfläche ist je nach Kombination von Radialdruck- und Axialbelastung die plastische Tragfähigkeit bezüglich der radialen Ringlast aufgetragen. Als Bezugswert der dimensionslosen Darstellung dient die vollplastische Tragfähigkeit $P_{n,pl}$.

- Die Grenzlinie in der Grundebene ist die Mises-Ellipse aufgrund der gänzlichen Ausnutzung der Tragfähigkeit der Kreiszylinderschale durch die Grundspannungen der Radialdruck- und Axialbelastung.
- Die “effective area method“ (Rotter und Teng) ergibt eine von der Axialbelastung unabhängige und von der Radialdruckbelastung linear abhängige Tragfähigkeit.
- Die Tragfähigkeiten auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen sind entsprechend geringer, die große Diskrepanz zu den MNA-Resultaten ist in Bild 5-15 ersichtlich.

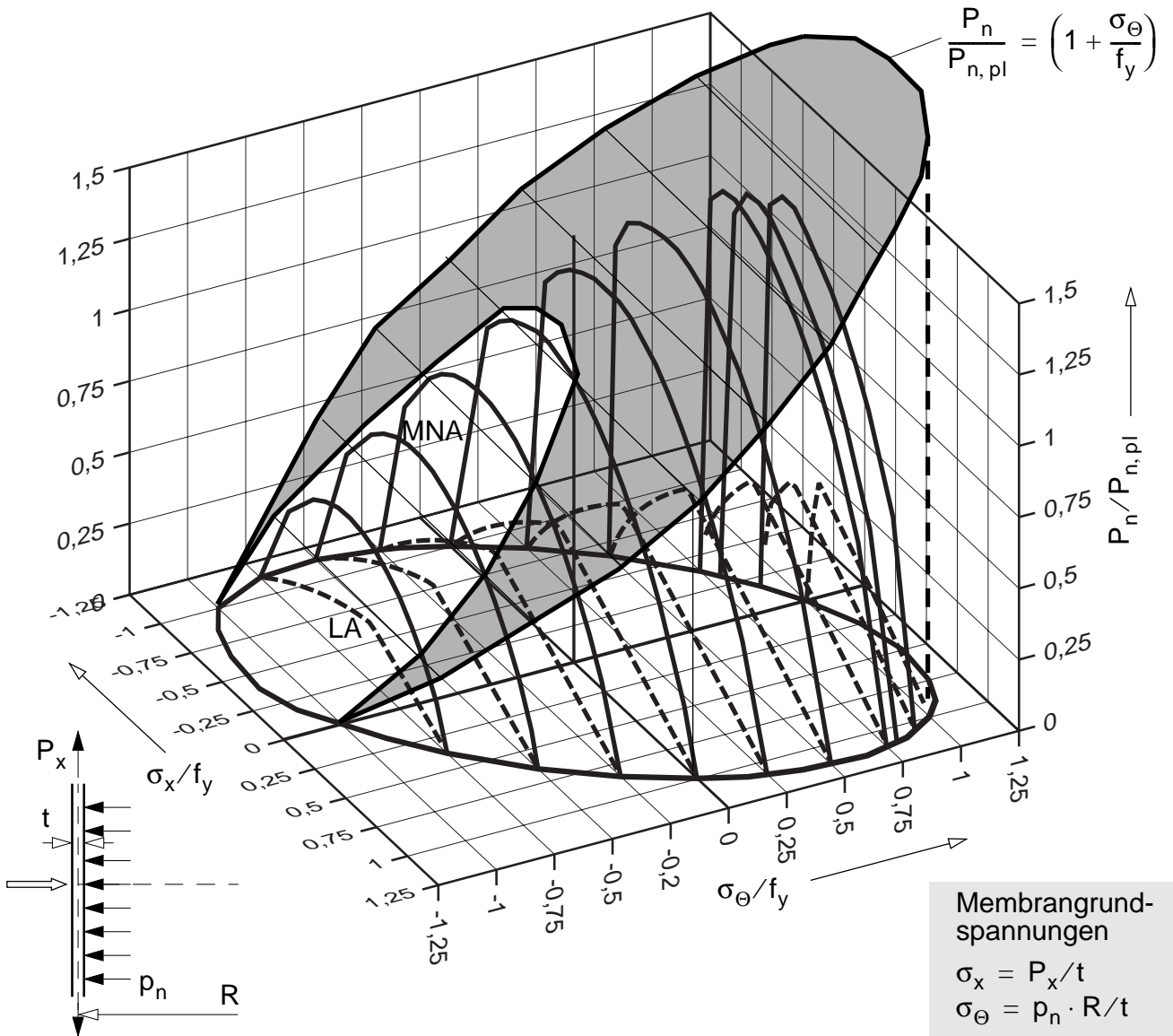


Bild 5-15 Im Schaleninneren angreifende radiale Ringlast (symmetrisches Berechnungsmodell) — Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung

5.2.3 Radiale Ringlast am freien Schalenrand

Für die spätere Erweiterung der “effective area method“ nach Rotter und Teng mit modifizierten mitwirkenden Breiten, werden die Tragfähigkeiten auch für die Kreiszylinderschale mit am freiem Rand angreifender radialer Ringlast berechnet. Diese stellt den unteren Grenzfall für Schalen mit abgestuften Wanddicken dar, wenn die Wandstärke t_1 des dünneren Schalenteiles sehr klein (bzw. zu Null) wird.

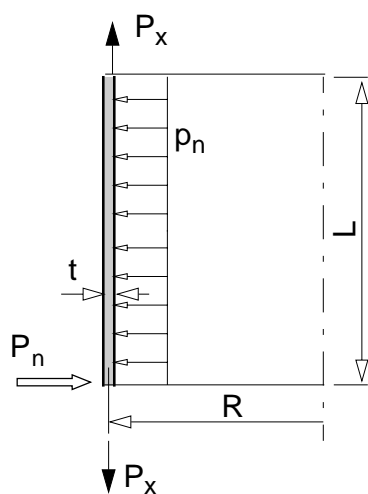
Die plastische Tragfähigkeit bezüglich der am freiem Schalenrand angreifenden radialen Ringlast beträgt:

$$P_{n,pl} = 0,690 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-17)$$

5.2.3.1 Kreiszylinderschale mit freiem Rand

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen und die materiell nichtlinearen Berechnungen erfolgen an einem Berechnungsmodell mit freiem Rand, wobei die Länge L des Modelles circa doppelt so groß wie die Abklinglänge der Biegestörung L_B ist und damit der Randeinfluß nicht gegeben ist.

$$L = 250 \text{ cm} > L_B \approx 5 \cdot \sqrt{R \cdot t} = 5 \cdot \sqrt{500 \cdot 1,0} = 112 \text{ cm}$$



Systemparameter

$$R = 500 \text{ cm}$$

$$R/t = 500$$

$$L/R = 0,5$$

Bild 5-16 Berechnungsmodell und Systemparameter

5.2.3.2 Spannungsbasierte Berechnung der Tragfähigkeit

Linear-elastische Spannungsberechnungen erfolgen wiederum analytisch durch Lösung der Differentialgleichung für die am freiem Rand axialsymmetrisch belastete Kreiszylinderschale. Ergebnisse werden dimensionsloser Form in Bild 5-17 dargestellt. Es kann dabei folgende Grenztragfähigkeit erreicht werden, wobei dabei die Vergleichsspannung am freien Schalenrand maßgebend ist:

$$P_{n,el} = 0,389 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-18)$$

Die Referenzspannung der folgenden Darstellung ist in Gl. (5-19) angegeben.

$$\sigma_{\Theta, \text{ref}} = \frac{P_{n, \text{el}}}{t} \sqrt{\frac{R}{t}} \tag{5-19}$$

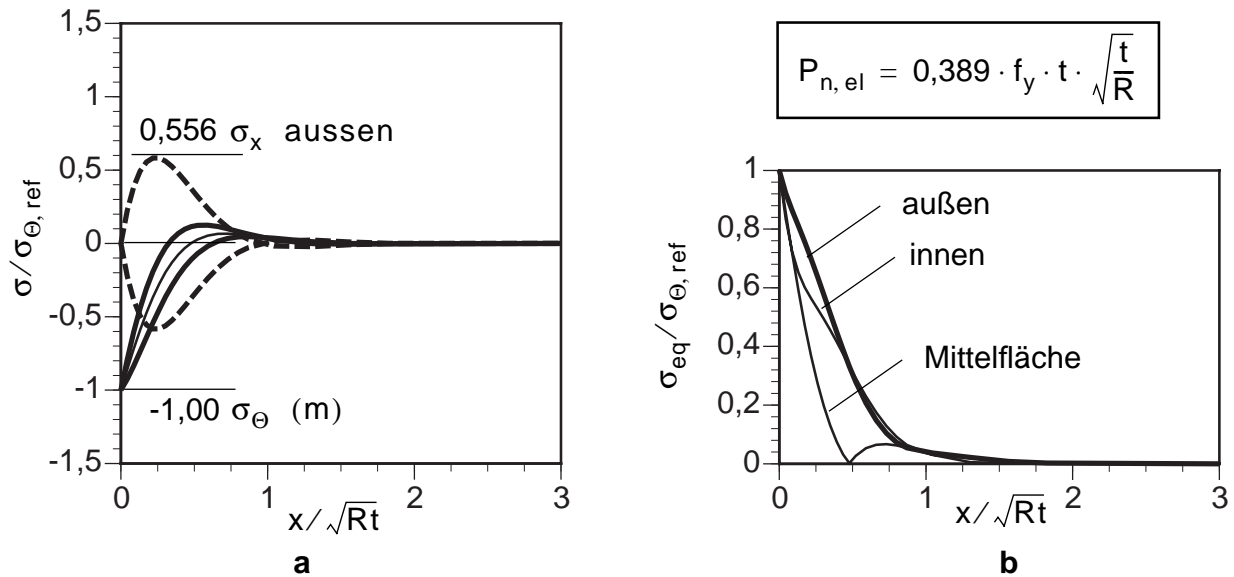


Bild 5-17 Schale mit am freiem Rand angreifender Ringlast — **a.** Axial- und Umfangsspannungen bzw. **b.** Vergleichsspannungen der linear-elastischen Spannungsberechnung

Bei der Interaktion mit Radialdruck und Axialbelastung wird wieder die Tragfähigkeit durch Auswerten des Vergleichsspannungskriteriums in der maximal beanspruchten Umfangslinie bestimmt.

In Bild 5-18 sind die Tragfähigkeiten in Form eines Schichtendiagrammes dargestellt. Die Ordinaten sind die auf die Fließgrenze f_y bezogenen Grundspannungen σ_x und σ_{Θ} . Die Schichtenlinien stellen die Tragfähigkeit bezüglich der radialen Ringlast dar. Als Scharparameter dient die bezogene Tragfähigkeit $P_n / P_{n, \text{pl}}$, wobei als Bezugswert die vollplastische Tragfähigkeit $P_{n, \text{pl}}$ der Schale gewählt wird.

$$P_{n, \text{pl}} = 0,690 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \tag{5-20}$$

Die maximale Tragfähigkeit wird bei Radialdruckbelastung erzielt. Wird die Tragfähigkeit bereits durch die Grundspannungen aufgezehrt, so kann keine radiale Ringlast abgetragen werden, diesen Zustand stellt wiederum die Mises-Ellipse bei $P_n / P_{n, \text{pl}} = 0$ dar.

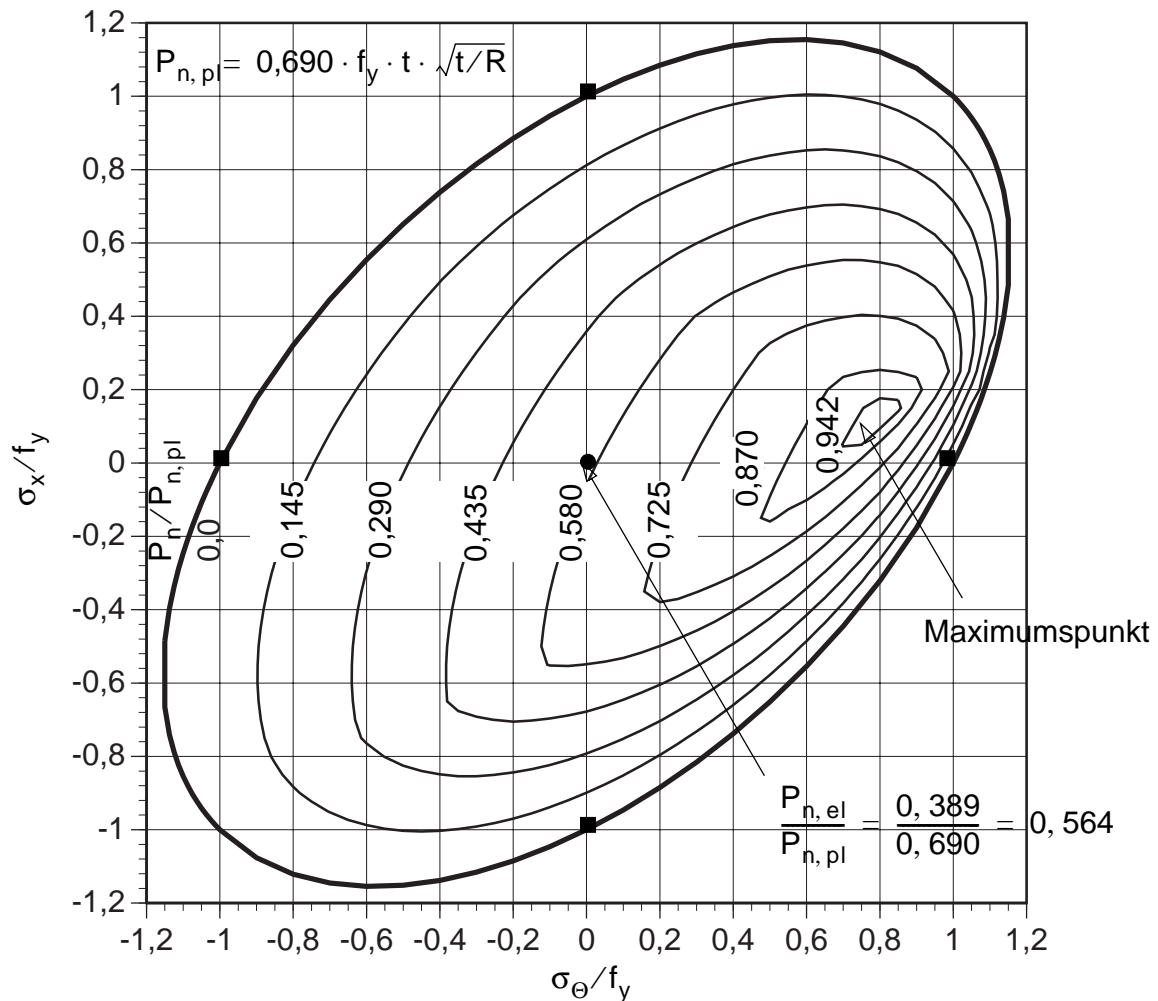


Bild 5-18 Schale mit am freiem Rand angreifender radialer Ringlast — auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen berechnete Tragfähigkeiten bei Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung

5.2.3.3 Materiell nichtlineare Berechnungen

Es wird der selbe Parameterbereich wie für die symmetrische Kreiszylinderschale untersucht. Die Referenzringlast entspricht dabei:

$$P_{n,pl} = 0,690 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-21)$$

Spannungsverteilungen bei radialer Ringlast

In Bild 5-19 und Bild 5-20 sind die Verteilungen der Spannungen für zwei Laststufen der materiell nichtlinearen Berechnung (MNA) dargestellt:

- $\Lambda = 0,710$ stellt jene Laststufe dar, bei der in etwa die 1,25-fache Last des ersten Fließens des maximal beanspruchten Punktes erreicht wird
- $\Lambda = 1,0$ ist jene Laststufe, bei der die Traglast erreicht wird.

In den Verteilungen der Vergleichsspannungen erkennt man wiederum die zunehmende Ausbildung der plastischen Zonen in der Schale. Die Verteilung der Meridianspannungen σ_x geben wiederum teilweise Aufschluß über den plastischen Tragmechanismus. In $x/\sqrt{Rt} \approx 1$ bildet sich ein sogenanntes Fließgelenk aus.

Die Bezeichnungen (m), (i) und (a) beziehen auf die Mittel-, Innen- und Außenfläche der Schale.

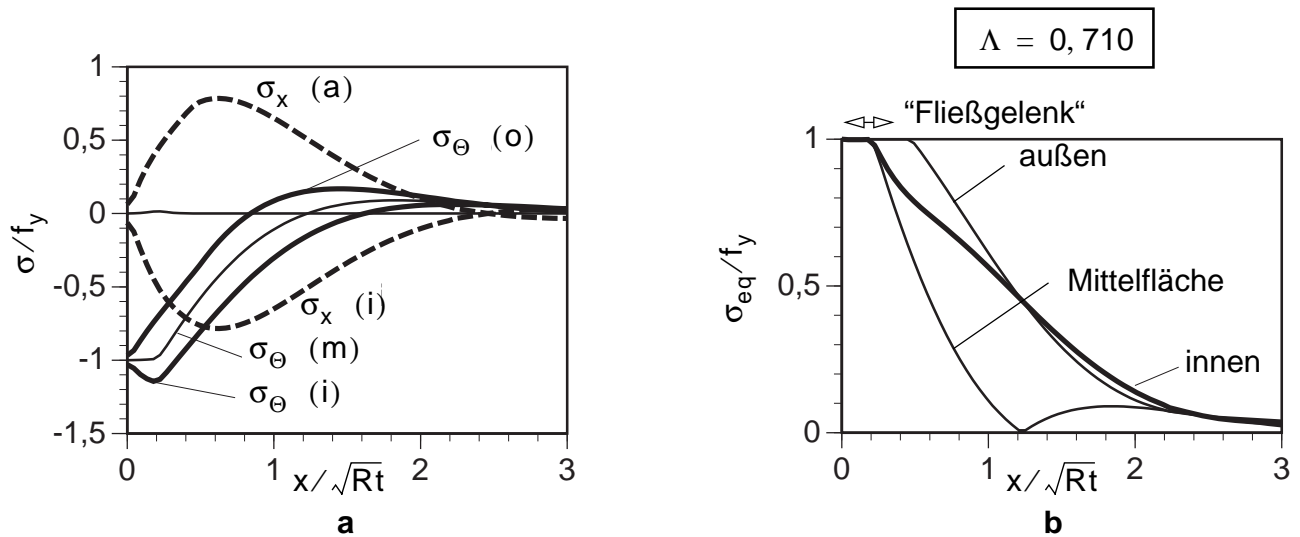


Bild 5-19 Schale mit am freiem Rand angreifender radialer Ringlast — **a.** Axial- und Umfangsspannungen bzw. **b.** Vergleichsspannungen bei Belastung durch radiale Ringlast an der Laststufe $\Lambda = 0,710$ der materiell nichtlinearen Berechnung

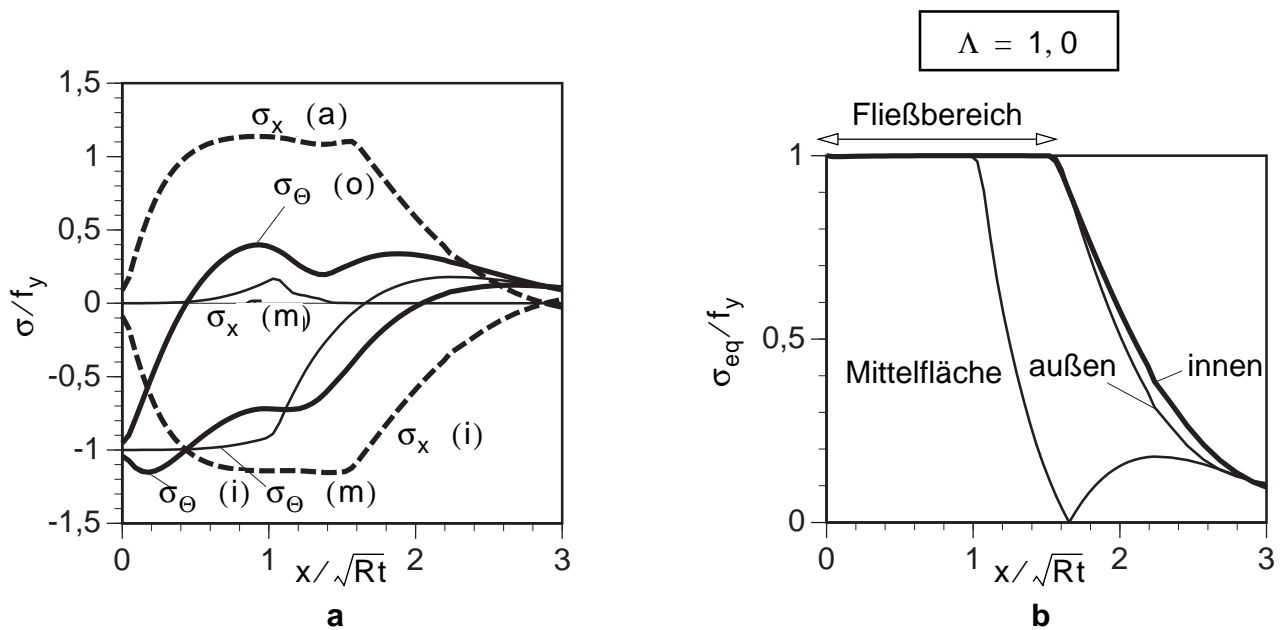
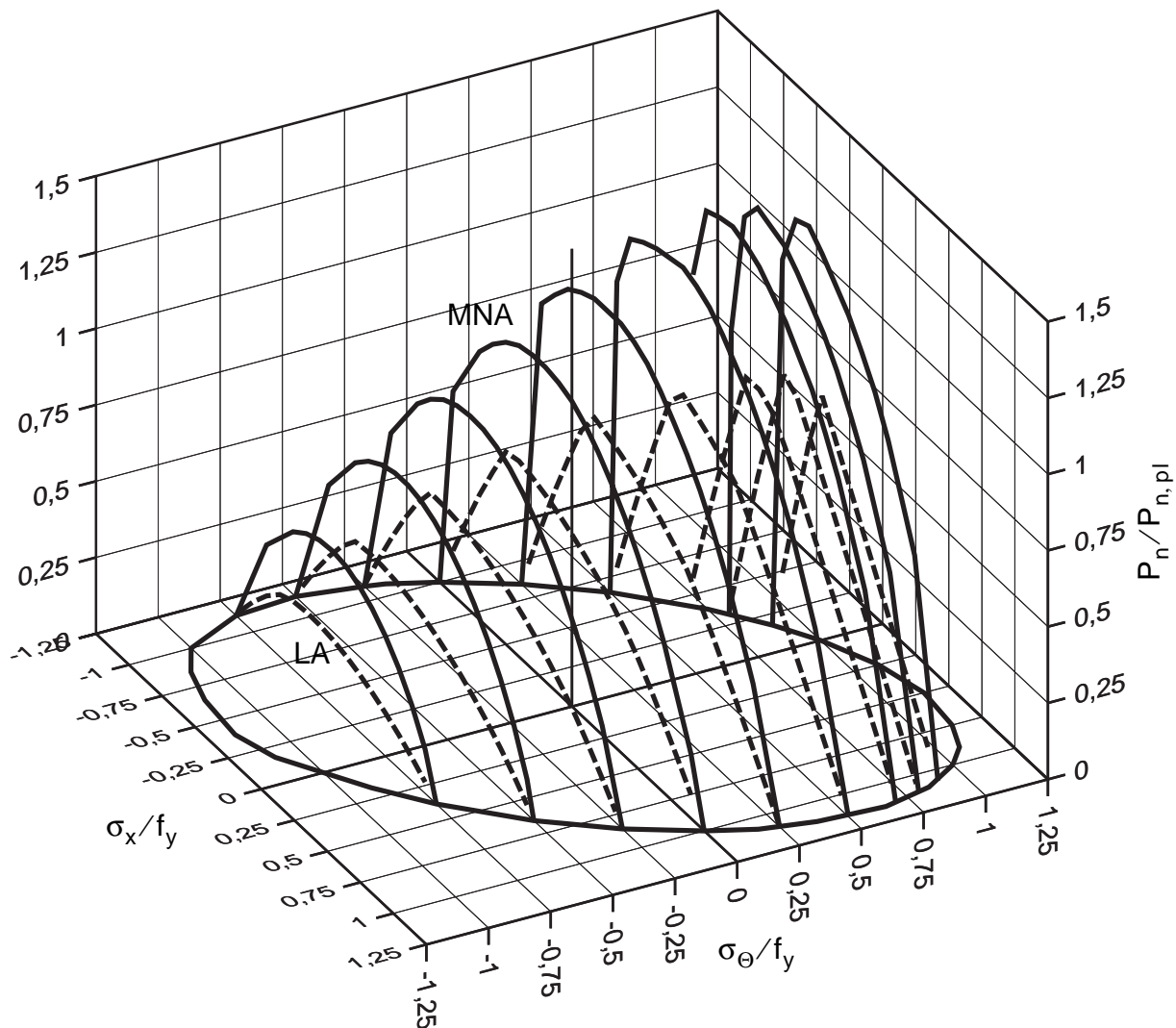


Bild 5-20 Schale mit am freiem Rand angreifender radialer Ringlast — **a.** Axial- und Umfangsspannungen bzw. **b.** Vergleichsspannungen bei Belastung durch radiale Ringlast an der Laststufe $\Lambda = 1,0$ der materiell nichtlinearen Berechnung

Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck - und Axialbelastung

In Bild 5-21 ist die Interaktion von radialer Ringlast (am freien Schalenrand angreifend) und Radialdruck- und Axialbelastung dargestellt. Die dimensionslose Darstellung erfolgt analog Bild 5-15. In der Grundfläche sind die Umfangsspannungen und die Axialspannungen in bezogener Form dargestellt. Über der Grundfläche ist je nach Kombination von Radialdruck- und Axialbelastung die plastische Tragfähigkeit bezüglich der radialen Ringlast aufgetragen. Als Bezugswert der dimensionslosen Darstellung dient die Tragfähigkeit $P_{n, pl}$.

Die Grenzlinie in der Grundebene ist die Mises-Ellipse aufgrund der gänzlichen Ausnutzung der Tragfähigkeit durch die Radialdruck- und Axialbelastung der Schale. Die bezogenen Tragfähigkeiten sind mit jenen des symmetrischen Berechnungsmodelles — siehe auch Bild 5-22 — nahezu ident.



$$P_{n, pl} = 0,690 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R}$$

Bild 5-21 Schale mit am freiem Rand angreifender radialer Ringlast — Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung

In Bild 5-22 sind die Tragfähigkeiten der materiell nichtlinearen Berechnungen mit jenen des symmetrischen Berechnungsmodelles in dimensionsloser Form verglichen.

- Die Tragfähigkeiten P_n bei radialer Ringlast am freien Schalenende sind auf $P_{n,pl} = 0,690 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R}$ bezogen.
- Die Tragfähigkeiten P_n des symmetrischen Modelles sind auf $P_{n,pl} = 1,95 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R}$ bezogen.

Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der bezogenen Tragfähigkeiten der symmetrischen Schale (radiale Ringlast wirkt im Schaleninneren) mit jenen der Schale mit freiem Rand (radiale Ringlast wirkt im freien Schalenrand) in Bild 5-22. Die Ausarbeitung einer vollplastischen Bemessungsformel in Kap. 5.3, in der die Interaktionsabminderungen durch die wirkenden Membrangrundbeanspruchungen erfaßt werden, kann mit einem Modifikationsfaktor ψ für beide Belastungsarten “radiale Ringlast im Schaleninneren“ bzw. “radiale Ringlast am freien Schalenrand“ erfolgen.

Die Tragfähigkeiten auf Basis der linear-elastischen Berechnungen sind aufgrund der unterschiedlichen Bezugswerte für die Belastung am freien Schalenrand höher.

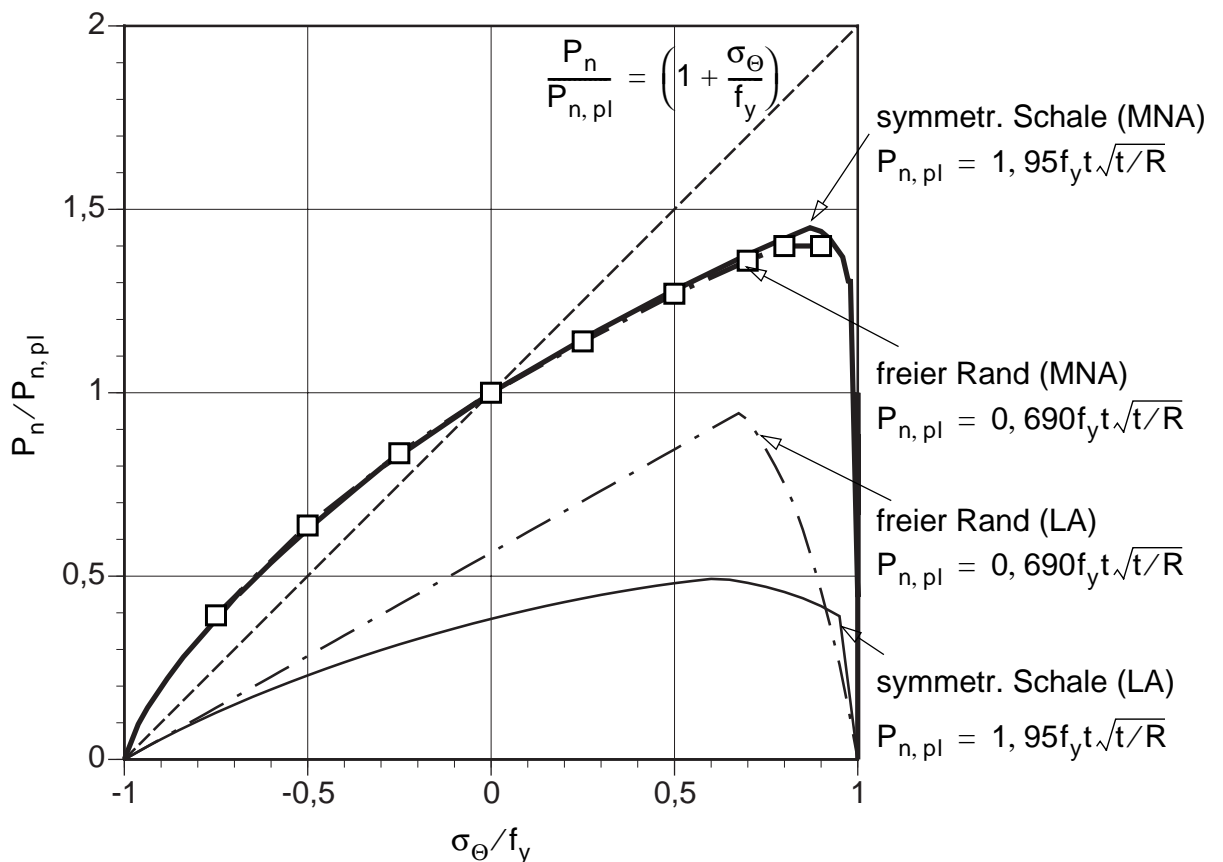


Bild 5-22 Schale mit freiem Rand (radiale Ringlast wirkt im freien Schalenrand) bzw. symmetrische Schale (radiale Ringlast wirkt im Schaleninneren) — Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruckbelastung (Innen- bzw. Außendruckbelastung)

5.3 Entwicklung “vollplastischer” Bemessungsformeln

Die Ergebnisse der materiell nichtlinearen Berechnungen zeigen die Notwendigkeit, die Membrangrundspannungen der einzelnen Schalenteile bei der Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit des Schalenstoßes zu berücksichtigen. Die Membrangrundspannungen werden durch Modifikation der mitwirkenden Breiten berücksichtigt.

Die Entwicklung einer Bemessungsformel zur Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit einer Kombination von mehreren Schalenteilen erfolgt in drei Schritten:

- Interaktionsformel für die radiale Ringlast in Abhängigkeit von Meridian- und Umfangsgrundspannungen aufbauend auf den Ergebnissen der materiell nichtlinearen FE-Berechnungen
- Rückrechnung von abgeminderten (modifizierten) mitwirkenden Breiten und Bestimmung des Modifikationsfaktors ψ
- Modifikation der “effective area method“ durch Implementierung des Modifikationsfaktors ψ in Abhängigkeit der vorhandenen Membrangrundspannungen der einzelnen Schalenteile

5.3.1 Interaktionsformel

Die plastische Tragfähigkeit der Zylinderschale bei Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- (Außen- bzw. Innendruck) und Axialbelastung wird mit der folgender Interaktionsformel in bezogener Form wiedergegeben. Die Eingangparameter sind dabei die auf die Fließgrenze bezogenen Meridian- und Umfangsgrundspannungen.

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x / f_y \quad (5-22)$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / f_y \quad (5-22c)$$

$$\bar{P}_n = P_n / P_{n,pl} \quad (5-22d)$$

Die Bezugsgrößen für die modifizierten plastischen Tragfähigkeiten sind dabei die plastischen Basistragfähigkeiten $P_{n,pl}$ für die Belastung im Schaleninneren bzw. am freien Schalenrand:

$$P_{n,pl} = 1,950 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-23a)$$

$$P_{n,pl} = 0,690 \cdot f_y \cdot t \cdot \sqrt{t/R} \quad (5-23b)$$

Die Interaktionsformel ist so gewählt, daß bei voller Ausnutzung durch Radialdruck- und Axialbelastung die Mises-Ellipse in der Grundeben der 3D-Darstellung wiedergegeben werden kann und andererseits wird die plastische Tragfähigkeit für radiale Ringlast — also bei $\sigma_x = 0$ und $\sigma_\theta = 0$ — exakt erreicht. Die Überschreitung von 3% der plastischen Tragfähigkeiten (MNA-Berechnungen) für wenige Grundspannungskombinationen durch die Interaktionsformel wird als tolerierbar angesehen.

$$\bar{P}_n = \frac{P_n}{P_{n,pl}} = (2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_x - 1,5) + \sqrt{(2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_x - 1,5)^2 + 4 \cdot \underbrace{(1 - \bar{\sigma}_x^2 - \bar{\sigma}_\theta^2 + \bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_\theta)}_{1 - \bar{\sigma}_{eq}^2}} \quad (5-24)$$

In Bild 5-23 sind die Tragfähigkeiten der materiell nichtlinearen Berechnungen für den Angriff der radialen Ringlast im Schaleninneren bzw. am freien Schalenrand und jene der Interaktionsformel in dreidimensionaler Form dargestellt.

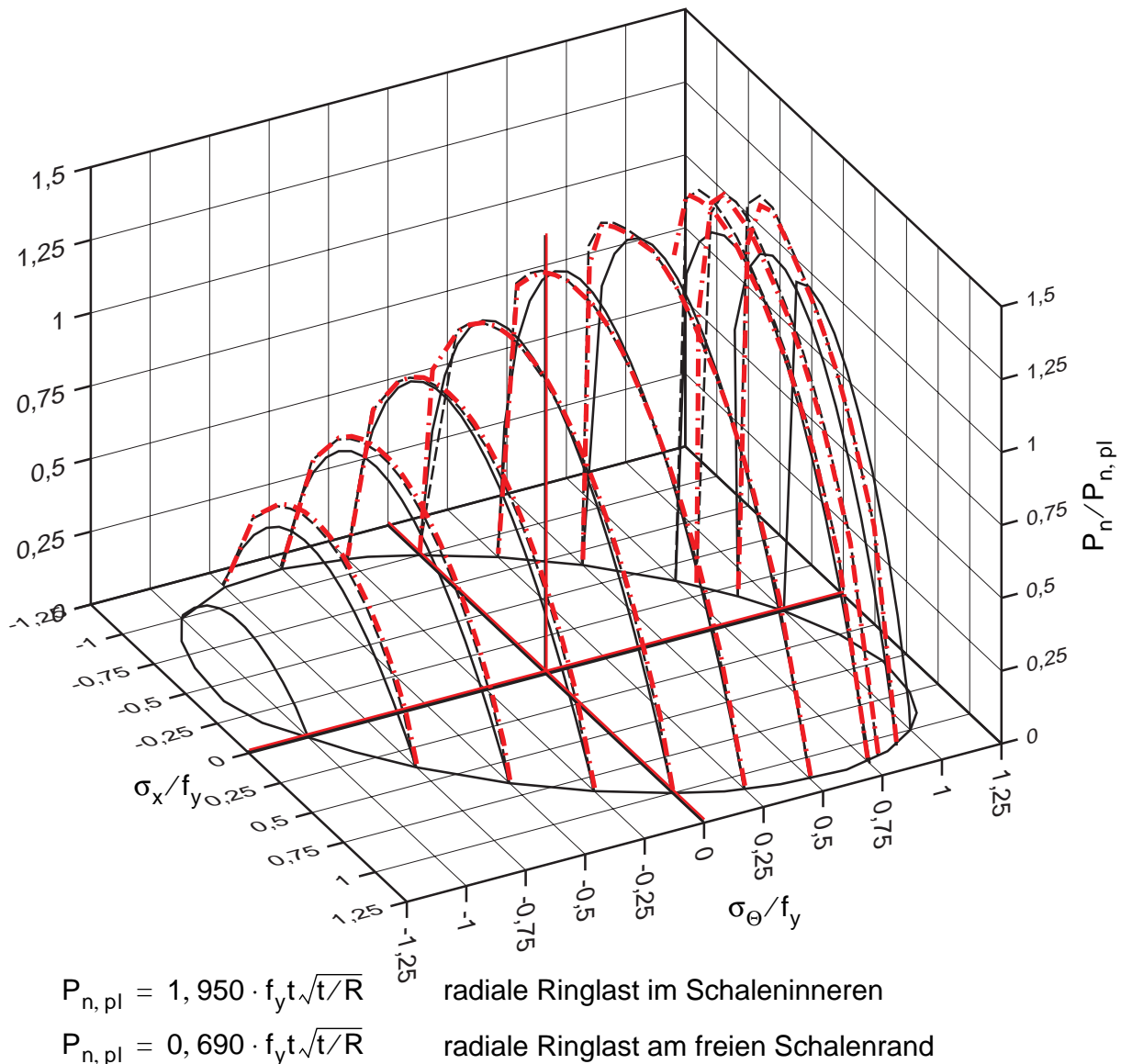


Bild 5-23 Interaktionsformel für die Interaktion von radialer Ringlast mit Radialdruck- und Axialbelastung — Vergleich mit den MNA-Berechnungsergebnissen für die im Schaleninneren (strichlierte Linien) bzw. am freiem Ende (strichpunktierte Linien) angreifende radiale Ringlast

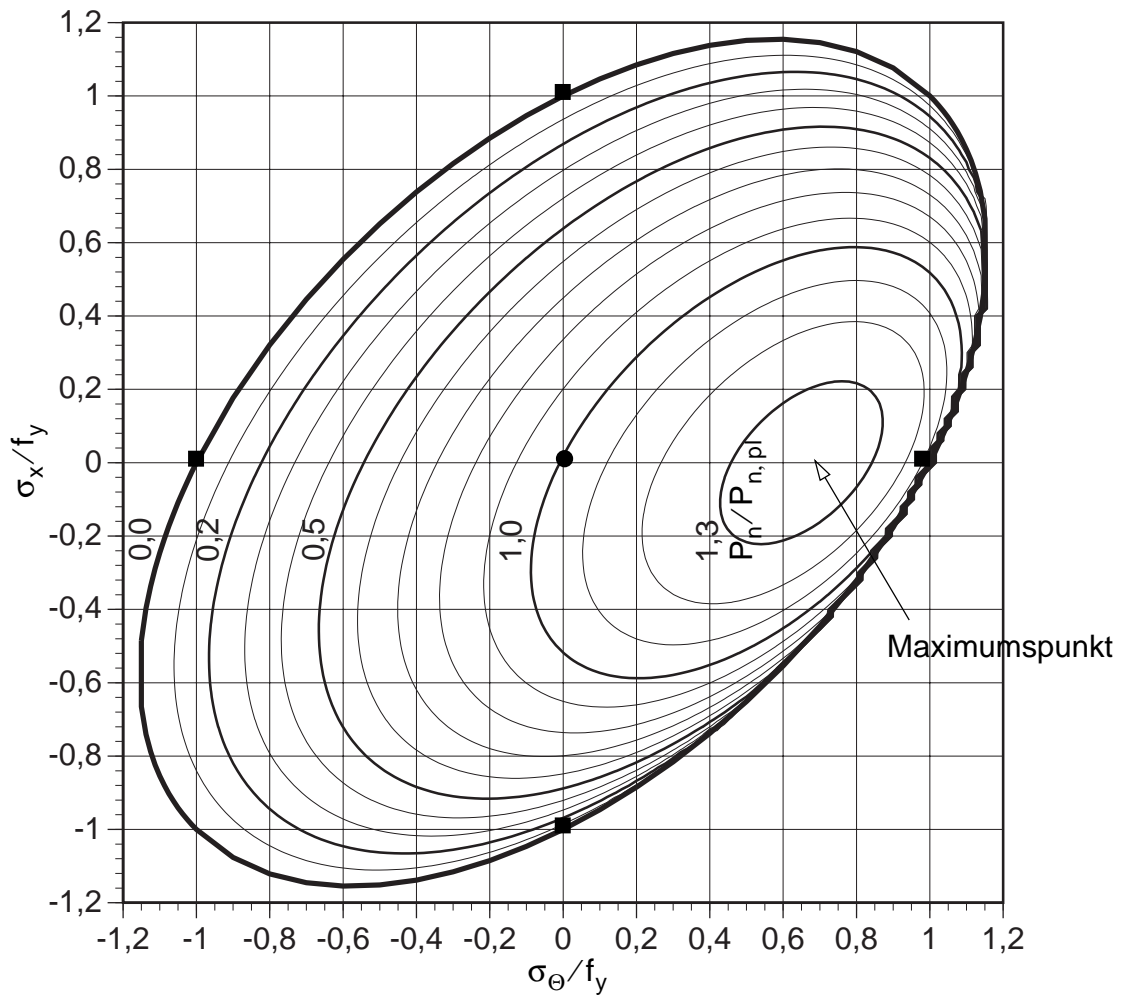


Bild 5-24 Darstellung der Interaktionsformel für die plastische Tragfähigkeit der radialen Ringlast in Abhängigkeit der Meridian- und Umfangsgrundspannungen zufolge Axial- und Radialdruckbelastung

5.3.2 Abminderungsbeiwerte für mitwirkende Breiten

Die Rückrechnung modifizierter mitwirkender Breiten wird am symmetrischen Berechnungsmodell durchgeführt, sie gilt aber analog für die am freien Schalenrand angreifende radiale Ringlast.

Die Größen mit dem Index $_{pl}$ beziehen sich auf die Basiswerte der vollplastischen Grenztragfähigkeiten bzw. mitwirkenden Breite (also keine Berücksichtigung der Interaktionseffekte).

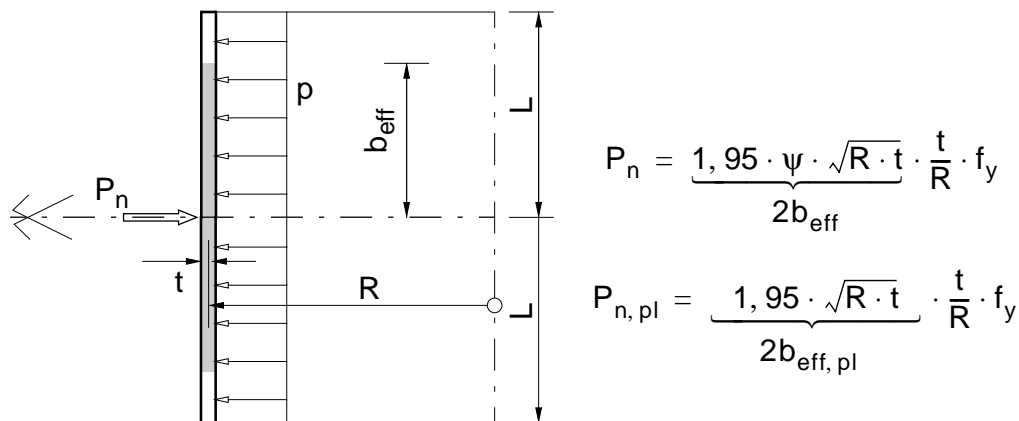


Bild 5-25 Rückrechnung von modifizierten mitwirkenden Breiten

Aus der Gleichgewichtsgleichung in Radialrichtung folgt aus der Ringlast P_n des plastischen Traglastzustandes die abgeminderte (modifizierte) mitwirkende Breite b_{eff} der Schale.

$$P_n = 2b_{eff} \cdot \frac{t}{R} \cdot f_y + 2b_{eff} \cdot p_n \quad (5-25a)$$

$$\frac{P_n}{P_{n,pl}} = \frac{b_{eff}}{b_{eff,pl}} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_\Theta}{f_y}\right) \quad (5-25b)$$

Die abgeminderte (modifizierte) Breite ergibt sich in Gl. (5-26). Die Eingangsgrößen sind die bezogene aktuelle plastische Tragfähigkeit $P_n/P_{n,pl}$ bei der vorliegenden Kombination der Membrangrundspannungen σ_x und σ_Θ . Die Änderung der ursprünglichen mitwirkenden Breite wird durch den Modifikationsfaktor ψ erfaßt.

$$b_{eff} = \underbrace{\frac{P_n/P_{n,pl}}{(1 + \sigma_\Theta/f_y)}}_{\psi} \cdot b_{eff,pl} \quad (5-26)$$

Der Modifikationsfaktor ψ ist in Bild 5-26 in Abhängigkeit der Meridian- und Umfangsgrundspannung dargestellt. Aufgrund der Rückrechnung ergeben sich bei zunehmender Außendruckbelastung ($\sigma_\Theta < 0$) und den dadurch gegen Null gehenden Nenner in Gl. (5-26) immer größer werdende mitwirkende Breiten. Im Grenzfall $\sigma_\Theta = -f_y$ erreichen sie einen singulären Wert.

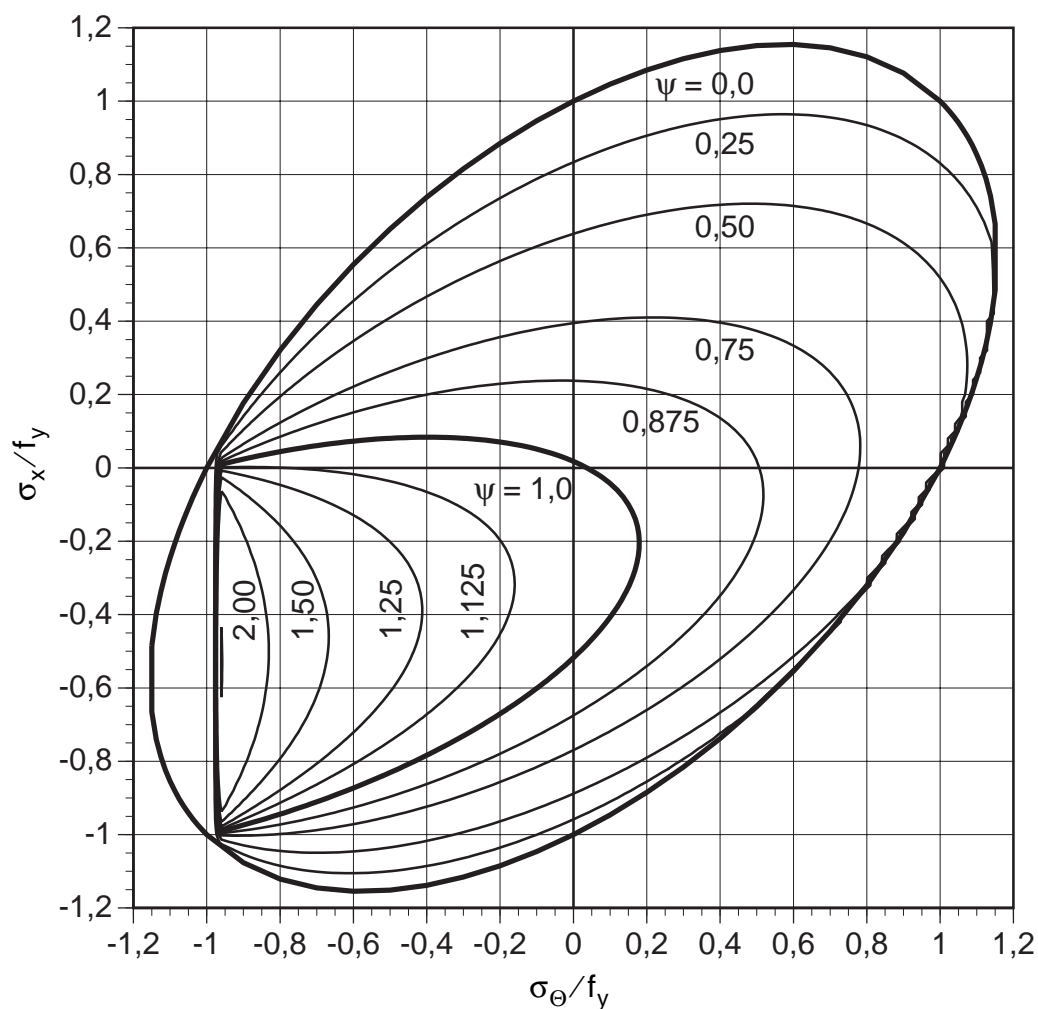


Bild 5-26 Modifikationsfaktor ψ der abgeminderten (modifizierten) mitwirkenden Breiten in Abhängigkeit von Radialdruck- und Axialbelastung.

5.3.3 Erweiterung der "effective area method"

Die Berechnung der modifizierten mitwirkenden Breiten erfolgt durch die Erweiterung um den Modifikationsfaktor ψ , in den die Meridian- und Umfangsgrundspannungen des entsprechenden Schalenteiles Eingang finden.

Dieses Berechnungskonzept ist in Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) zur Berechnung der plastischen Tragfähigkeit von rotationssymmetrisch belasteten Zylinderschalen bzw. Schalenstößen übernommen.

5.3.3.1 Vorzeichenregelungen

Die Bemessungsformel geht von einer nach innen gerichteten radialen Ringlast aus (Bild 5-27.a). Dabei sind die Axialbelastung und der Radialdruck mit positivem Vorzeichen versehen, wenn aus ihnen Zugspannungen in Axial- bzw. Umfangsrichtung resultieren.

Ist die radiale Ringlast nach außen gerichtet, so dreht sich die Definition der positiven Vorzeichen für die Axialbelastung und den Radialdruck um (Bild 5-27.b).

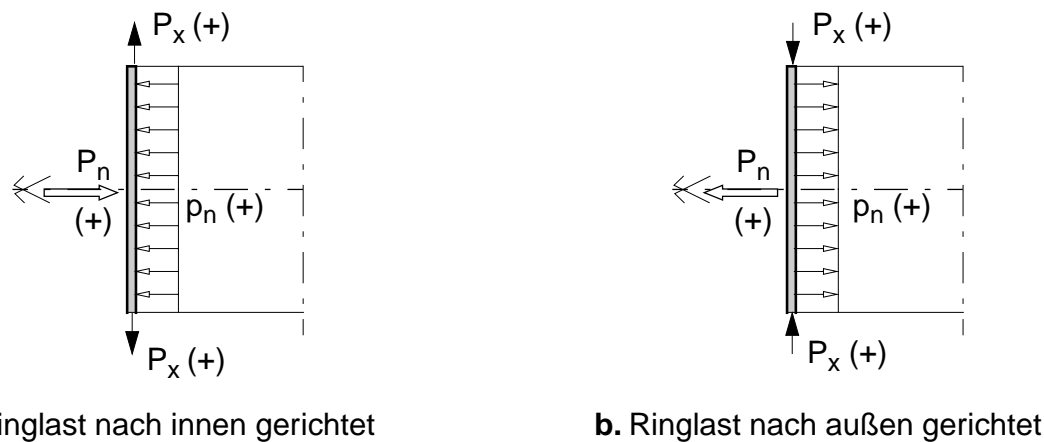


Bild 5-27 Vorzeichenregelungen der Interaktionsformel

5.3.3.2 Mitwirkende Breite für einen Schalenteil

Die mitwirkende Breite ergibt sich somit für einen Schalenteil (i):

$$b_{\text{eff},i} = \psi_i \cdot \gamma_i \cdot 0,975 \cdot \sqrt{R \cdot t / \cos \beta_i} \quad (5-27)$$

Der Faktor γ_i ergibt sich aus dem Verhältnis der äquivalenten Wanddicken der oberen und unteren Schalengruppe. Die Trennung der Schalengruppen erfolgt entsprechend Kap. 5.1.3 durch die radiale Ringlast. Der Modifikationsfaktor ψ_i ergibt sich aus der vorhandenen Meridiangrundspannung $\sigma_{x,i}$ und

der Umfangsgrundspannung $\sigma_{\Theta, i}$ des Membranspannungszustandes.

Die Berechnung des Modifikationsfaktors erfolgt ausgehend von den bezogenen Membrangrundspannungen des betrachteten Einzelteiles in Gl. (5-28a) bis Gl. (5-28d).

$$\bar{\sigma}_{x, i} = \sigma_x / f_y \quad (5-28a)$$

$$\bar{\sigma}_{\Theta, i} = \sigma_{\Theta} / f_y$$

$$A_{(i)} = 2 \cdot \bar{\sigma}_{\Theta, i} - \bar{\sigma}_{x, i} - 1,5 \quad (5-28b)$$

$$B_{(i)} = (1 - \bar{\sigma}_{\Theta, i}^2 - \bar{\sigma}_{x, i}^2 + \bar{\sigma}_{x, i} \cdot \bar{\sigma}_{\Theta, i})$$

$$\bar{P}_{n, i} = A_{(i)} + \sqrt{A_{(i)}^2 + 4 \cdot B_{(i)}} \quad (5-28c)$$

$$\psi_i = \frac{\bar{P}_{n, i}}{1 + \bar{\sigma}_{\Theta, i}} \quad (5-28d)$$

Der Gültigkeitsbereich wird durch folgende Abgrenzung in Gl. (5-29) eingeschränkt:

$$\sigma_{\Theta, i} > -0,975 \cdot f_y \quad (5-29)$$

Das Abgrenzungskriterium ergibt sich aus der Rückrechnung der mitwirkenden Breite aus der Tragfähigkeitsformel, da man bei $\sigma_{\Theta, i} < -0,975 \cdot f_y$ durch das Kleinerwerden des Nenners immer größere mitwirkenden Breiten erhält, diese aber keine Vergrößerung der Tragfähigkeit bewirken, da gleichzeitig der nach innen gerichtete Radialdruck in diesem Fall die gesamte aufnehmbare Ringlast wieder stark vermindert. Schließlich käme es bei $\sigma_{\Theta, i} = -f_y$ zu einer Nulldivision, die mit diesem Abgrenzungskriterium vermieden wird.

5.3.3.3 Eurocode 3 - Teil 1.6

Im Annex B von Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) wurden die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Bemessungsformeln zur Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit von versteiften und unversteiften Zylinderschalen bzw. Schalenstößen bei rotationssymmetrischer Belastung übernommen.

Exemplarisch sind Regelungen dargestellt, und zwar für:

- eine unversteifte Zylinderschale bei Belastung durch radiale Ringlast und Axial- bzw. Radialdruckbelastung in Bild 5-28
- ein Beispiel des Silobaus — Stoß von Trichter, Schaft und Standzarge — bei Innendruck- und Axialbelastung in Bild 5-29

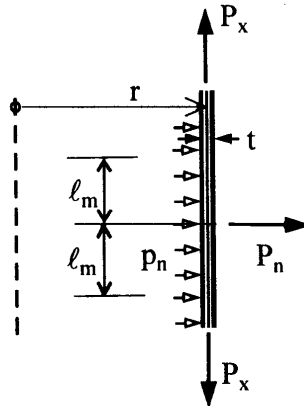
Die Axialbelastungen $P_{x, i}$ der einzelnen Schalenteile entsprechen dabei den Membranmeridiankräften $n_{x, i}$ der Schalenteile an der Stoßstelle.

In Tab. 5-1 sind die verwendeten Bezeichnungen der einzelnen Rechengrößen der vorliegenden Arbeit (Wallner) und die entsprechenden Bezeichnungen des Eurocodes 3 - Teil 1.6 gegenübergestellt.

Tab. 5-1 Gegenüberstellung der verwendeten Bezeichnungen

—	Dissertation Wallner	EC 3 - Teil 1.6
Wanddickenverhältnis	η	η
Wanddickenabminderungsfaktor	γ_i	ψ_i
Umfangsspannung	$\sigma_{\theta,i}/f_y$	$s_{\theta i}$
Meridianspannung	$\sigma_{x,i}/f_y$	$s_{x i}$
Vergleichsspannung	$\sigma_{eq,i}/f_y$	s_{ei}
bezogene Tragfähigkeit	$\bar{P}_{n,i} = P_n/P_{n,pl}$	s_{mi}
plastische Tragfähigkeit	P_n	P_{nR}
Modifikationsfaktor	$\psi_i = \frac{\bar{P}_{n,i}}{1 + \bar{\sigma}_{\theta,i}}$	$\frac{s_{mi}}{1 + s_{\theta i}}$
mitwirkende Breite	$b_{eff,i}$	l_m

B.2.3 Cylinder: Radial line load, constant internal pressure and axial load



Reference quantities:

$$s_x = \frac{P_x}{f_y t}$$

$$s_\theta = \frac{p_n r}{f_y t}$$

$$\ell_o = 0,975 \sqrt{rt}$$

$$s_e = \sqrt{s_\theta^2 + s_x^2 - s_x s_\theta}$$

Range of applicability:

$$-1 \leq s_x \leq +1$$

$$-1 \leq s_\theta \leq +1$$

Dependent parameters:

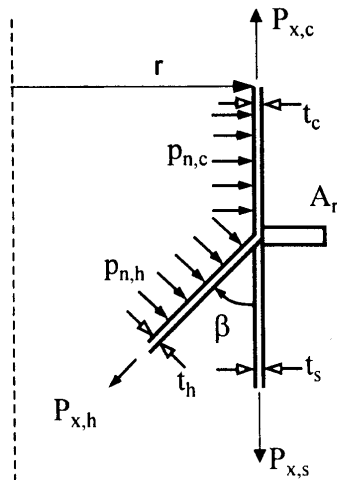
Outward directed ring load $P_n > 0$		Inward directed ring load $P_n < 0$	
Condition	Expressions	Condition	Expressions
$s_e < 1,00$ and $s_\theta \leq 0,975$	$A = +s_x - 2s_\theta - 1,50$ $s_m = A + \sqrt{A^2 + 4(1 - s_e^2)}$ $\ell_m = \ell_o \left(\frac{s_m}{1 - s_\theta} \right)$	$s_e < 1,00$ and $s_\theta \geq -0,975$	$A = -s_x + 2s_\theta - 1,50$ $s_m = A + \sqrt{A^2 + 4(1 - s_e^2)}$ $\ell_m = \ell_o \left(\frac{s_m}{1 + s_\theta} \right)$
$s_e = 1,00$ or $s_\theta > 0,975$	$\ell_m = 0,0$	$s_e = 1,00$ or $s_\theta < -0,975$	$\ell_m = 0,0$

The plastic resistance is given by (P_n and p_n always positive outwards):

$$\frac{P_{nR}}{2\ell_m} + p_n = f_y \frac{t}{r}$$

Bild 5-28 Unversteifte Zylinderschale — Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit bei Belastung durch radiale Ringlast bzw. Radialdruck- und Axialbelastung

B.4.2 Junction under internal pressure and axial loading



Reference quantities:

$$s_{xc} = \frac{P_{xc}}{f_y t_c} \quad s_{xs} = \frac{P_{xs}}{f_y t_s} \quad s_{xh} = \frac{P_{xh}}{f_y t_h}$$

$$s_{\theta c} = \frac{p_{nc} r}{f_y t_c} \quad s_{\theta s} = 0 \quad s_{\theta h} = \frac{p_{nh} r}{f_y t_h \cos \beta}$$

for $i = c, s, h$ in turn $s_{ei} = \sqrt{s_{\theta i}^2 + s_{xi}^2} - s_{xi} s_{\theta i}$

Range of applicability:

$$-1 \leq s_{xi} \leq +1 \quad -1 \leq s_{\theta i} \leq +1$$

Equivalent thickness evaluation:

Lower plate group thicker $t_c^2 \leq t_s^2 + t_h^2$	Upper plate group thicker $t_c^2 > t_s^2 + t_h^2$
$\eta = \sqrt{\frac{t_c^2}{t_s^2 + t_h^2}}$	$\eta = \sqrt{\frac{t_s^2 + t_h^2}{t_c^2}}$
$\psi_c = 1,0$	$\psi_c = 0,7 + 0,6\eta^2 - 0,3\eta^3$
$\psi_s = \psi_h = 0,7 + 0,6\eta^2 - 0,3\eta^3$	$\psi_s = \psi_h = 1,0$

Dependent parameters:

For the cylindrical segments $\ell_{oi} = 0,975 \psi_i \sqrt{rt_i}$

For the conical segment $\ell_{oh} = 0,975 \psi_h \sqrt{\frac{rt_i}{\cos \beta}}$

For each shell segment i separately	
Condition	Expressions
$s_{ei} < 1,00$ and $s_{\theta i} \geq -0,975$	$A_i = -s_{xi} + 2s_{\theta i} - 1,50$ $s_{mi} = A_i + \sqrt{A_i^2 + 4(1 - s_{ei}^2)}$ $\ell_{mi} = \ell_{oi} \left(\frac{s_{mi}}{1 + s_{\theta i}} \right)$
$s_{ei} = 1,00$	$\ell_{mi} = 0,0$
$s_{\theta i} < -0,975$	$\ell_{mi} = 0,0$

Plastic resistance is given by:

$$P_{xHR} r \sin \beta = f_y (A_r + \ell_{mc} t_c + \ell_{ms} t_s + \ell_{mh} t_h) + r (p_{nc} \ell_{mc} + p_{nh} \ell_{mh} \cos \beta)$$

Bild 5-29 Schalenstoß — Trichter-Schaft-Standzargenanschluß — Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit bei Innendruck- und Axialbelastung

5.4 Anwendungsbeispiele

5.4.1 Kreiszyylinderförmiger Behälter mit abgestufter Wanddicke

Die Zylinderschale mit Wanddickenabstufung in Bild 5-30 wird durch eine radiale Ringlast bzw. Axial- und Radialdruckbelastung beansprucht.

Es ist die aufnehmbare radiale Ringlast P_n in Abhängigkeit der zusätzlichen Radialdruck- bzw. Axialbelastung zu bestimmen.

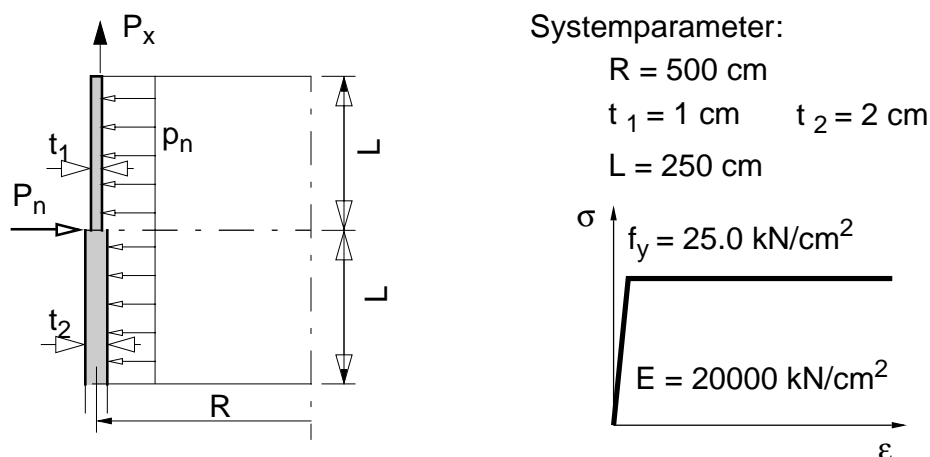


Bild 5-30 Behälter mit Wanddickenabstufung — Berechnungsmodell und Systemparameter

Die Referenzringlast ist die plastische Tragfähigkeit des dünneren Schalenteiles (t_1):

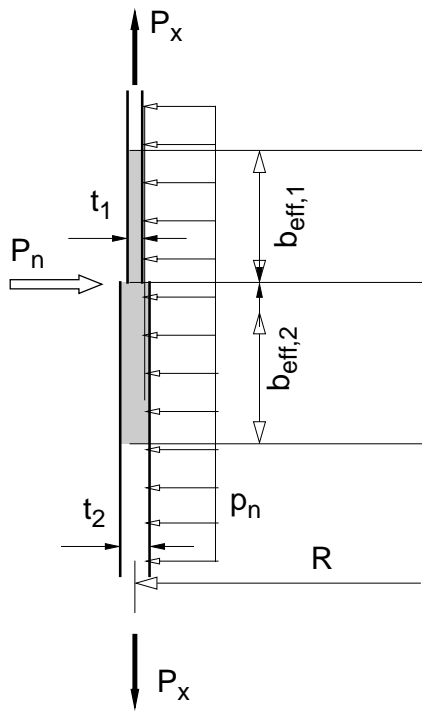
$$P_{n,\text{ref}} = f_y \cdot \frac{b_{\text{eff},1} \cdot t_1}{r} = 25,0 \cdot \frac{0,975 \cdot \sqrt{500} \cdot 1,0 \cdot 1,0}{500} = 1,0901 \text{ kN/cm} \quad (5-30)$$

Die zur Berechnung der Tragfähigkeit notwendigen Modifikationsfaktoren der mitwirkenden Breiten sind in Bild 5-31 dargestellt.

Die Berechnung erfolgt mit folgenden Korrekturfaktoren γ zur Berücksichtigung der Wanddickenabstufung. Die Basiswerte der mitwirkenden Breiten ($\psi_1 = \psi_2 = 1$) ergeben sich somit in Gl. (5-31b).

$$\begin{aligned} \eta &= t_1/t_2 = 1/2 = 0,5 \\ \gamma_1 &= 1,0 \\ \gamma_2 &= 0,7 + 0,6 \cdot 0,5^2 - 0,3 \cdot 0,5^3 = 0,8125 \end{aligned} \quad (5-31a)$$

$$\begin{aligned}
 b_{\text{eff},1} &= 1,0 \cdot 0,975 \cdot \sqrt{500 \cdot 1,0} &= 21,80 \text{ cm} \\
 b_{\text{eff},2} &= 0,8125 \cdot 0,975 \cdot \sqrt{500 \cdot 1,0} &= 25,05 \text{ cm}
 \end{aligned}
 \tag{5-31b}$$



$\eta = t_1/t_2$	$\gamma_1 = 1,0$ $\gamma_2 = 0,7 + 0,6 \cdot \eta^2 - 0,3 \cdot \eta^3$
$\sigma_{x,i} = P_x/t_i$ $\sigma_{\theta,i} = p_n \cdot R/t_i$	$b_{\text{eff},i} = \psi_i \cdot \gamma_i \cdot 0,975 \cdot \sqrt{R \cdot t}$

$$P_n = f_y \frac{(b_{\text{eff},1} t_1 + b_{\text{eff},2} t_2)}{R} + (b_{\text{eff},1} + b_{\text{eff},2}) p_n$$

Bild 5-31 Kreiszyklinderschale mit Wanddickenabstufung — mitwirkende Breiten und Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit bei Interaktion mit Radialdruck und Axialbelastung

Die Berechnung wird tabellarisch durchgeführt. Die Modifikationsfaktoren ψ und die plastische Tragfähigkeit ist bei Interaktion mit Radialdruckbelastung in Tab. 5-2 und bei Interaktion mit Axialbelastung in Tab. 5-3 dargestellt. Die Darstellungparameter sind dabei die bezogenen Meridian- und Umfangsspannungen $\sigma_{x,1}/f_y$ bzw. $\sigma_{x,\theta}/f_y$ des oberen Schalenteiles mit der geringeren Wanddicke (t_1).

Die bestimmten Tragfähigkeiten werden mit den Ergebnissen der MNA-Berechnungen verglichen.

Bild 5-32 zeigt, daß vor allem im Bereich von $\sigma_{\theta,1}/f_y \geq 0$ die Einführung des Modifikationsfaktors ψ wichtig ist, da durch das Entgegenwirken des Innendruckes gegen die radiale Ringlast bei Verwendung der mitwirkenden Breiten nach Rotter & Teng eine Überschätzung der Tragfähigkeit erfolgt. Im Bereich $\sigma_{\theta,1}/f_y < 0$ liegt man mit beiden Methoden (Wallner bzw. Rotter&Teng) unter den MNA-Ergebnissen.

Bei Axialbelastung (Bild 5-33) ist die Verwendung der modifizierten mitwirkenden Breiten von großer Bedeutung. Mit den Berechnungen nach Rotter und Teng erhält man, wie schon erläutert eine von den Axialspannungen unabhängige plastische Tragfähigkeit. Vor allem bei hohen Zugspannungen in Axialrichtung würde man ein unsicheres Ergebnis erhalten.

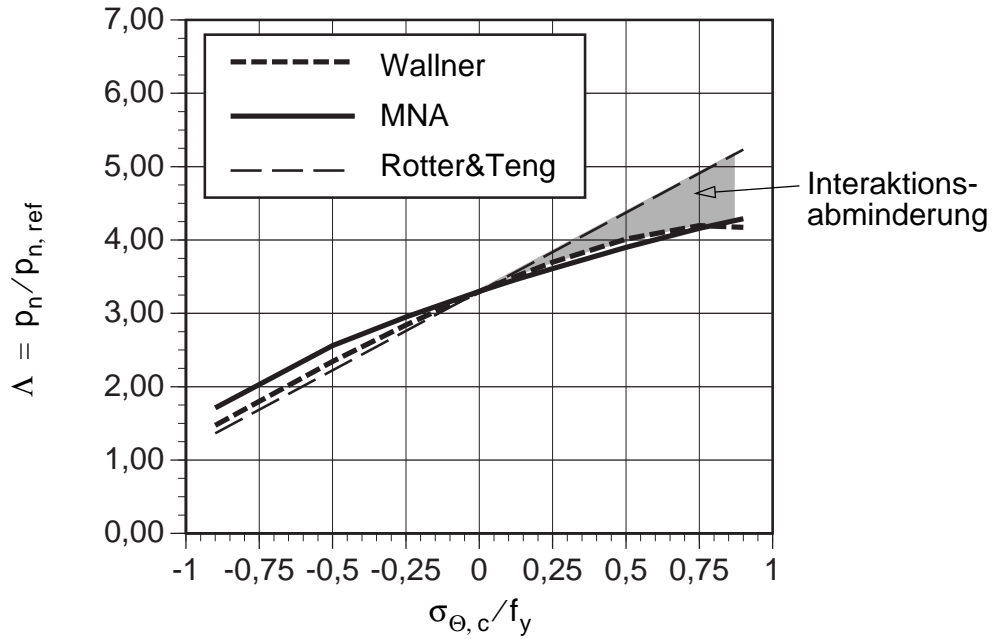


Bild 5-32 Kreiszyinderschale mit Wanddickenabstufung — plastische Tragfähigkeit bei Interaktion mit Radialdruck (Innen- bzw. Außendruck)

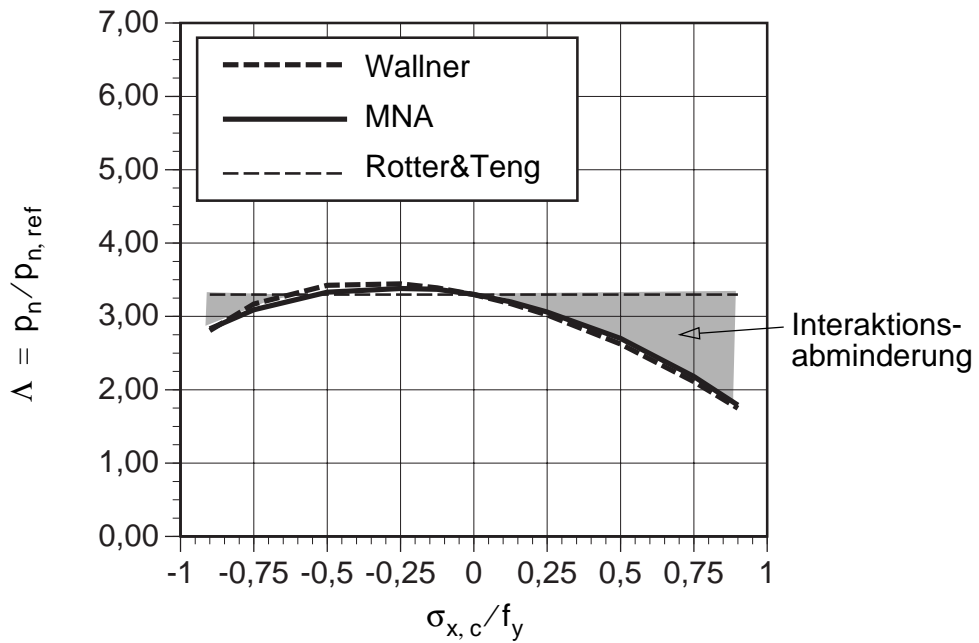


Bild 5-33 Kreiszyinderschale mit Wanddickenabstufung — plastische Tragfähigkeit bei Interaktion mit Axialbelastung)

Tab. 5-2 Kreiszyinderschale mit abgestufter Wanddicke - Ermittlung der Tragfähigkeit für radiale Ringlast bei Interaktion mit der Radialdruckbelastung p_n (Innen- bzw. Außendruck)

$\sigma_{\theta,1}/f_y$	ψ_1	ψ_2	P_n	$\Lambda = \frac{P_n}{P_{n,ref}}$	Λ_{R+T} Rotter & Teng	Λ_{MNA} (ABAQUS)	Abweichung in [%] $\frac{\Lambda}{\Lambda_{MNA}}$ $\Delta = 1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_{MNA}}$
-0,900	1,132	1,076	1,606	1,473	1,364	1,71	-13,9
-0,500	1,083	1,045	2,554	2,343	2,224	2,56	-8,5
-0,250	1,045	1,024	3,098	2,842	2,761	2,95	-3,6
0	1,000	1,000	3,595	3,298	3,298	3,30	-0,1
0,125	0,974	0,987	3,821	3,505	3,567	3,46	1,3
0,250	0,944	0,974	4,029	3,696	3,835	3,61	2,4
0,500	0,869	0,944	4,375	4,013	5,835	3,90	2,9
0,750	0,756	0,909	4,573	4,195	4,910	4,16	0,9
0,900	0,643	0,886	4,549	4,173	5,232	4,29	-2,7

Tab. 5-3 Kreiszyinderschale mit abgestufter Wanddicke - Ermittlung der Tragfähigkeit für radiale Ringlast bei Interaktion mit der Axialbelastung P_x

$\sigma_{x,1}/f_y$	ψ_1	ψ_2	P_n	$\Lambda = \frac{P_n}{P_{n,ref}}$	Λ_{R+T} Rotter & Teng	Λ_{MNA} (ABAQUS)	Abweichung in [%] $\frac{\Lambda}{\Lambda_{MNA}}$ $\Delta = 1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_{MNA}}$
-0,900	0,458	1,022	3,059	2,807	3,298	2,83	-0,8
-0,750	0,771	1,044	3,455	3,169		3,09	2,6
-0,500	1,000	1,055	3,733	3,424		3,33	2,8
-0,250	1,055	1,039	3,753	3,443		3,38	1,8
-0,125	1,039	1,022	3,694	3,389		3,37	0,6
0	1,000	1,000	3,595	3,298		3,30	-0,1
0,125	0,940	0,972	3,460	3,174		3,20	-0,8
0,250	0,860	0,940	3,292	3,020		3,06	-1,3
0,500	0,646	0,860	2,859	2,622		2,70	-2,9
0,750	0,360	0,762	2,301	2,111		2,18	-3,2
0,900	0,153	0,694	1,907	1,749		1,79	-2,3

5.4.2 Trichter-Schaft-Standzargenanschluß eines Stahlsilos

Das vorliegende Beispiel in Bild 5-34 besteht aus einer Kombination von Trichter, Schaft und Standzarge. Dabei werden alle Schalenteile mit gleicher Wanddicke ausgeführt. Als Belastung wirkt konstante Innendruckbelastung an Trichter und Schaft. Die Standzarge wird durch die Vertikalkomponente der Trichtermeridiankraft belastet. Am Schalenstoß wirkt die radiale Umlenkkomponente der Trichtermeridiankraft, zusätzlich wirkt an Schaft und Standzarge eine Axialbelastung.

Es ist die aufnehmbare Innendruckbelastung p_n in Abhängigkeit der zusätzlichen Axialbelastung P_x zu bestimmen. Maßgebend ist die Tragfähigkeit des Schalenstoßes.

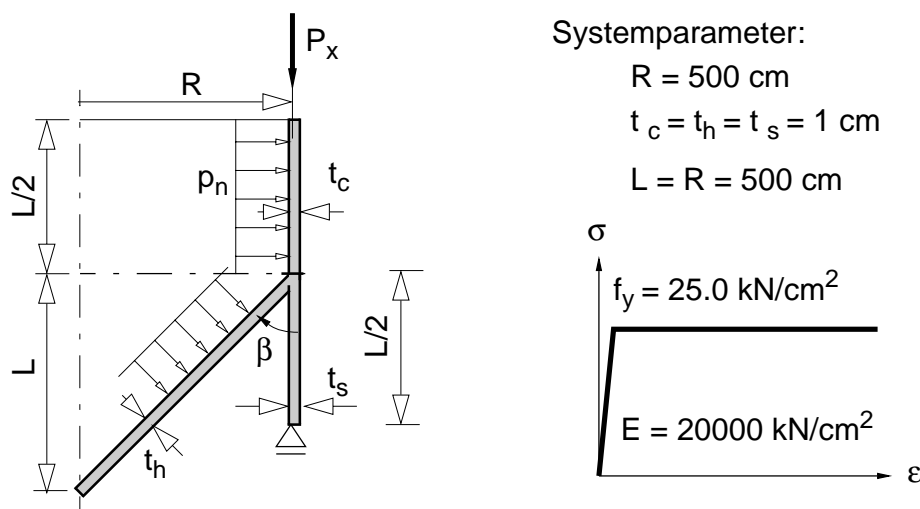


Bild 5-34 Trichter-Schaft-Standzargenanschluß — Berechnungsmodell und Systemparameter

Die verwendete Referenzbelastung ergibt sich aus der maximal aufnehmbaren Innendruckbelastung des Zylindermantels in Gl. (5-32).

$$p_{n, \text{ref}} = f_y \cdot t_c / r = 25,0 \cdot 1,0 / 500 = 0,05 \text{ kN/cm}^2 \quad (5-32)$$

Die Tragfähigkeitsformel ergibt sich in diesem Fall folgendermaßen für die radiale Ringlast $P_{n, \text{int}}$ am oberen Rand des Kegels zufolge der Innendruckbelastung in Gl. (5-33a). Letztendlich erhält man daraus den aufnehmbaren Innendruck p_n in Gl. (5-33c).

$$P_n = f_y \frac{(b_{\text{eff}, c} t_c + b_{\text{eff}, s} t_s + b_{\text{eff}, h} t_h)}{R} + (b_{\text{eff}, h} \cdot \cos \alpha + b_{\text{eff}, c}) \cdot p_n \quad (5-33a)$$

$$P_n = P_{n, \text{init}} = n_{x, h} \cdot \sin \beta = \frac{p_n \cdot R}{2} \cdot \tan \beta \quad (5-33b)$$

$$p_n = f_y \frac{(b_{\text{eff}, c} t_c + b_{\text{eff}, s} t_s + b_{\text{eff}, h} t_h)}{R \left(\frac{R}{2} \tan \beta - b_{\text{eff}, h} \cdot \cos \beta - b_{\text{eff}, c} \right)} \quad (5-33c)$$

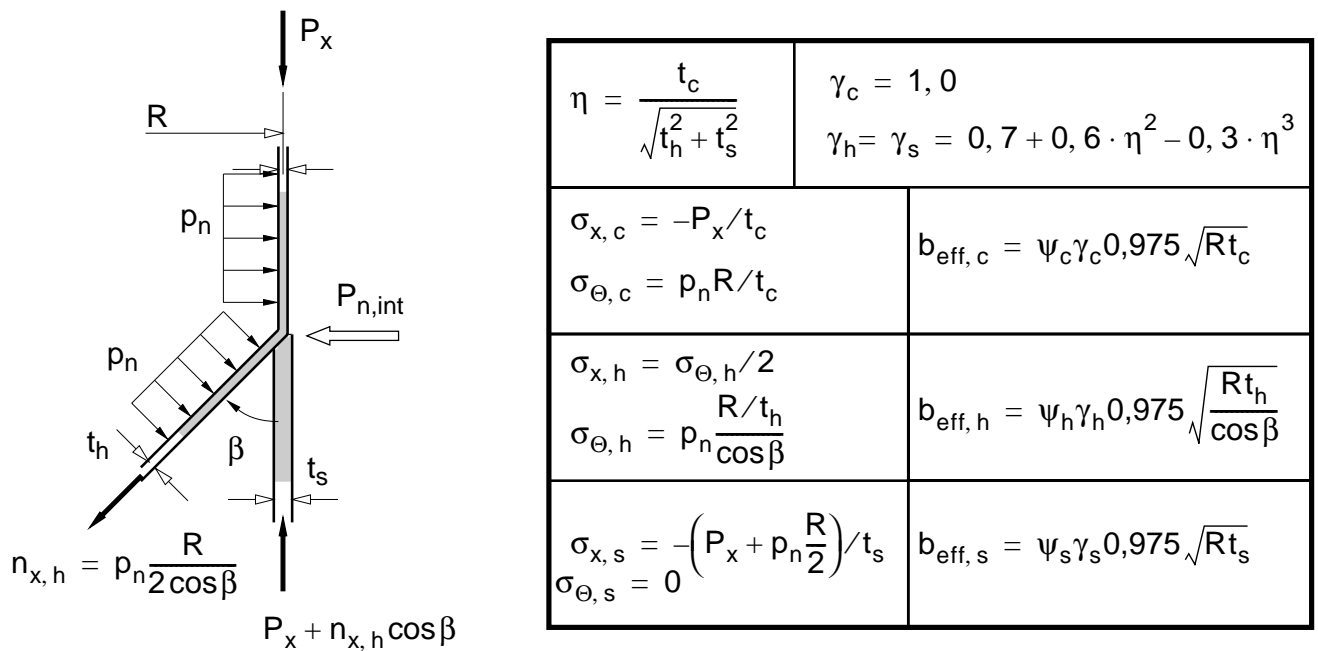


Bild 5-35 Trichter-Schaft-Standzargenanschluß — Belastungen und Spannungen der Einzelteile bei Innendruck- und Axialbelastung

Die Berechnung der plastischen Tragfähigkeit wird in zwei Schritten durchgeführt.

- Vorab wird die Tragfähigkeit unabhängig von den Membrangrundspannungen der Einzelteile bestimmt ($\psi_c = \psi_h = \psi_s = 1$). Dies entspricht somit den Berechnungen nach Rotter und Teng.
- Mit der bestimmten Tragfähigkeit werden die Membranspannungen der Einzelteile berechnet und die Modifikation der mitwirkenden Breiten vorgenommen. Anschließend erfolgt die neuerliche Berechnung der Tragfähigkeit.

Zur Ermittlung der mitwirkenden Breiten für Zylindermantel, Standzarge und Kegelmantel werden die Wanddickenverhältnisse der Schalengruppen (Schaft bzw. Trichter und Standzarge) berücksichtigt. Daraus folgen die mitwirkenden Breiten der Einzelteile.

$$\eta = t_c / \sqrt{t_h^2 + t_s^2} = 0,707$$

$$\gamma_c = 1,0$$

$$\gamma_s = \gamma_h = 0,894$$

(5-34)

Erster Berechnungsschritt

Die mitwirkenden Breiten von Schaft, Standzarge und Trichter sind in Gl. (5-35a) zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
 b_{\text{eff},c} &= 1,0 \cdot 0,975 \cdot \sqrt{500 \cdot 1,0} &= 21,80 \text{ cm} \\
 b_{\text{eff},s} &= 0,894 \cdot 0,975 \cdot \sqrt{500 \cdot 1,0} &= 19,49 \text{ cm} \\
 b_{\text{eff},h} &= 0,894 \cdot 0,975 \cdot \sqrt{500 \cdot 1,0 / \cos 45} &= 23,18 \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{5-35a}$$

Die Tragfähigkeit wird entsprechend Gl. (5-33c) bestimmt.

$$p_n = 25,0 \cdot \frac{(21,80 \cdot 1,0 + 23,18 \cdot 1,0 + 25,93 \cdot 1,0)}{500 \cdot \left(\frac{500}{2} \cdot \tan 45 - 23,18 \cdot \cos 45 - 21,80 \right)} = 0,0167 \text{ kN/cm}^2 \tag{5-36}$$

Der Lastfaktor erfolgt durch Gegenüberstellung mit der Referenzradialdruckbelastung:

$$\Lambda = p_n / p_{n,\text{ref}} = 0,0167 / 0,05 = 0,335$$

Zweiter Berechnungsschritt — Modifikation der mitwirkenden Breiten

Die Berechnung der modifizierten mitwirkenden Breiten erfolgt aufbauend auf den ermittelten Laststeigerungsfaktor von $\Lambda = 0,335$. Da durch die folgende Abminderung der mitwirkenden Breiten letztendlich eine geringere Tragfähigkeit erzielt wird, wird zur Berechnung der Membrangrundspannungen ein Lastfaktor von $\Lambda = 0,30$ verwendet.

Die Berechnung der mitwirkenden Breiten ist in Bild 5-36 dargestellt. Die Axialbelastung des Schaftes wird dabei vorerst zu Null gesetzt ($P_x = 0$). Die Tragfähigkeit folgt wiederum entsprechend Gl. (5-33c). Durch Gegenüberstellung mit der Referenzbelastung folgt der modifizierte Lastfaktor Λ :

$$p_n = 25,0 \cdot \frac{(20,3 \cdot 1,0 + 20,3 \cdot 1,0 + 19,3 \cdot 1,0)}{500 \cdot \left(\frac{500}{2} \cdot \tan 45 - 19,3 \cdot \cos 45 - 20,3 \right)} = 0,0139 \text{ kN/cm}^2 \tag{5-37a}$$

$$\Lambda = p_n / p_{n,\text{ref}} = 0,0139 / 0,05 = 0,277 \tag{5-37b}$$

Der Schaft und die Standzarge werden zusätzlich durch eine Axialbelastung beansprucht. In Tab. 5-4 sind die Ergebnisse aufgelistet und in Bild 5-37 dargestellt. Der Darstellungsparameter ist die bezogene Meridianspannung $\sigma_{x,c} / f_y$ des Schaftes.

- Die “effective area method“ liefert, wie aus den Bemessungsformeln zu erwarten ist, von der Axialbelastung unabhängige Tragfähigkeiten.
- Die Implementierung der modifizierten mitwirkenden Breiten ergibt Tragfähigkeiten, die eine äußerst gute Näherungen der MNA-Berechnungen sind (siehe Tab. 5-4).

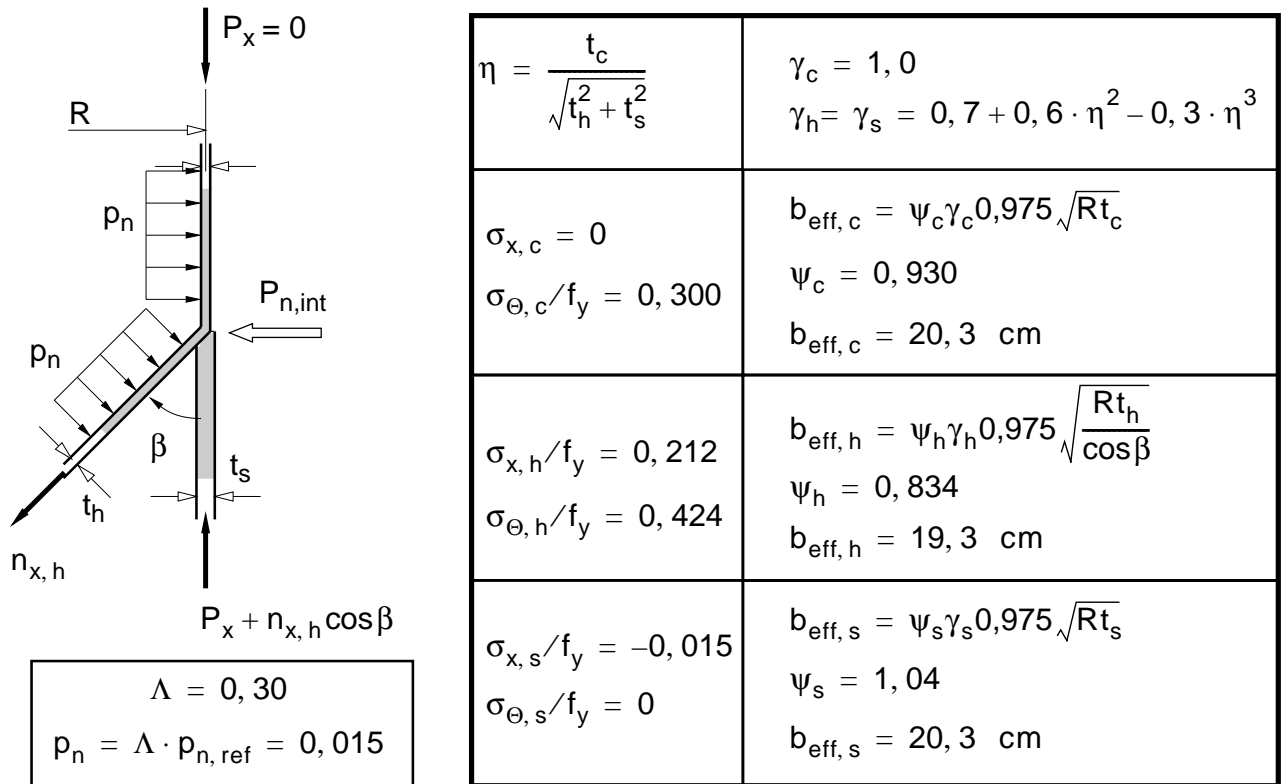


Bild 5-36 Trichter-Schaft-Standzargenanschluß — Ermittlung der modifizierten mitwirkenden Breiten für Schaft, Trichter und Standzarge

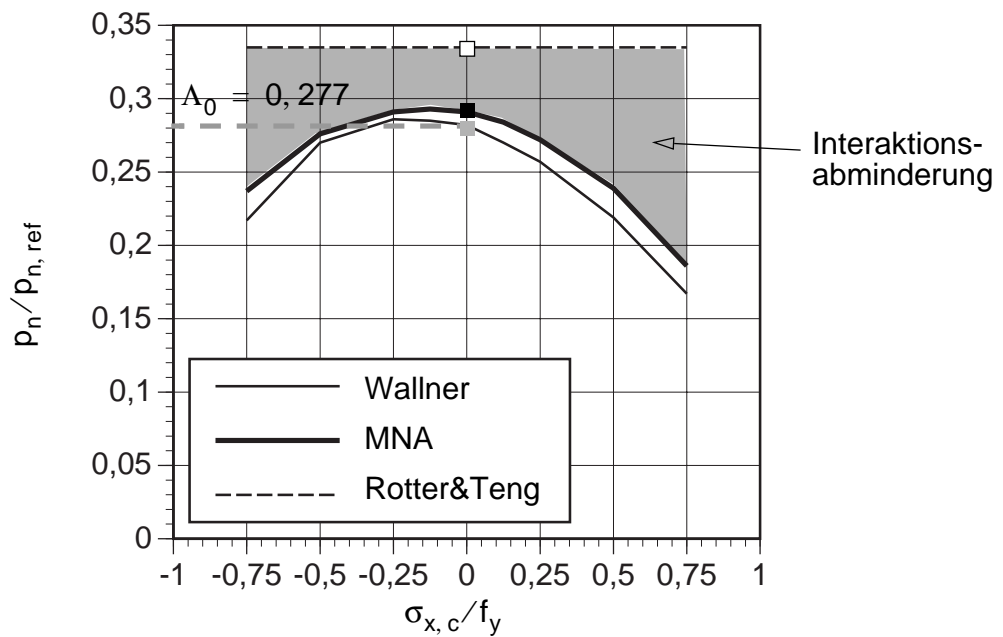


Bild 5-37 Trichter-Schaft-Standzargenanschluß — Tragfähigkeit bei Innendruckbelastung in Abhängigkeit der zusätzlichen Axialbelastung des Schaftes

Tab. 5-4 Trichter-Schaft-Standzargenanschluß — Tragfähigkeit bei Innendruckbelastung in Abhängigkeit der zusätzlichen Axialbelastung des Schaftes

$\sigma_{x,c}/f_y$	$\Lambda = \frac{p_n}{p_{n,ref}}$	Λ_{R+T} Rotter & Teng	Λ_{MNA} (ABAQUS)	Abweichung in [%] $\Delta = 1 - \frac{\Lambda}{\Lambda_{MNA}}$
-0,750	0,215	0,335	0,237	8,1
-0,500	0,266		0,276	3,8
-0,250	0,282		0,291	2,3
-0,125	0,282		0,293	2,8
0,0	0,277		0,291	2,3
0,125	0,267		0,284	3,3
0,250	0,253		0,272	3,4
0,500	0,216		0,239	3,3
0,750	0,165		0,186	0,0

5.5 Zusammenfassung von Kap. 5

Zusammenfassung

Zusammenfassend ergibt sich Folgendes:

- Die Berechnung der plastischen Tragfähigkeit rotations-symmetrisch beanspruchter Schalenstöße wird in der vorliegenden Form durch die Modifikation der bisher verwendeten plastischen mitwirkenden Breiten (Rotter bzw. Teng) vorgenommen. Eingangsgrößen sind die Membrangrundspannungen der Einzelteile. Ingenieurmäßige Überlegungen durch die Superposition von Umfangspannungen zufolge der am Schalenstoß wirkenden radialen Ringlast mit den Membrangrundspannungen der Einzelteile führen zu nicht zutreffenden Ergebnissen.
- Anhand von zwei Demonstrationsbeispielen wird die gute Übereinstimmung mit den realen Tragfähigkeiten materiell nichtlinearer FE-Berechnungen gezeigt.
- Die ausgearbeiteten Bemessungsformeln wurden nahezu in ungeänderter Form in Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) in Annex B übernommen.

Ausblick

Die vorstehenden Bemessungsformeln gelten für den Fall der Axialsymmetrie. Es erhebt sich die Frage, wie und ob diese Resultate sinngemäß angewandt, auch im Fall nichtaxialsymmetrischer Verteilungen der Umfangsmembranspannungen σ_{θ} und insbesondere der Meridianmembranspannungen σ_x Anwendung finden können.

6

BASISRINGTRÄGER

Inhalt von Kapitel 6:

- 6.1 Tragfunktion und Modellbildung**
- 6.2 Linear-elastische Schnittkraft- und Verformungsberechnungen**
- 6.3 Spannungsbasierte Tragfähigkeitsberechnung**
- 6.4 Materiell nichtlineare Berechnungen**
- 6.5 Vergleich der Tragfähigkeiten**
- 6.6 Zusammenfassung von Kap. 6**

6.1 Tragfunktion und Modellbildung

Das Silo-Gesamtragsystem wird entsprechend Kap. 1 in mehrere Teiltragsysteme aufgeteilt, die Abtragung der Gesamtbelastung erfolgt durch das Zusammenwirken dieser Teiltragsysteme. Das Gleichgewicht am Gesamtsystem wird durch wechselweise wirkende Gleichgewichtskraftgruppen gewährleistet.

Im vorliegenden Fall des diskret gelagerten Silos in Bild 6-1 entsteht durch die Anbindung des Basisringbleches an den Trichter ein integrierter dreieckförmiger Hohlkastenringträger. Durch die Anordnung von Schottblechen in den Auflagermeridianebenen ist eine zusätzliche lokale Lagerung des Trichters möglich und weiters erfolgt eine Querschnittsaussteifung des Basisringträgers.

Bei der gewählten Modellbildung in Kap. 3 wird dem Basisringträger eine Lastabtragungsfunktion lediglich als sekundäres Tragelement zugewiesen. Er nimmt aus Steifigkeitsgründen nicht an der Abtragung der Vertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen teil, vielmehr ist er für die Abtragung von Einzelradialkräften bzw. Einzeltorsionsmomenten verantwortlich. Diese Einzelradialkräfte bzw. Einzeltorsionsmomente sind zur Erfüllung des Gleichgewichtes am Schottblech notwendig und wirken gegengerichtet auf den Basisringträger ein (siehe Kap. 3.2).

Im folgenden wird das Tragverhalten des Basisringträgers in Abhängigkeit der Modellbildung untersucht, und zwar als:

- isolierter Basisringträger
- integrierter Basisringträger

Dabei wirken rotationssymmetrisch verteilte Vertikalkräfte bzw. Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente, die sich aufgrund der vorliegenden Modellbildung (Kap. 3) und der Definition von Lastabtragungsmechanismen ergeben. Die Vertikalbelastung des integrierten Basisringträgers wird hier der Vollständigkeit halber mituntersucht.

Die Abtragung der Vertikalbelastung über den diskreten Auflagerungen könnte sowohl vom Schaft alleine, wobei das Basisringblech die Randbedingung in Radial- und Umfangsrichtung des unteren Schaftendes darstellt, als auch vom Basisringträger alleine erfolgen. Die Einzelradialkräfte bzw. Einzeltorsionsmomente hingegen können ohne Basisringträger von der Schale in praktischen Fällen kaum alleine aufgenommen werden. Zu bemerken ist, daß diese Kraftwirkungen erst durch den Einbau des Schottbleches und durch die dadurch mögliche lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung (=Schubkraftlagerung des Trichters in Kap. 4) entstehen.

Das heißt vereinfacht:

- “Kein Schottblech — keine lokale Trichterauflagerung — keine lokalen Basisringträgerbelastungen in den Auflagermeridianebenen.“

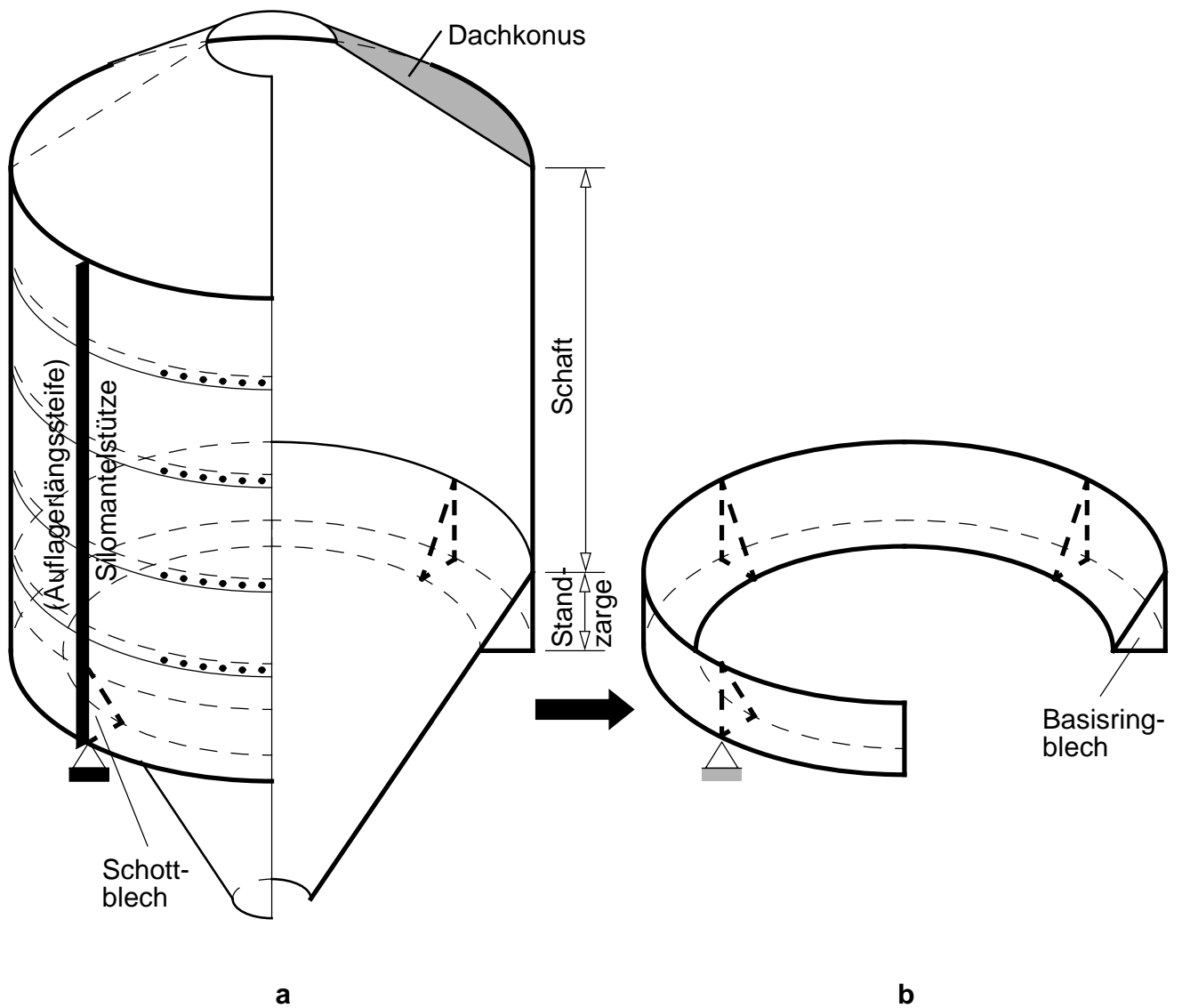


Bild 6-1 a. Gesamtragsystem und b. herausgelöster Basisringträger (dreieckförmiger Hohlkastenringträger)

6.1.1 Modellbildungsvarianten

Ausgangspunkt ist in Bild 6-2 das aus Trichter, Standzarge, Schaft und Basisringblech bestehende Gesamtragsystem. Das Herauslösen von isolierten Teiltragsystemen bedeutet, daß das Gleichgewicht am Gesamtsystem zwischen den getrennten Systemen stets erfüllt wird. Die Tragwirkung der isoliert behandelten Teiltragsysteme wird, wie bereits mehrfach erwähnt, durch die wechselseitige Wirkung der Randkräfte erfaßt.

Weiters kann die Verbindung von unbelasteten Einzelteilen, gedanklich gelöst werden und somit die steifigkeitsmäßige Mitwirkung an der Lastabtragung unberücksichtigt bleiben.

Die verschiedenen Modellierungsstufen ergeben sich durch sukzessives Herauslösen von Teiltragsystemen. Durch das Herauslösen des Trichters verbleibt das Schaft-Basisringträger-System, durch die weitere isolierte Behandlung des Schaftes verbleibt als Tragsystem der isolierte Ringträger.

Das Trennen der Verbindung von Basisringblech und Trichter liefert als Tragsystem das Schaft-Trichter-System, das Basisringblech stellt dabei die Randbedingung des unteren Schaftendes dar. Als Teiltragsystem verbleibt das Schaftsystem, der Trichter wird isoliert behandelt.

Zwischen den herausgelösten Teiltragsystemen treten die Meridianrandkräfte $n_{x,h}$ des Trichters bzw. $n_{x,c}$ des Schaftes in Wechselwirkung zur Erfüllung der statischen Kompatibilität auf.

Die baustatische Modellierung des integrierten, dreieckförmigen Basisringträgers als Kreisringträgerstab in Bild 6-2.b bzw. Bild 6-2.c bedeutet daß folgende Steifigkeiten der Einzelteile des Basisringträgers als unendlich hoch angenommen werden:

- unendliche hohe Meridiandehnsteifigkeiten:
Standzarge $D_x \rightarrow \infty$, Trichter $D_\phi \rightarrow \infty$, Basisringblech $D_r \rightarrow \infty$
- unendliche hohe meridionale Biegesteifigkeiten:
Standzarge $K_x \rightarrow \infty$, Trichter $K_\phi \rightarrow \infty$, Basisringblech $K_r \rightarrow \infty$

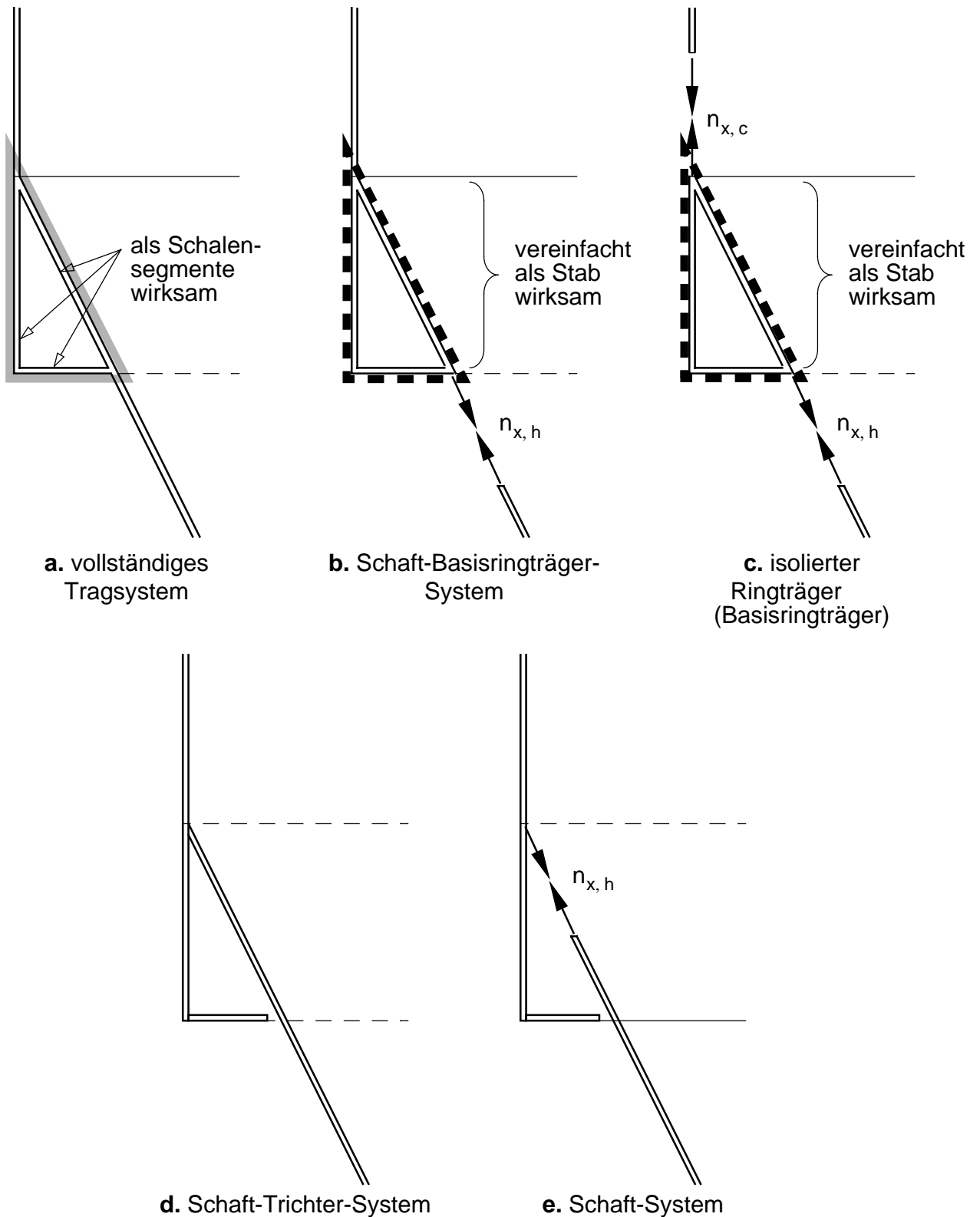


Bild 6-2 Modellierung des Gesamtragsystems durch Herauslösen von isolierten Teiltragsystemen — Modellierung des dreieckförmigen Hohlkastenquerschnitts mit Schalensegmenten oder alternativ als integrierter oder isolierter Basisringträger (Stabmodellierung)

6.1.2 Untersuchte Tragsysteme

In Tab. 6-1 sind die im weiteren untersuchten Tragsysteme dargestellt. Der Trichter wird isoliert betrachtet und seine Tragwirkung mit dem verbleibenden Tragsystem wird nur mehr durch seine Meridianrandkräfte repräsentiert. Je nach weiterem Herauslösen verbleiben folgende Tragsysteme in Tab. 6-1:

- Schaft-Basisringträger-System
- isolierter Basisringträger
- Schaft-System

Die durchgehenden Auflagerlängssteifen des Schaftes sind dabei nicht berücksichtigt. Die baustatische Modellierung des Basisringträgers erfolgt dabei als:

- räumlicher Ringträgerstab — Modell R
- Schalentragswerk — Modell Rs

Bei der Modellierung des Basisringträgers als Schalentragswerk (Modell "Rs" bzw. "Rs + S") wird das kraft- und formschlüssig eingebaute Schottblech in seiner Wirkung als unendlich starres Schottblech berücksichtigt.

Beim Schaft-System wird das Basisringblech in seiner Tragwirkung durch die Randbedingung $v = w = 0$ des unteren Schaftendes ersetzt.

Tab. 6-1 Untersuchte Tragsysteme

a. Rs + S	b. R + S	c. Rs	d. R	e. R w0 R* w0	f. S
vollständiges Schalenmodell	Schaft-Ringträger-System	isolierter Ringträger (Schalenmodell)	isolierter Ringträger	isolierter Ringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung (R* querschubstarrer Ringtr.)	Schaft-System

In Bild 6-3 sind die Kraftwirkungen am verbleibenden Schaft-Basisringträger-System dargestellt. Die Meridianrandkräfte $n_{x,h}$ des Trichters wirken als gleichförmige verteilte Vertikalkräfte und radiale Kräfte an der Oberkante des Ringträgers am Trichter-Schaft-Übergang (hier nicht dargestellt). Am isolierten Ringträger wirken zusätzlich die Meridiankräfte des Schaftes. Diese Kraftwirkungen ergeben am Ringträger bzw. Schaft-Basisringträger-System eine gleichförmige Vertikalbelastung p_z und die diskreten Auflagerkräfte F .

Die radialen linienförmigen Kräfte erzeugen eine lokale Beanspruchung des Trichter-Schaft-Überganges. Die Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit bezüglich dieser Beanspruchung erfolgt isoliert in Kap. 5.

Die Haltekräfte des Schottbleches H und M_T in Bild 6-3, die aus Gleichgewichtsgründen bei Wirken der lokalen Trichterauflagerkraft T_K bzw. der Teillagerkraft F_S des Schaft-Systems erforderlich sind, werden vom isolierten Basisringträger bzw. Schaft-Basisringträger-System aufgenommen.

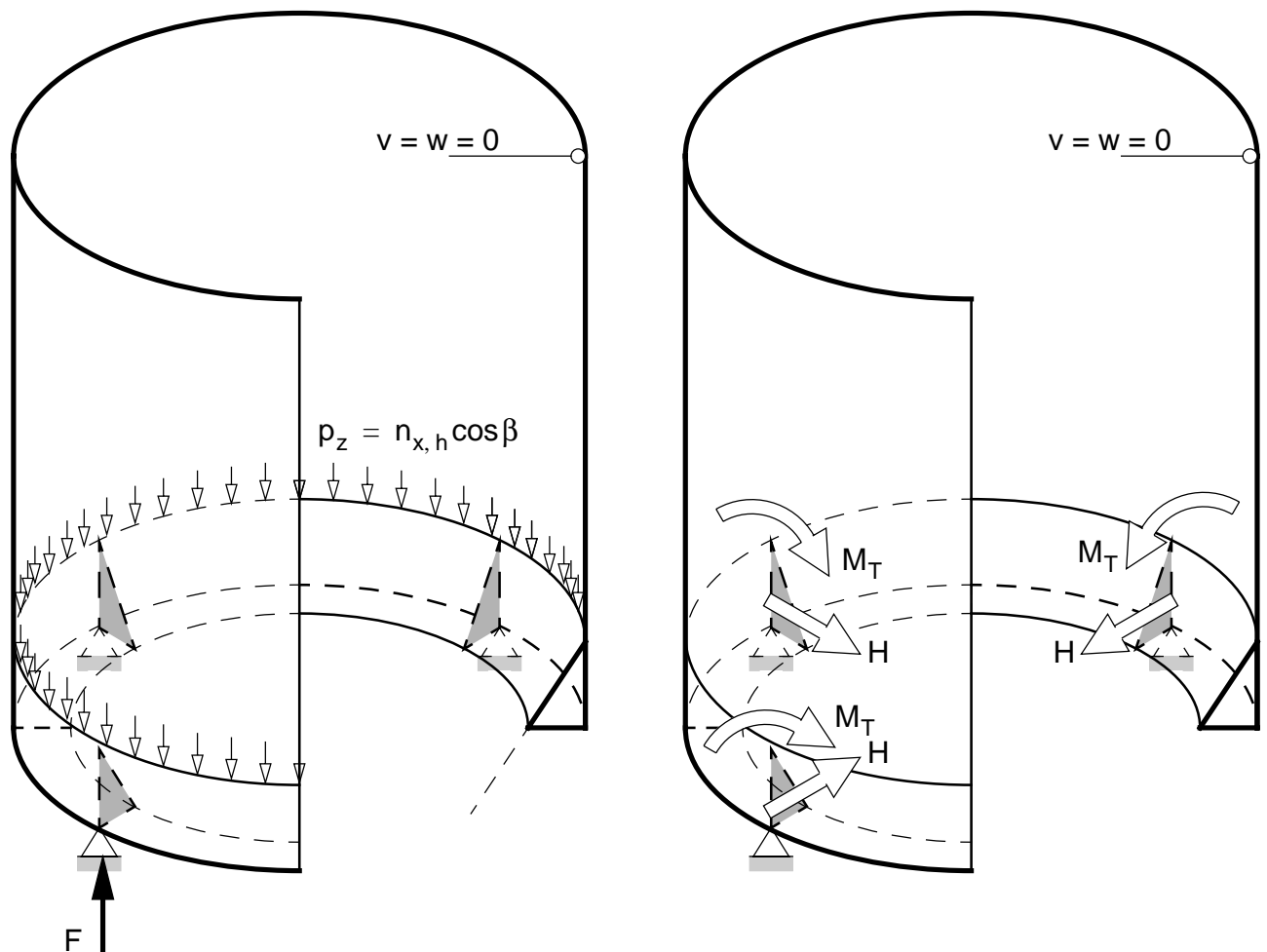


Bild 6-3 Belastung des Schaft-Basisringträger-Systems durch die rotationssymmetrisch verteilten Vertikalkräfte bzw. Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente

6.1.3 Analytische und numerische Lösungsmethoden

6.1.3.1 Linear-elastische Spannungsberechnungen

Die Schnittkräfte des isolierten Ringträgers werden zum Teil — je nach Belastungsart — direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen bestimmt. Alternativ kann die Berechnung mit Fourierreihensätzen in Umfangsrichtung erfolgen. Neben den Schnittkräften erhält man die Verformungen auf einfache Art und Weise, wobei für jedes Reihenglied die Operatormatrizen der Grundgleichungen (siehe Anhang A.2) durch die Implementierung der Reihenansätze in algebraische Matrizen übergeführt werden. Die Grundgleichungen des Kreisringträgers die ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem darstellen, reduzieren sich somit durch die Fourierreihenansätze in Umfangsrichtung auf algebraische Grundgleichungssysteme.

Die Berechnung des Schaft-Basisringträger-Systems erfolgt semi-analytisch durch Fourierreihenansätze in Umfangsrichtung. Die Lösung der Schalengleichungen, die in ihrer mechanischen Problembeschreibung als partielles Differentialgleichungssystem vorliegen, reduzieren sich nun auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für jedes Reihenglied. Durch Steifigkeitsannahmen entsprechend Anhang A.1 gelingt es das gewöhnliche Differentialgleichungssystem von 8. Ableitungsstufe auf die 4. Stufe zu reduzieren. Die Kreiszylinderschale liegt in ihrem reduzierten Tragverhalten als sogenannte Semi-Membranschale vor.

Durch die Verwendung von Fourierreihenansätze ergeben sich folgende Spezialisierungen:

- Homogenität bezüglich der Randbedingungen und des Tragsystems (Wanddicken, Materialkennwerte) in Umfangsrichtung
- äquidistant angeordnete Auflagerungen
- Wiedergabe von diskreten Auflagerungen als nachgiebige Lager durch die Vorgabe von Lagerkräften bzw. durch verteilte Lagerkräfte.

Für den räumlichen Ringträger liegen für die Vertikalbelastung, Einzeltorsionsmomenten- und die Einzelradialkraftbelastung zumindest für symmetrische bzw. einfach symmetrische Querschnittsformen geschlossene Lösungen vor (Unold (1922) bzw. Bleich (1932), Martens (Silohandbuch 1988), Greiner und Guggenberger (1990) oder Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999)).

Analytische Kreisringträgerberechnung

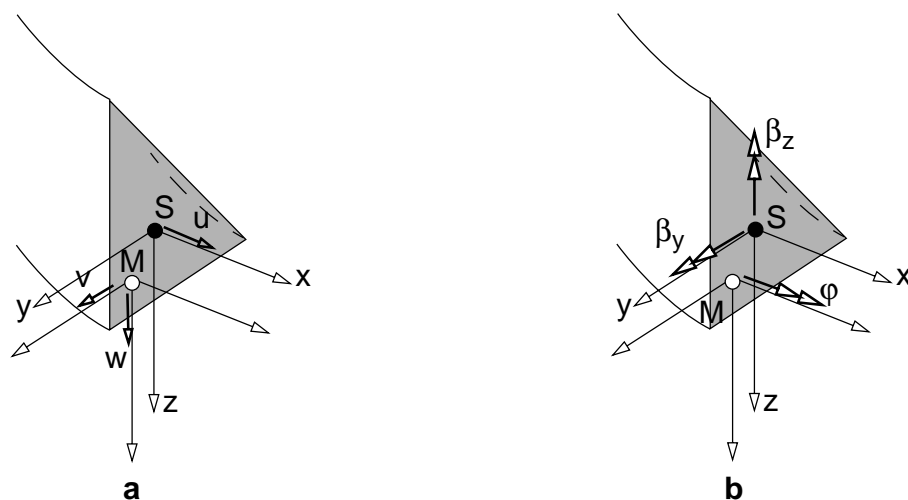
Die Kinematik des Kreisringträgerstabes wird entsprechend Bild 6-4 bzw. Anhang A.2 mit drei Verschiebungsgrößen und drei Drehparametern beschrieben. Die zugeordneten Schnittgrößen sind die Normalkraft, die Querkkräfte, das Gesamttorsionsmoment und die Biegemomente des Ringträgers in Bild 6-5 dargestellt. In den verwendeten Grundgleichungen in Anhang A.2 sind die Querkraft- und die Torsionswirkung auf den Schubmittelpunkt, die Normalkraft- und Biegewirkungen auf den Schwerpunkt bezogen (siehe Tab. 6-2). Die Bezugsachsen des Querschnittes sind dabei die horizontale y -Achse und die vertikale z -Achse.

Tab. 6-2 Verformungen und Schnittgrößen des Kreisringträgerstabes

Verformungsgrößen		Schnittgrößen		Bezugspunkt	Bezugsachse
Verschiebungen	u	Normalkraft	N	S	Längsachse (x-Achse)
	v	Querkräfte	Q_y	M	horizontale y-Achse
	w		Q_z	M	vertikale z-Achse
Verdrehungen	φ	Torsionsmoment	M_t	M	Längsachse (x-Achse)
	β_y	Biegemomente	M_y	S	horizontale y-Achse
	β_z		M_z	S	vertikale z-Achse

Die Beschreibung der Kinematik erfolgt kennfaserorientiert. Der Drehparameter β_z ist positiv definiert, wenn die entstehenden Umfangsverschiebungen u für Querschnittspunkte mit positiven Querschnittsordinaten y und z positiv sind. Der Drehvektor weist somit in Bild 6-4 in die negative z -Richtung. Das Biegemoment M_z ist entsprechend der Festlegung des Drehparameters β_z positiv, wenn es im ersten Quadranten (Querschnittsordinaten y und z sind positiv) Zugspannungen erzeugt. Der Momentenvektor weist somit ebenfalls in die negative z -Richtung.

Die Wölbkrafttorsion ist modularartig berücksichtigt. Die Wölbamplitude ergibt sich durch die Wagner-Hypothese aus dem Torsionsdrehwinkel φ .

**Bild 6-4** Verformungsgrößen des Kreisringträgerstabes — a. Verschiebungsgrößen und b. Drehparameter

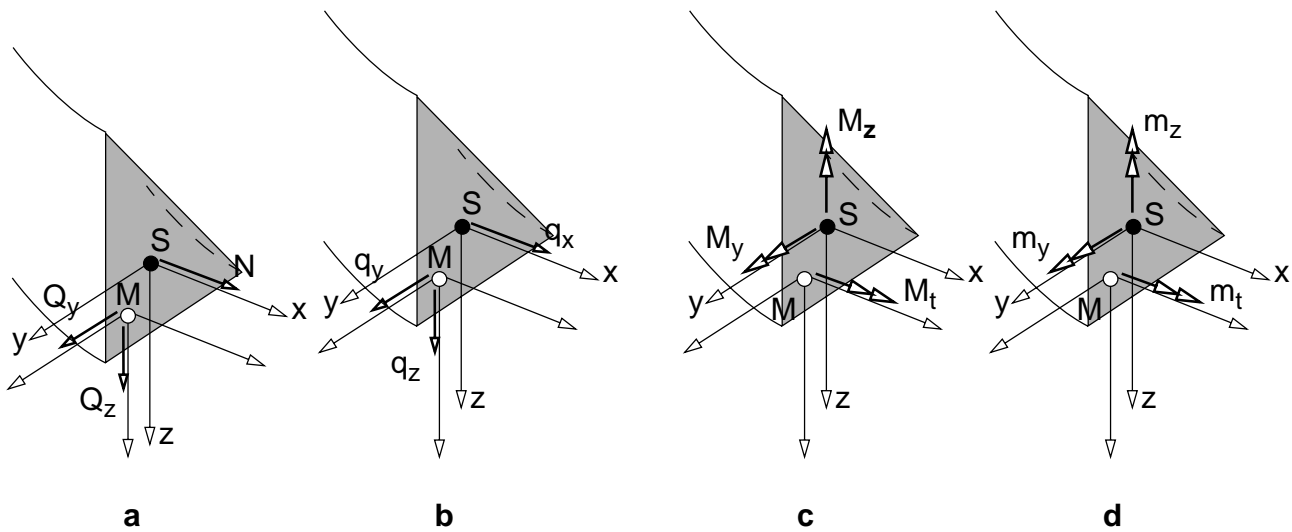


Bild 6-5 Schnittkräfte und Belastungsgrößen des Kreisringträgerstabes — **a.** Normal- und Querkräfte, **b.** Streckenbelastungen, **c.** Biege- und Torsionsmomente bzw. **d.** Streckenmomentenbelastungen

6.1.3.2 Numerische Lösung

Linear-elastische Spannungsberechnungen

Zu Vergleichszwecken werden die Einzelteile des Basisringträgers mit Schalensegmenten (FE-Schalnberechnung mit ABAQUS (1997)) modelliert (Kap. 6.2.2.3).

Der Vergleich mit den Ergebnissen der linear-elastischen Kreisringträgerberechnungen erfolgt für den integrierten Basisringträger (Systeme “R + S“ und “Rs + S“), auf den die Vertikalbelastung entsprechend Bild 6-3 einwirkt.

Materiell nichtlineare Berechnungen

Zur Berechnung der plastischen Grenztragfähigkeit des integrierten Basisringträgers werden in Kap. 6.4 materiell nichtlineare FE-Berechnungen mithilfe des Programmes ABAQUS (1997) durchgeführt. Dabei werden die Einzelteile des Basisringträgers mit Schalensegmenten modelliert.

In alternativer Form werden dazu starrplastische Berechnungen des integrierten Basisringträgers durchgeführt. Der Schaft wird dabei als vertikal unverschiebliche Schaftanbindung des Basisringträgers modellhaft wiedergegeben. Die Lösung erfolgt durch Vorwärtsintegration in Umfangsrichtung

Das Augenmerk liegt dabei auf den durch Einzeltorsionsmomente und Einzelradialkräfte belasteten integrierten Basisringträger.

6.2 Linear-elastische Schnittkraft- und Verformungsberechnungen

6.2.1 Überblick durchgeführter Berechnungen

Zur Studie des Tragverhaltens des isolierten bzw. integrierten Basisringträgers werden linear-elastische Spannungsberechnungen (LA) und im späteren materiell nichtlineare FE-Berechnungen (MNA in Kap. 6.4) durchgeführt. Aufbauend auf den linearen Schnittkraft- und Verformungsberechnungen erfolgt eine Abschätzung der Tragfähigkeit. Diese werden den plastischen Grenztragfähigkeiten der materiell nichtlinearen Berechnungen (MNA) gegenübergestellt.

Linear-elastische Spannungsberechnungen

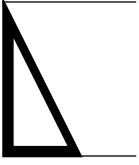
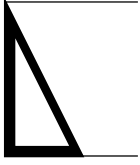
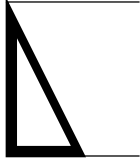
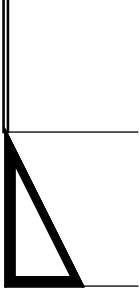
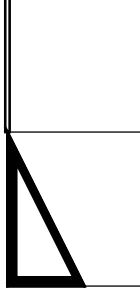
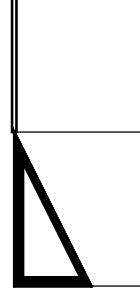
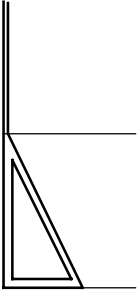
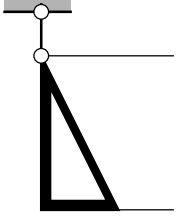
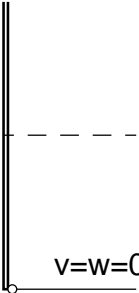
Linear-elastische Spannungsberechnungen werden bei folgenden Modellierungsvarianten in Tab. 6-3 für Vertikalbelastung, Einzeltorsionsmomenten- und Einzelradialkraftbelastung vorgenommen.

Die Lastabtragung der Vertikalbelastung ist durch alle drei Tragsysteme — isolierter Basisringträger “R“, Schaft-Basisringträger-System “R+S“ und Schaft-System “S“ — möglich. Das Schaftsystem stellt das Referenzsystem zur Beurteilung der Steifigkeitserhöhung des Schaft-Basisringträger-System dar.

Linear-elastische Spannungsberechnungen werden am vollständigen Schalenmodell nur bei Vertikalbelastung durchgeführt. Anhand der Spannungs- und Verformungsverteilungen wird die Ringträgerstabmodellierung überprüft.

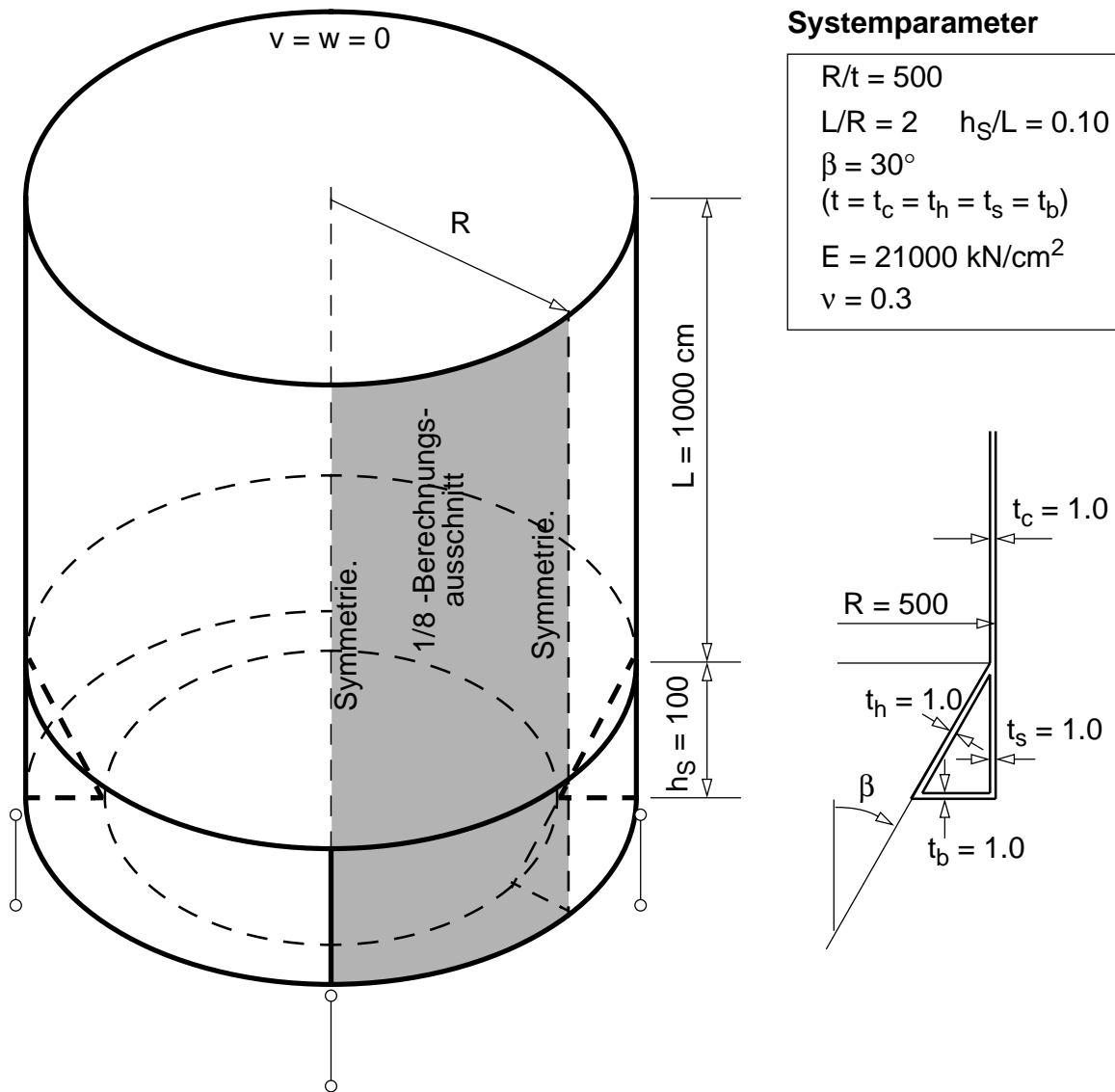
Zur Lastabtragung der Einzeltorsionsmomente und Einzelradialkräfte muß sinnvollerweise ein entsprechender “Tragring“ zur Aufnahme dieser lokalen Kraftwirkungen angeordnet werden. Die Abtragung durch das isolierte Schaftsystem wird daher nicht untersucht. Das Referenzsystem stellt der isolierte Ringträger dar. Der isolierte Ringträger wird überdies mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung bei Einzeltorsionsmomentenbelastung untersucht. Somit wird der Grenzfall eines dehnstarren Schaftes simuliert.

Tab. 6-3 Untersuchte Tragsysteme der linear-elastischen Spannungsberechnungen

Tragsystem		Lineare Berechnungen		
		Vertikalbelastung	Einzeltorsionsmomente	Einzelnradialkräfte
Isolierter Ringträger	R			
Isolierter Ringträger	Rs			
Schaft-Ringträger-System	R + S			
vollständiges Schalenmodell	Rs + S			
Ringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung	R w0 R* w0			
Schaft-System	S			

Berechnungsmodell

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) und im weiteren die materiell nichtlinearen Berechnungen (MNA) werden mit folgendem Berechnungsmodell in Bild 6-6 untersucht. Je nach Modellbildung wird das jeweilige Tragsystem mit den vorliegenden Systemparametern berechnet. In Bild 6-6 ist das vollständige Schalenmodell (Schaft-Basisringträger-System "Rs+S") dargestellt.



Systemparameter

$R/t = 500$
$L/R = 2 \quad h_s/L = 0.10$
$\beta = 30^\circ$
$(t = t_c = t_h = t_s = t_b)$
$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0.3$

Bild 6-6 Berechnungsmodell und 1/8-Berechnungsausschnitt

6.2.2 Vertikalbelastung

6.2.2.1 Isolierter Basisringträger — System "R"

Die Vertikalbelastung besteht aus der konstanten Gleichlast q_z und n äquidistanten Auflagerkräften F , die am selben Lastradius r — hier dem Schafradius — angreifen. Die somit exzentrische Vertikalbelastung in Bild 6-7 wird dabei in drei Einzelanteile aufgesplittet:

- Den ersten Anteil stellt die in den Schubmittelpunkt transformierte zentrische Vertikalbelastung des Ringträgerstabes dar.
- Der zweite Anteil sind die Einzeltorsionsmomente M_T , die aus den Lagerkräften entstehen.
- Den dritten Anteil stellt das konstante Stülpmoment m_t , das aus der konstanten, exzentrischen Vertikalbelastung folgt, dar.

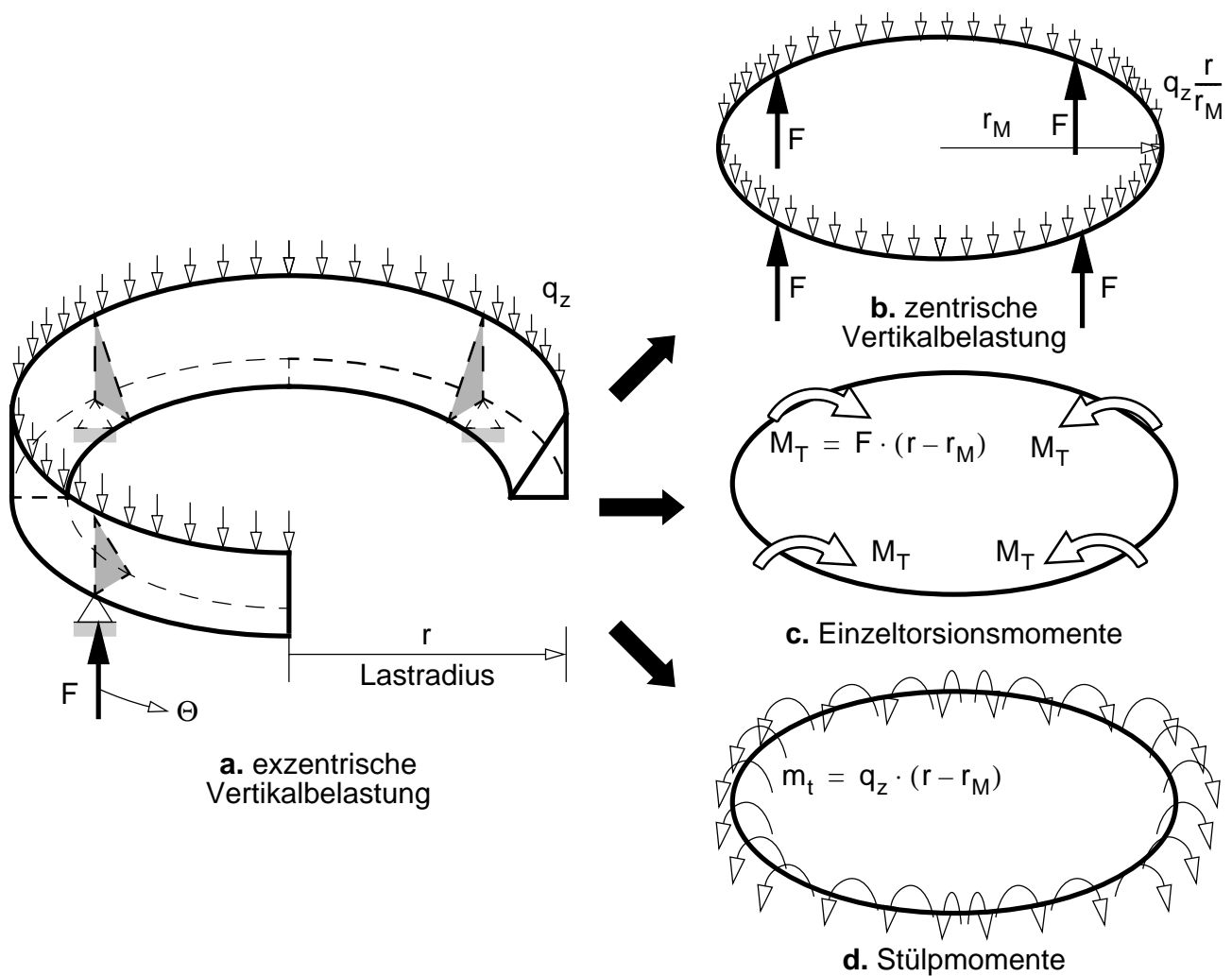


Bild 6-7 Isolierter Basisringträger — Lastabtragung der **a.** exzentrischen Vertikalbelastung als **b.** zentrische Vertikalbelastung und zusätzliche Momentenbelastungen — **c.** Einzeltorsionsmomente bzw. **d.** Stülpmomente — des Ringträgerstabes

Die Schnittkräfte des Ringträgers werden direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen berechnet. Die beim Dreieckquerschnitt vorliegenden schiefen Trägheitshauptachsen sind für die Berechnung der Ringträgerverzerrungen und der Ringträgerverformungen von Belang.

Der Basisringträger weist nur Schnittkräfte zugehörig zur Trägerrosttragwirkung auf. Es entstehen die Querkraft Q_z in vertikaler Richtung, das Biegemoment M_y um die horizontale Querschnittsachse und das Torsionsmoment M_t .

Der Verlauf der Schnittkräfte für die reine Vertikalbelastung innerhalb zweier Lagerpunkte von $0 \leq \Theta \leq 2\pi/n$ ist in Gl. (6-1) formelmäßig angegeben. Die Schnittkräfte zufolge der Einzeltorsionsmomente werden in Kap. 6.2.3 behandelt. Die Stülpmomente ergeben ein konstantes Biegemoment M_y am Ringträger, dieses wird durch den rotationssymmetrischen Grundanteil der Biegemomente M_y der Einzeltorsionsmomentenbelastung neutralisiert.

$$\begin{bmatrix} Q_z \\ M_y \\ r_s \\ M_t \\ r_s \end{bmatrix} = \frac{F}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Theta}{\pi/n} \\ -\frac{n}{\pi} + \frac{\cos \Theta}{\tan(\pi/n)} + \sin \Theta \\ \frac{\Theta}{\pi/n} - 1 + \cos \Theta - \frac{\sin \Theta}{\tan(\pi/n)} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

Die angegebenen Schnittkraftverläufe in Gl. (6-1) treffen für den Fall einer Einzelkrafteinleitung zu, die Lagerbreite d ist null. In Bild 6-8 sind die Schnittkraftverläufe in bezogener Form für 4 Auflagerungen des Kreisringträgers dargestellt.

Der Unterschied zu anderen "Ringträgerformeln" (Unold (1922), Martens (Silohandbuch 1988) oder auch Rotter (1985) bzw. Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999)) besteht darin, daß das dargestellte Torsionsmoment M_t das Gesamt-torsionsmoment ist. Die "innere" statisch unbestimmte Aufteilung in den St. Venant'schen- bzw. Wölbkrafttorsionsanteil muß erst vorgenommen werden.

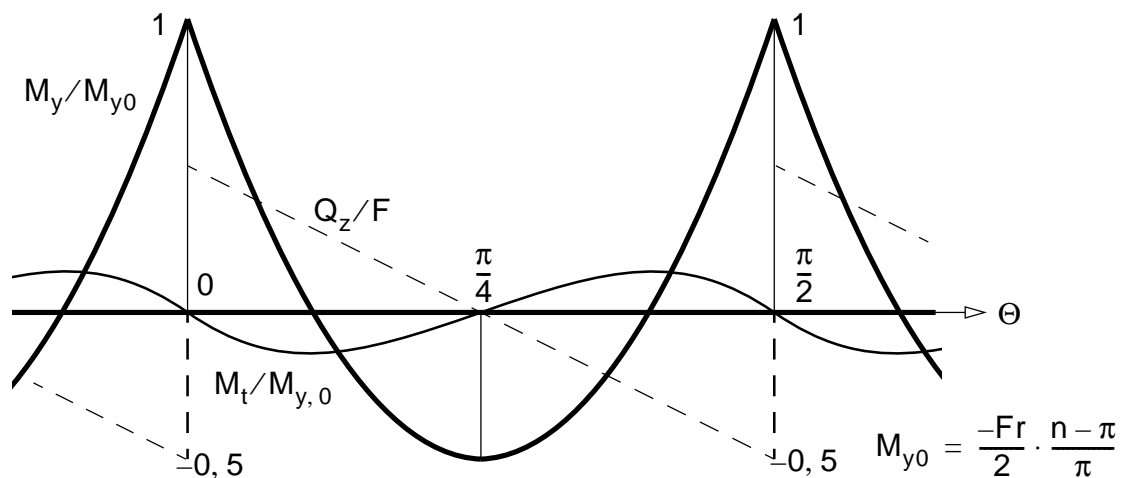


Bild 6-8 Isolierter Basisringträger — Schnittkräfteverlauf in dimensionsloser Darstellung bei zentrischer Vertikalbelastung zwischen zwei Auflagerungen (hier $n = 4$)

6.2.2.2 Schaft-Basisringträger-System — Systeme "R+S", "S" bzw. "R"

Die Vertikalbelastung wirkt als konstante Gleichlast an der Oberkante des Basisringträgers bzw. der Standzarge, entgegengesetzt gerichtet wirken die Auflagerkräfte. Die Lagerkräfte sind über die Lagerbreite d verteilt ($d/R = 0,157$). Neben dem Schaft-Basisringträger-System wird zu Vergleichszwecken der isolierte Basisringträger bzw. das isolierte Schaft-System untersucht.

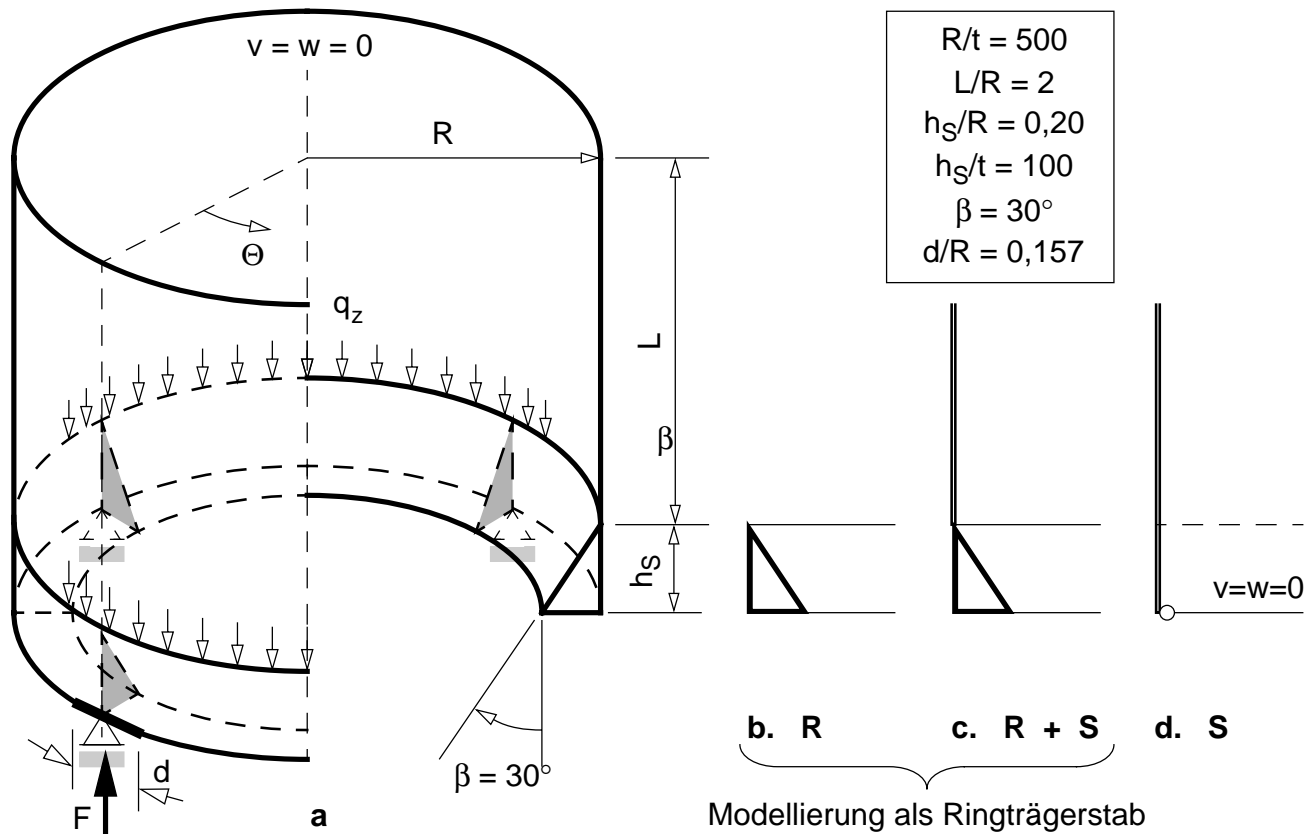


Bild 6-9 Untersuchte Tragsysteme bei **a.** Vertikalbelastung — **b.** isolierter Basisringträger, **c.** Schaft-Basisringträger-System und **d.** Schaft-System

Es werden folgende Ergebnisse in bezogener Form dargestellt:

- Schnittkräfte N , Q_y und Q_z für das Schaft-Basisringträger-System und den isolierten Basisringträger
- Schnittmomente M_t , M_y und M_z für das Schaft-Basisringträger-System und den isolierten Basisringträger
- Meridiankräfte n_x des Schaftes in Umfangs- und Meridianrichtung für das Schaft-Basisringträger-System und das Schaft-System
- Verschiebungen u , v und w an der Oberkante des Basisringträgers für das Schaft-Basisringträger-System, den isolierten Basisringträger und das Schaft-System

Schnittkräfte und Verformungen

Als Bezugsgrößen dienen für die Schnittkräfte die Auflagerkraft F , für die Momente das Biegemoment M_{y0} in den Auflagerpunkten. Der Bezug der Meridiankräfte erfolgt auf die Vertikalbelastung q_z und die Verschiebungen werden auf die Vertikalverformungen eines steifigkeitsäquivalenten Ringträgers mit symmetrischem Querschnitt bei alleiniger Vertikalbelastung bezogen. Diese Referenzvertikalverschiebung wird für die vorliegenden Steifigkeitsverhältnisse (EI_{zz} & GI_t) ebenfalls durch Fourierreihenentwicklung berechnet.

Am isolierten Basisringträger (System (R)) entstehen durch die Vertikalbelastung nur Querkräfte Q_z , Biegemomente M_y und Torsionsmomente M_t . Durch die Koppelung mit dem Schaft entstehen auch zusätzlich Beanspruchungen in der Ringebene (N , Q_y bzw. M_z).

Die Querkräfte Q_z in vertikaler Richtung reduzieren sich am Ringträger-Schaft-System auf ca. 50% in Bild 6-10, die Biegemomente M_y und die Torsionsmomente M_t auf ca. 25% des ursprünglichen Wertes in Bild 6-11.

Die Axialkräfte n_x des Schaftes werden in Bild 6-12 bzw. Bild 6-13 mit jenen des isolierten Schaftes (Tragsystem (S)) verglichen. Die Auflagerkraft wird dabei als über die Lagerbreite d verteilte Vertikalbelastung in den Schaft eingeleitet. Die Höhe ist dabei die Gesamthöhe, also Standzargenhöhe plus Schafthöhe ($L^* = h_s + L$). Durch die Biegesteifigkeit des Ringträgers reduzieren sich die Axialkräfte im Lagermeridian auf ca. 80% der Axialkräfte für das Tragsystem Schaft

Die Verformungen sind für die Oberkante des Ringträgers in Bild 6-14 dargestellt. Die Bezugsgröße ist die Vertikalverschiebung eines steifigkeitsäquivalenten Ringträgers mit symmetrischem Querschnitt bei zentrischer Vertikalbelastung. Im vorliegenden Fall entsteht durch die Belastungsexzentrizität neben der Vertikalbelastung auch eine Einzeltorsionsmomenten- und Stülpmomentenbelastung. Am isolierten Dreiecksträger dominieren die Vertikalverschiebungen w , die Radialverschiebungen v entstehen durch die Lage der Hauptträgheitsachsen und zufolge der Trägerlängsverdrehung φ . Die Längsverschiebung u stellt die Querschnittsverdrehung β_y dar ($\beta_y = u/z_A$).

Am Schaft-Basisringträger-System stellen sich wesentlich kleinere vertikale Verschiebungen ein, sie betragen 15% des isolierten Ringträgers. Dies ist vor allem durch die Steifigkeit des Schafts in Vertikalrichtung bedingt. Der isolierte Schaft selbst weist Vertikalverschiebungen auf, die 20% der Ringträgerverschiebungen ausmachen.

Die Vertikalverschiebungen des Schaftes sind sowohl für die Unterkante als auch die Oberkante der Standzarge dargestellt. Sie unterscheiden sich im wesentlichen nur im Auflagerbereich. Durch die Nachgiebigkeit des Standzarge — hier als Schale berücksichtigt — ergibt sich an der Standzargenoberkante auch Vertikalverschiebungen bereits im Lagermeridian. Am Schaft-Basisringträger-System sind die Vertikalverschiebungen durch die Unverformbarkeit des Ringträgerquerschnittes an den Auflagerpunkten null.

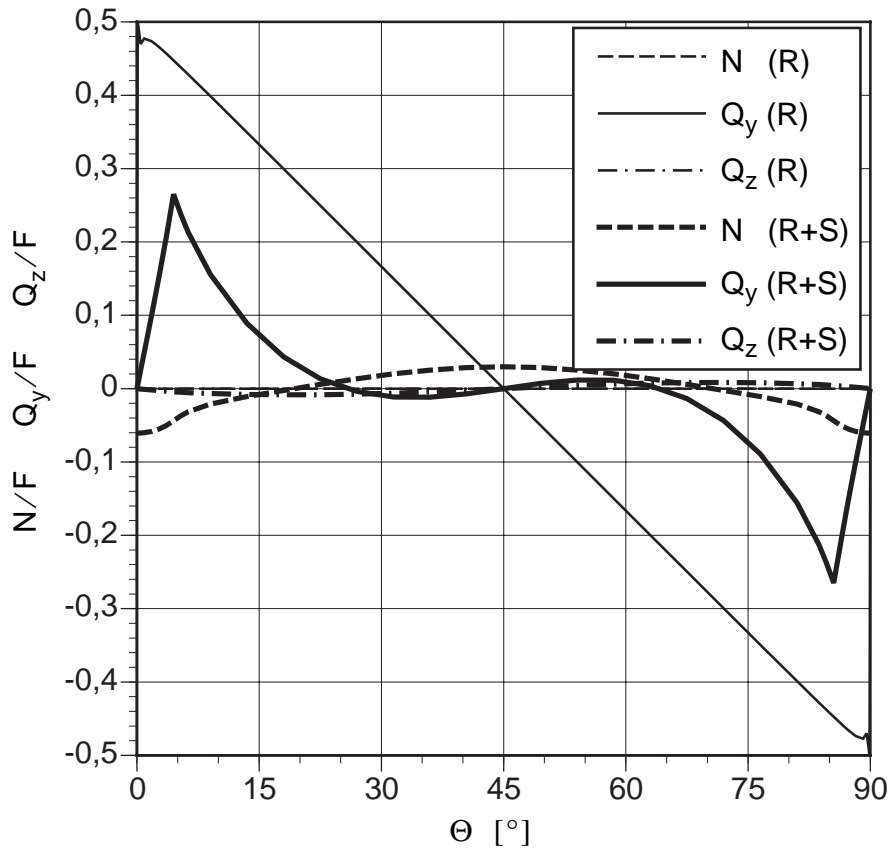


Bild 6-10 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem isolierten Ringträger — Normalkraft und Querkräfte bei Vertikalbelastung

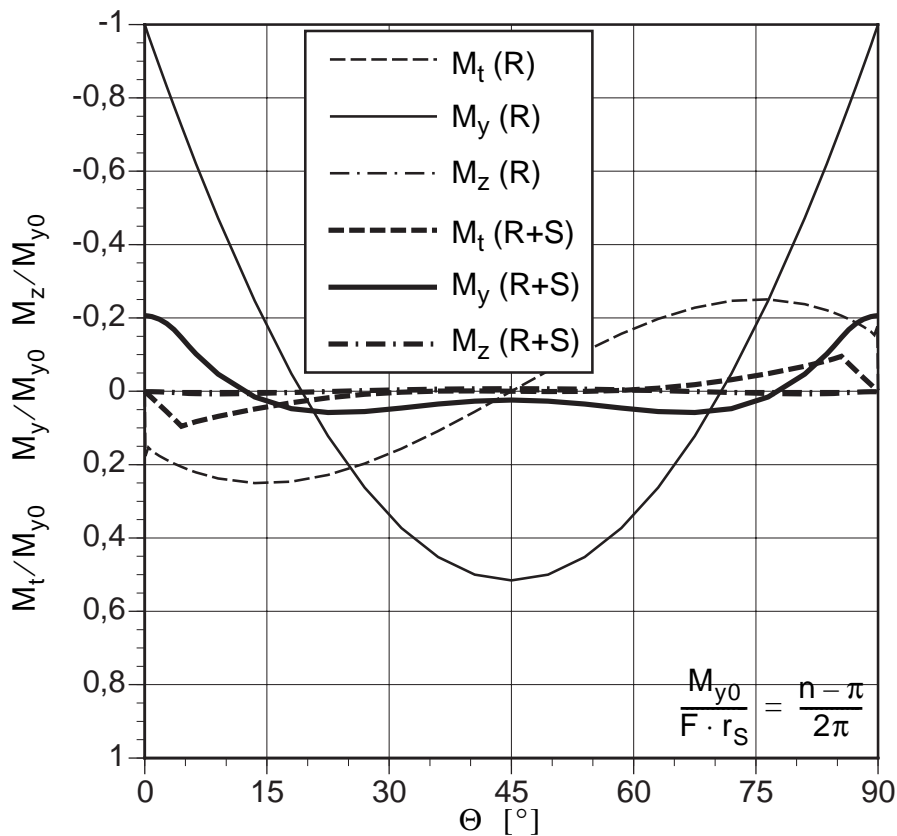


Bild 6-11 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem isolierten Ringträger — Torsionsmoment und Biegemomente bei Vertikalbelastung.

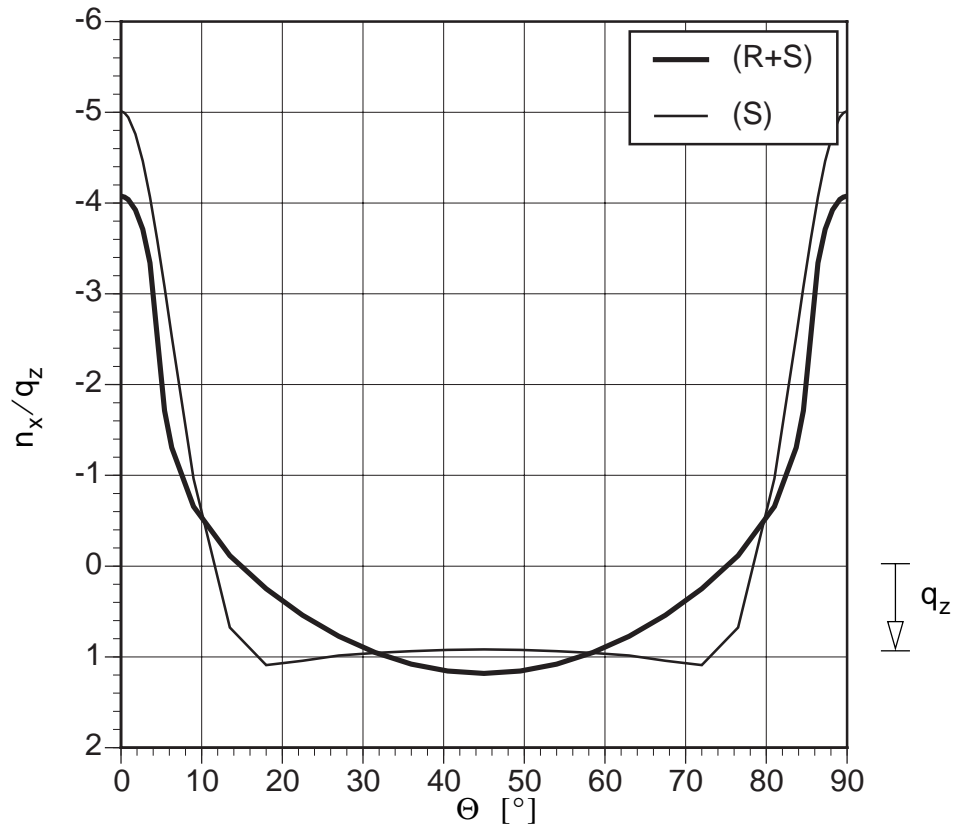


Bild 6-12 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem Schaft-System — Meridiankräfte n_x entlang des unteren Schaftendes ($x/L = 0$) bei Vertikalbelastung

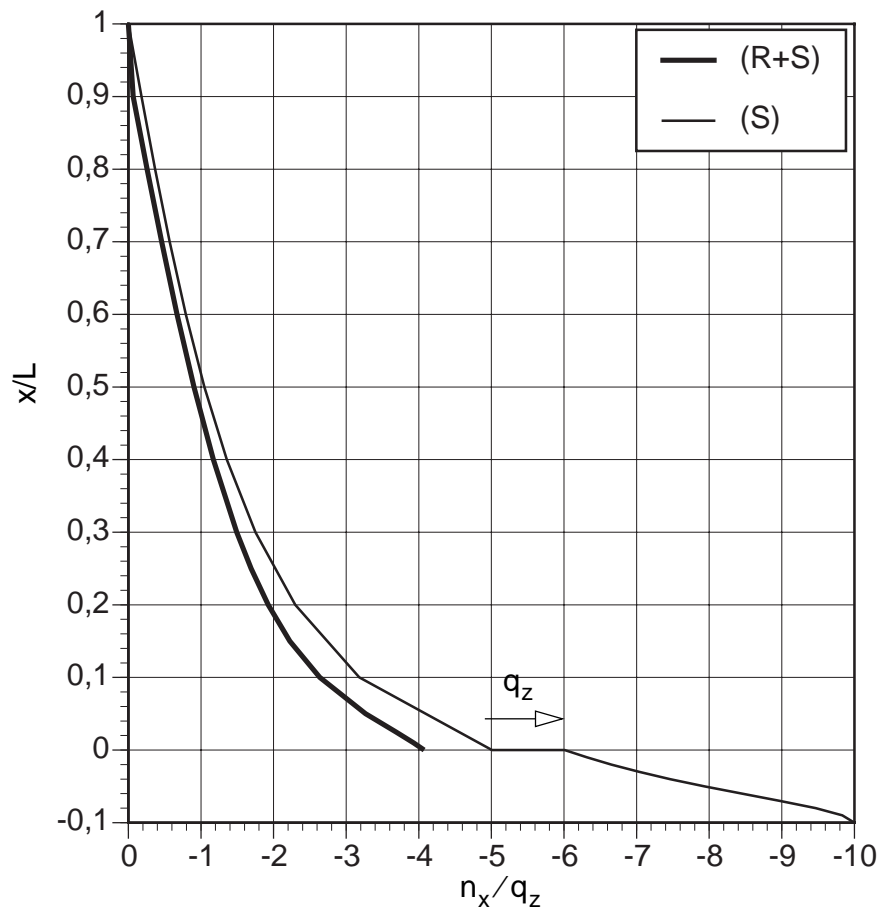


Bild 6-13 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem Schaft-System — Meridiankräfte n_x entlang des Lagermeridians ($\Theta = 0^\circ$) bei Vertikalbelastung

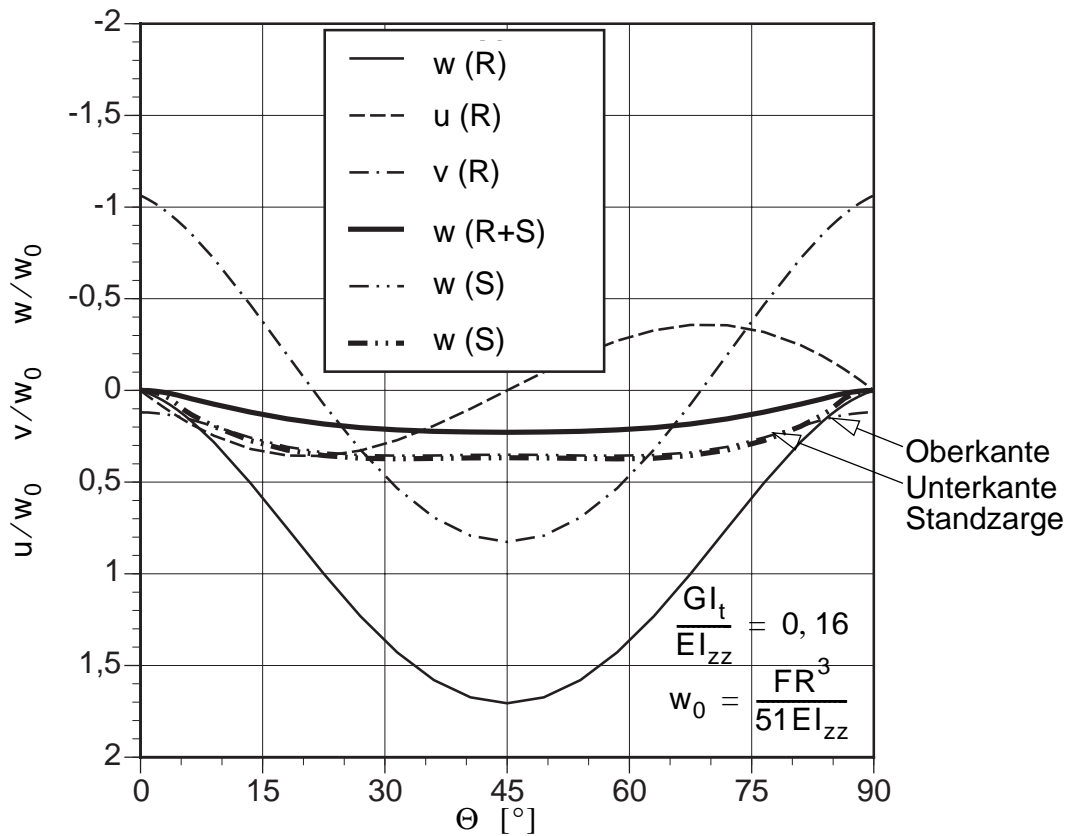


Bild 6-14 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem isolierten Ringträger und dem Schaft-System — Verformungen der Ringträgeroberkante bei Vertikalbelastung bezogen auf die Referenzverschiebung eines steifigkeitsäquivalenten Ringträgers mit symmetrischem Querschnitt bei zentrischer Vertikalbelastung

6.2.2.3 Vollständiges Schalenmodell — System "Rs+S"

Im folgenden wird die Übereinstimmung der Resultate der Modellierung des Ringträgers mit Schalenelementen und der Berechnung als räumlicher Ringträgerstab gezeigt.

Für den vorliegenden Vergleich wird der Lastfall Vertikallast untersucht. Dabei greift die Vertikallast einerseits an der Oberkante des Basisringträgers als konstante Gleichlast und andererseits als Einzelkraft über den diskreten Einzelstützungen in entgegengesetzter Richtung an. Die Einleitung der Einzelkraft erfolgt über das Schottblech, in Umfangsrichtung wird kein Anteil der Auflagerkraft eingeleitet ($d = 0$). Die Anzahl der Einzelauflagerungen beträgt wiederum $n = 4$.

Für die Durchführung der Berechnungen wird die Querdehnung ν zu Null gesetzt. Dadurch ist der Vergleich der Umfangsspannungen im Basisringträger leichter machbar, da bei den Resultaten der Schalenberechnung die Querkontraktionseffekte vor allem im Bereich der Auflagerkräfteinleitung entfallen.

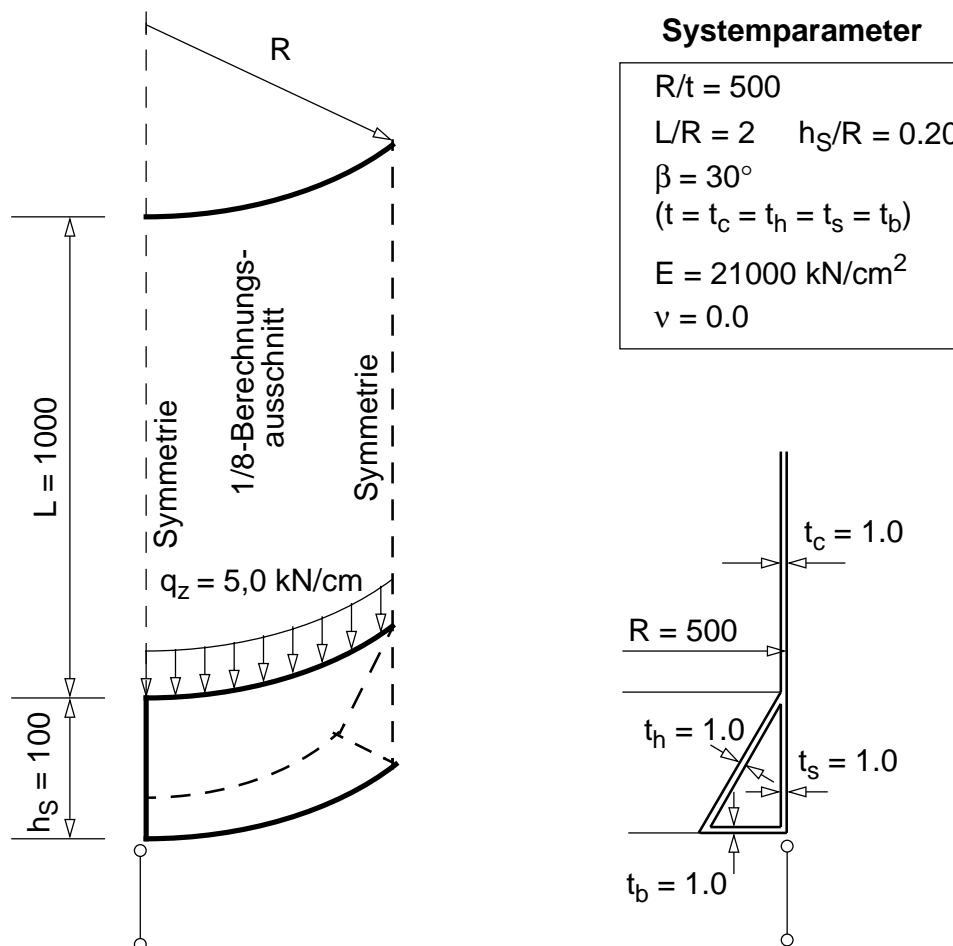


Bild 6-15 Berechnungsmodell — 1/8-Berechnungsausschnitt

Im Auflagerbereich wird der Basisringträger durch das Schottblech ausgesteift. Im vorliegenden Fall wird ein starres Schottblech vorausgesetzt. Durch dieses Schottblech kann der Basisringträger, der aus der

Standzarge, dem oberen Trichterteil und dem Basisringblech besteht, in seiner Tragfunktion als räumlicher Ringträgerstab aktiviert werden. Im baupraktischen Fall wird ein Teil der Auflagerkraft über das Schottblech in den Schaft (=Standzarge + Zylinder) eingeleitet. Wegen der hohen Scheibensteifigkeit des Schottbleches kann die Verformbarkeit des Schottbleches vereinfacht vernachlässigt werden.

Der Lagerpunkt liegt in Bild 6-16 idealisiert direkt unter der Standzarge. Dabei sind nur die Axialverschiebung (Vertikalverschiebung) und die Tangentialverschiebung gesperrt. Der Basisringträger kann sich somit, wie in Bild 6-16 dargestellt, frei verdrehen bzw. in Radialrichtung verformen.

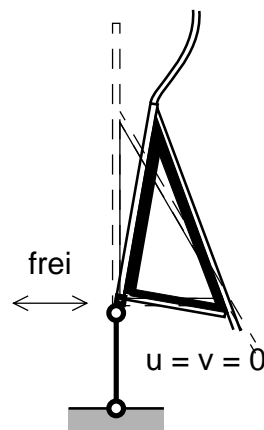


Bild 6-16 Lagerungsbedingungen am starren Schottblech

Die Übereinstimmung von Ringträgerstabmodellierung und Schalenmodellierung wird anhand folgender Spannungs- bzw. Verformungsgrößen gezeigt:

- Umfangsspannungen σ_{Θ}
- Verschiebungen der Oberkante des Basisringträgers

Die Darstellung erfolgt für ausgewählte Umfangslinien bzw. Meridianlinien entsprechend Bild 6-17.

Dabei werden die Umfangsspannungen σ_{Θ} in Umfangsrichtung an der Unter- bzw. Oberkante der Standzarge und an der Unterkante des Trichtersegmentes des Ringträgers in Bild 6-18 dargestellt. Weiters werden die Umfangsspannungen in ihrem Verlauf über den Querschnitt des Basisringträgers in 3 Meridianen in Bild 6-19 dargestellt. Als Verformungsgrößen werden die 3 Verschiebungen u , v , w an der Oberkante des Ringträgers in Bild 6-20 dargestellt.

Für die Umfangsspannungen ergeben sich vor allem qualitativ idente Ergebnisse. Bis auf Abweichungen im Nullmeridian im Bereich der Lagerkrafteinleitung zeigt sich eine gute Übereinstimmung in Bild 6-18 und Bild 6-19.

Für die Axialverschiebungen u erhält man ein nahezu gleiches Resultat. Die Radial- bzw. Tangentialverschiebung stimmen sehr gut überein. Die Schalenberechnung liefert in Bild 6-20 aufgrund der zusätzlichen Nachgiebigkeit des Basisringträgerquerschnittes bei allen 3 Verschiebungen etwas größere Werte.

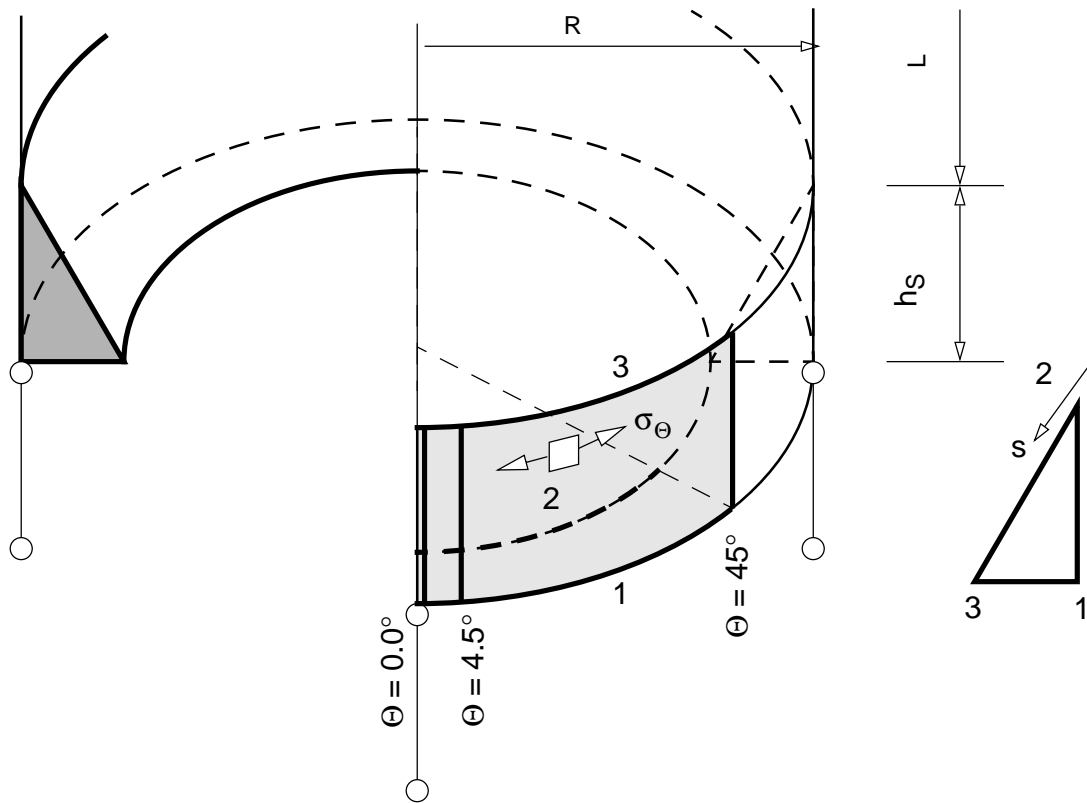


Bild 6-17 Darstellung der Umfangsspannungen σ_Θ in Umfangsrichtung bzw. entlang ausgewählter Meridiane

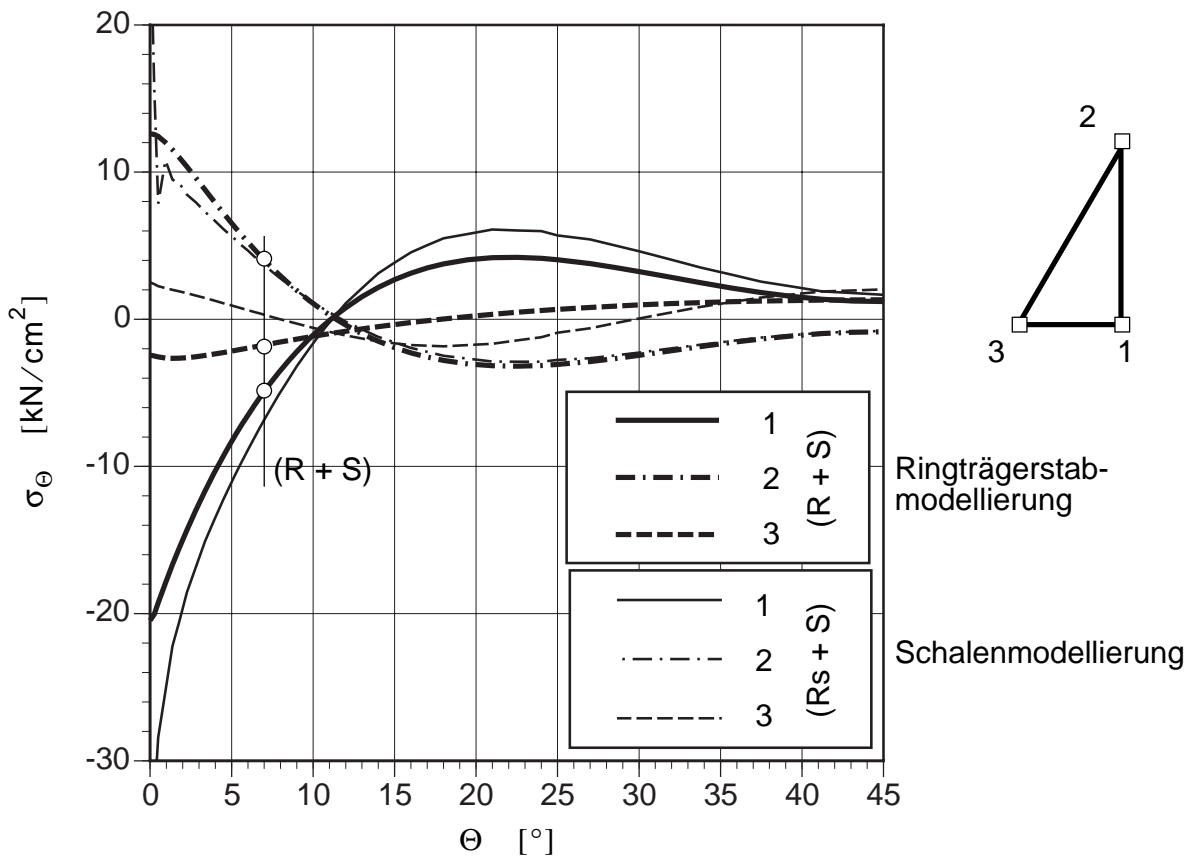


Bild 6-18 Vergleich der Umfangsspannungen im Basisringträger entlang der Ecklinien 1, 2 und 3 in Umfangsrichtung für die Modellierungsvarianten als Schale oder Ringträgerstab

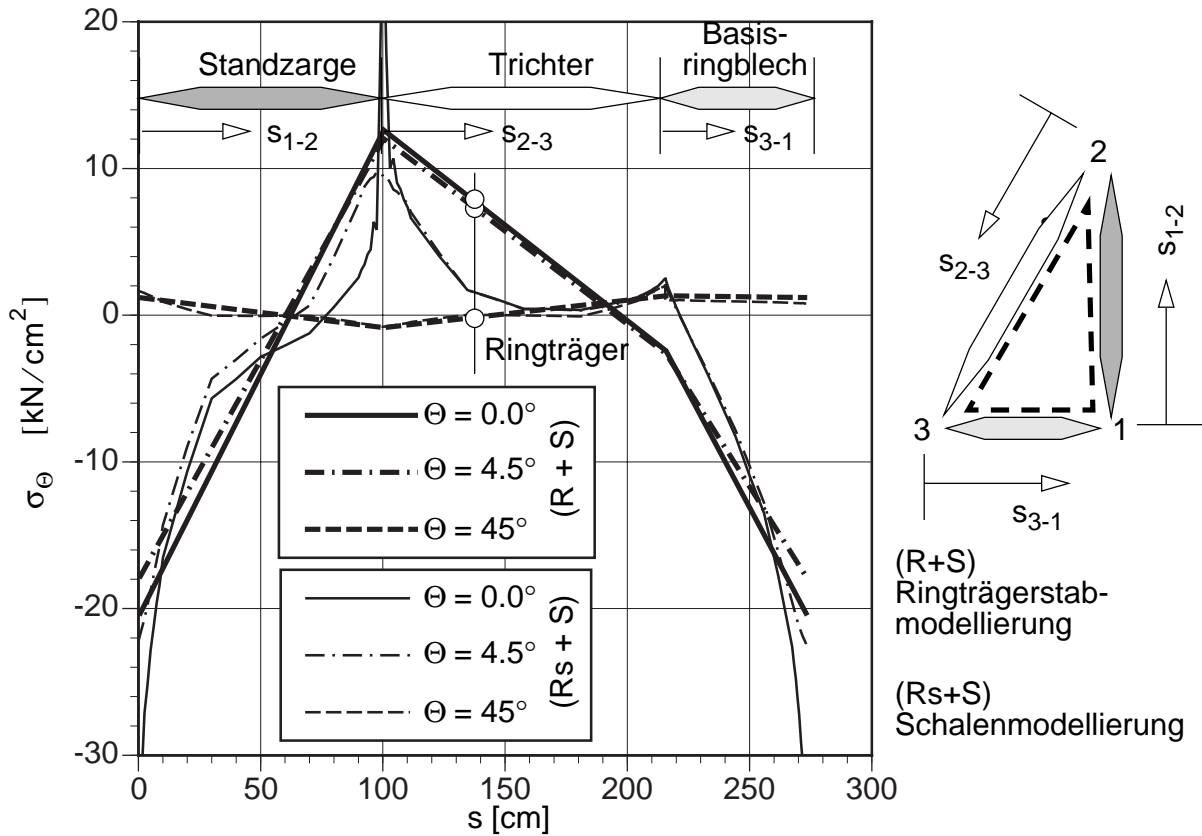


Bild 6-19 Vergleich der Umfangsspannungen im Basisringträger entlang ausgewählter Meridianlinien für die Modellierungsvarianten als Schale und Ringträgerstab

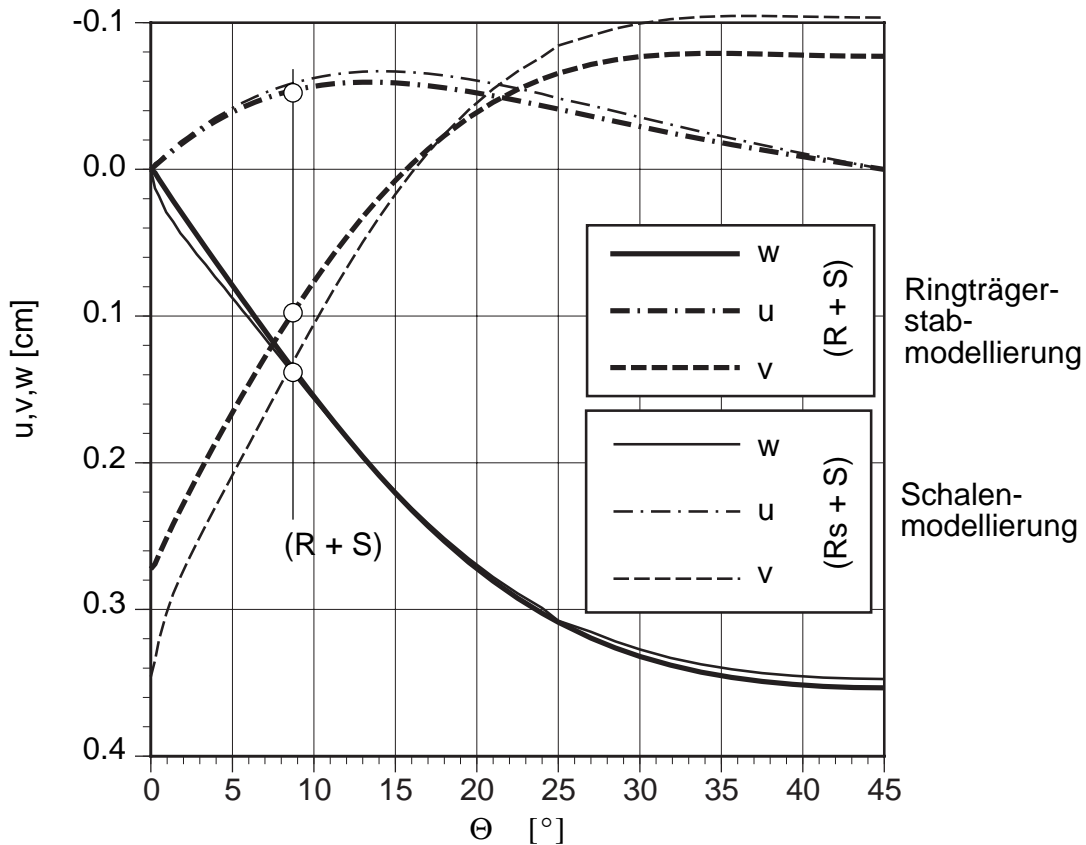


Bild 6-20 Vergleich der Verformungen der Oberkante des Basisringträgers für die Modellierungsvarianten des Dreieckträgers als Ringträgerstab oder als Schale

6.2.3 Einzeltorsionsmomentenbelastung

6.2.3.1 Isolierter Basisringträger — System "R"

Es wirken in den n äquidistant aufgeteilten Auflagerpunkten die nach innen gerichteten Einzeltorsionsmomente M_T . Die Einzeltorsionsmomente entstehen, wie bereits erwähnt, zufolge den Lagerkräften der exzentrischen Vertikalbelastung des Ringträgers aber auch aus der lokalen Auflagerkraft T_K des Trichters bzw. der Teilauflegerkraft F_S des Schaft-Systems.

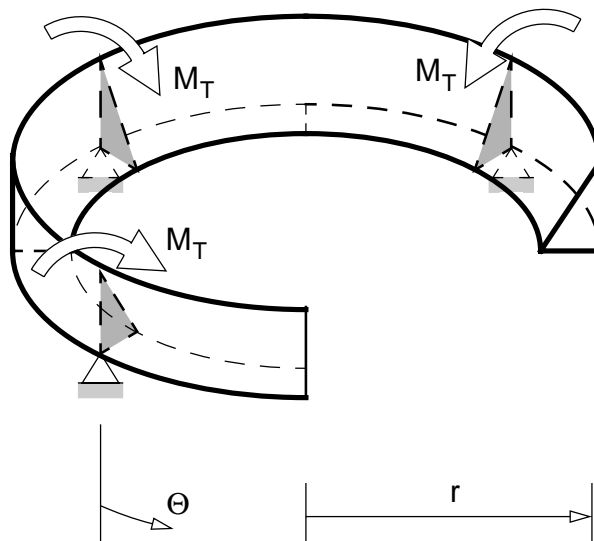


Bild 6-21 Lastabtragung von Torsionsmomenten durch den Basisringträger

Für den Lastfall Einzeltorsionsmomente können die auftretenden Schnittkräfte M_y und M_t ebenfalls direkt, auf Basis der Gleichgewichtsbeziehungen, angegeben werden.

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_t \end{bmatrix} = \frac{M_T}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos \Theta}{\tan \pi/n} + \sin \Theta \\ \frac{-\sin \Theta}{\tan \pi/n} + \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

Das Biegemoment M_y in den Auflagerpunkten ist von der Stützenanzahl n abhängig, das Torsionsmoment M_t beträgt immer die Hälfte des angreifenden Einzeltorsionsmomentes M_T . Der Maximalwert des Biegemomentes M_y wird in der Mitte zwischen den Lagerpunkten ($\Theta = \pi/n$) erreicht. Das Biegemoment entsteht zum Großteil durch die Stülpwirkung des angreifenden Torsionsmomentes M_T (konstantes Stülpmoment m_t und rotationssymmetrischer Grundanteil $M_{y,0}$).

$$M_{y,0} = -m_t \cdot r = M_T \cdot n / (2\pi) \quad (6-3)$$

Der Vergleich des Biegemomentes M_y in Bild 6-22 über dem Lagerpunkt und im Mittenbereich zeigt, daß sich diese bei zunehmender Lageranzahl n zum rotationssymmetrischen Grundanteil $M_{y,0}$ zufolge der

Stülpmomentenwirkung konvergieren.

$$\frac{M_{y, \Theta=0}}{M_{y,1}} = \frac{\pi/n}{\tan(\pi/n)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad = 1$$

$$\frac{M_{y, \Theta=\pi/n}}{M_{y,1}} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad = 1 \quad (6-4)$$

In Bild 6-22 ist der Verlauf der Biege- und Torsionsmomente bei 4 Auflagern bzw. 4 angreifenden Torsionsmomenten dargestellt.

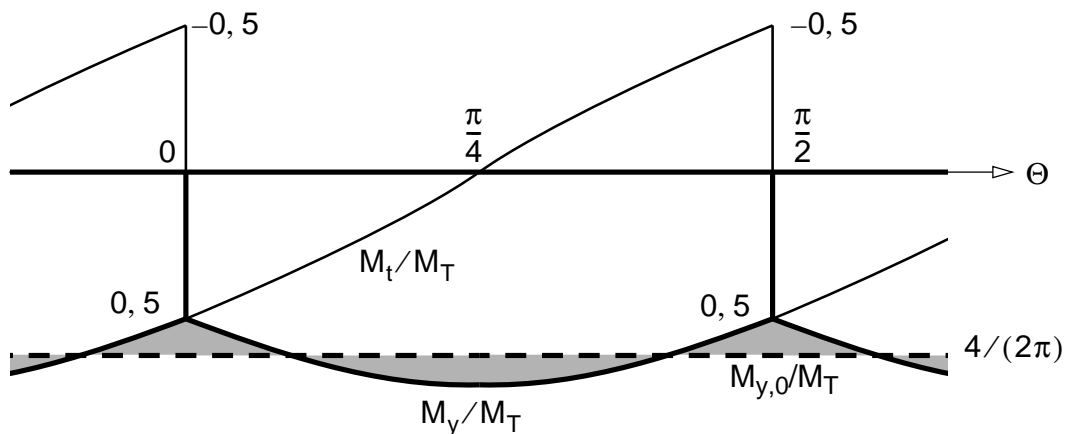


Bild 6-22 Momentenverlauf des Basisringträgers in dimensionsloser Darstellung bei Einzeltorsionsmomentenbelastung ($n = 4$)

Torsionsmomente der exzentrischen Vertikalbelastung

Der exzentrische Anteil der Vertikalbelastung besteht aus den Einzeltorsionsmomenten zufolge der exzentrischen Auflagerkräfte F und dem konstanten Stülpmomentenanteil zufolge der Gleichlast q_z . Das Einzeltorsionsmoment weist einen zum Stülpmomentenanteil gegengerichteten rotationssymmetrischen Grundanteil auf. Liegen F und q_z am selben Lastradius, so verbleibt ein minimales Biegemoment M_y am Ringträger. In Bild 6-22 ist dieser verbleibende Momentenanteil grau hinterlegt dargestellt.

6.2.3.2 Schaft-Basisringträger-System — Systeme "R+S" bzw. "R"

Die Einzeltorsionsmomente, die aus Gleichgewichtsgründen am Schottblech notwendig sind, wirken im vorliegenden Fall nach innen gerichtet am Ringträger. Neben dem Schaft-Basisringträger-System wird der isolierte Ringträger untersucht.

Zur besseren Interpretation der Ergebnisse werden im weiteren (Kap. 6.2.3.3) Vergleichsberechnungen durch die Idealisierung des Schaftes als vertikal unverschiebliche Randbedingung ($w = 0$) des Ringträgers durchgeführt. In Umfangsrichtung erfolgt die Entkoppelung von Schaft und Ringträger.

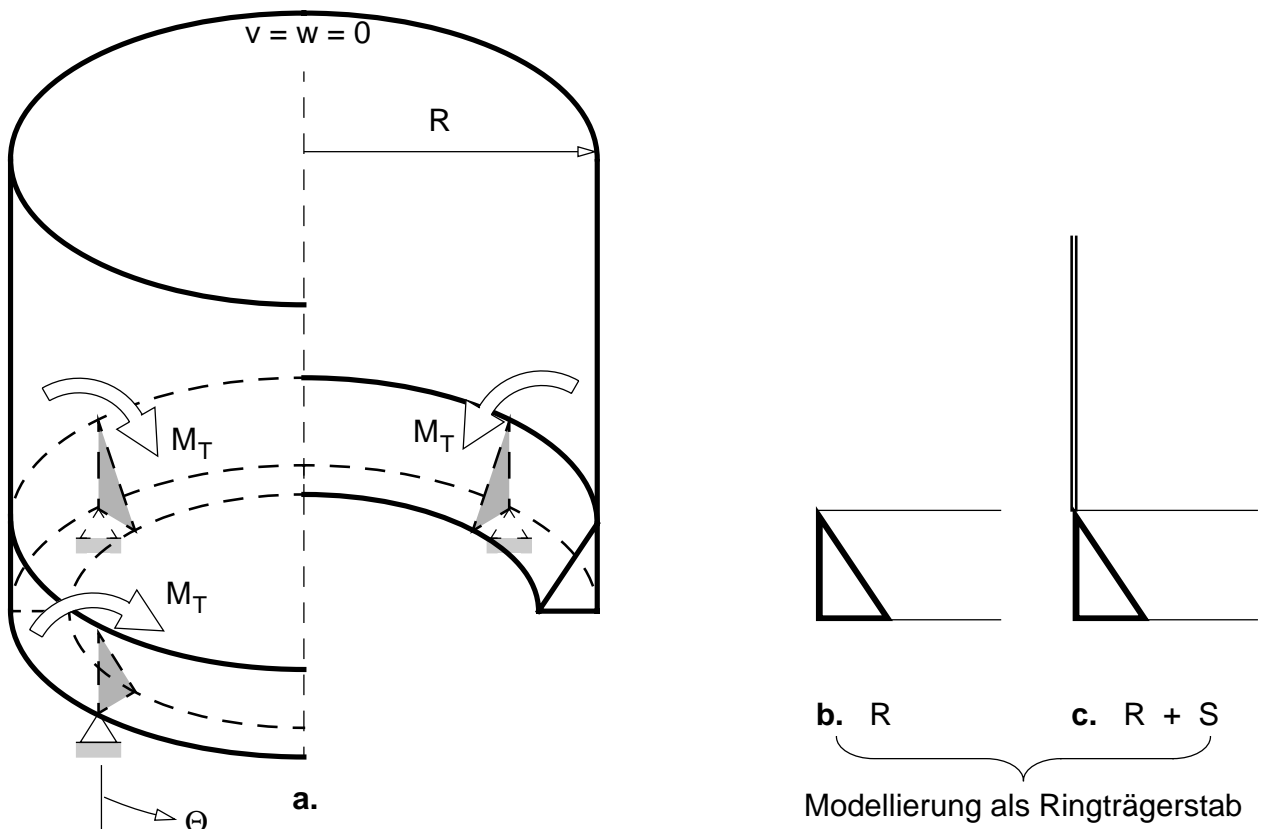


Bild 6-23 Untersuchte Tragsysteme bei **a.** Einzeltorsionsmomentenbelastung — **b.** isolierter Basisringträger und **c.** Schaft-Basisringträger-System

Analog der Vertikalbelastung werden folgende Ergebnisse dargestellt:

- Schnittkräfte N , Q_y und Q_z
- Schnittmomente M_t , M_y und M_z
- Meridiankräfte n_x des Schaftes in Umfangsrichtung
- Verschiebungen u , v und w an der Oberkante des Ringträgers

Schnittkräfte und Verformungen

Die Darstellung erfolgt in bezogener Form. Die Bezugsgröße für die Schnittkräfte ist die Ersatzkraft $F_T = M_T/r_S$. Die Torsionsmomente und die Biegemomente sind auf das angreifende Einzeltorsionsmoment M_T und die Verschiebungen bzw. Verdrehungen auf den rotationssymmetrischen Anteil φ_0 der Torsionsverdrehung bezogen.

Zufolge der Torsionsmomentenbelastung entstehen am isolierten Ringträger keine Normal- und Querkräfte ($N = Q_y = Q_z = 0$). Es entstehen lediglich Torsionsmomente M_t und Biegemomente M_y (siehe Bild 6-25). Am Schaft-Basisringträger-System entsteht durch die Koppelung in Vertikalrichtung die Querkraft Q_z und umverteilte Momente M_y . Das maximale Biegemoment wandert vom Mittenbereich zu den Lagerpunkten hin, das Torsionsmoment ist nur gering verändert.

Die Vertikalverschiebung w des isolierten Ringträgers in Bild 6-26 ist im Mittenbereich am größten, die Radialverschiebung v der oberen Kante des Ringträgers stellt die Verdrehung φ dar ($\varphi = v/(z_A + e_z)$). Durch die Koppelung mit dem Schaft verringern sich die Vertikalverschiebungen auf 20%, die Radialverschiebung und somit die Torsionsverdrehung verringert sich auf ca. 60% des ursprünglichen Wertes.

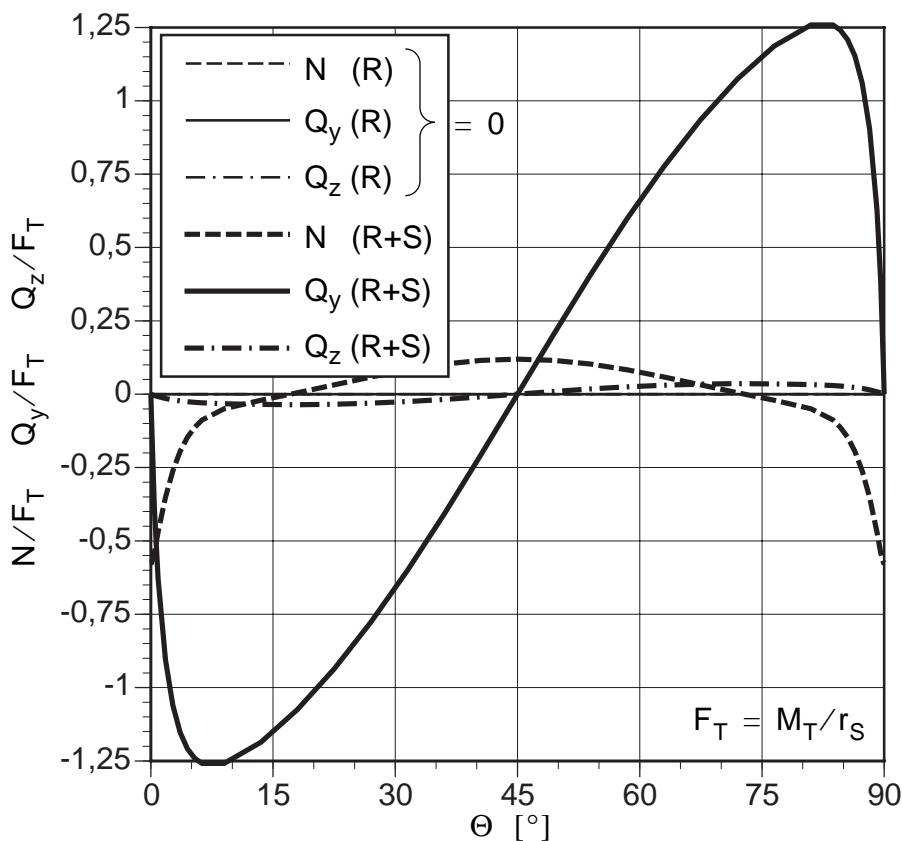


Bild 6-24 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem isolierten Ringträger — Normalkraft und Querkräfte bei Einzeltorsionsmomentenbelastung

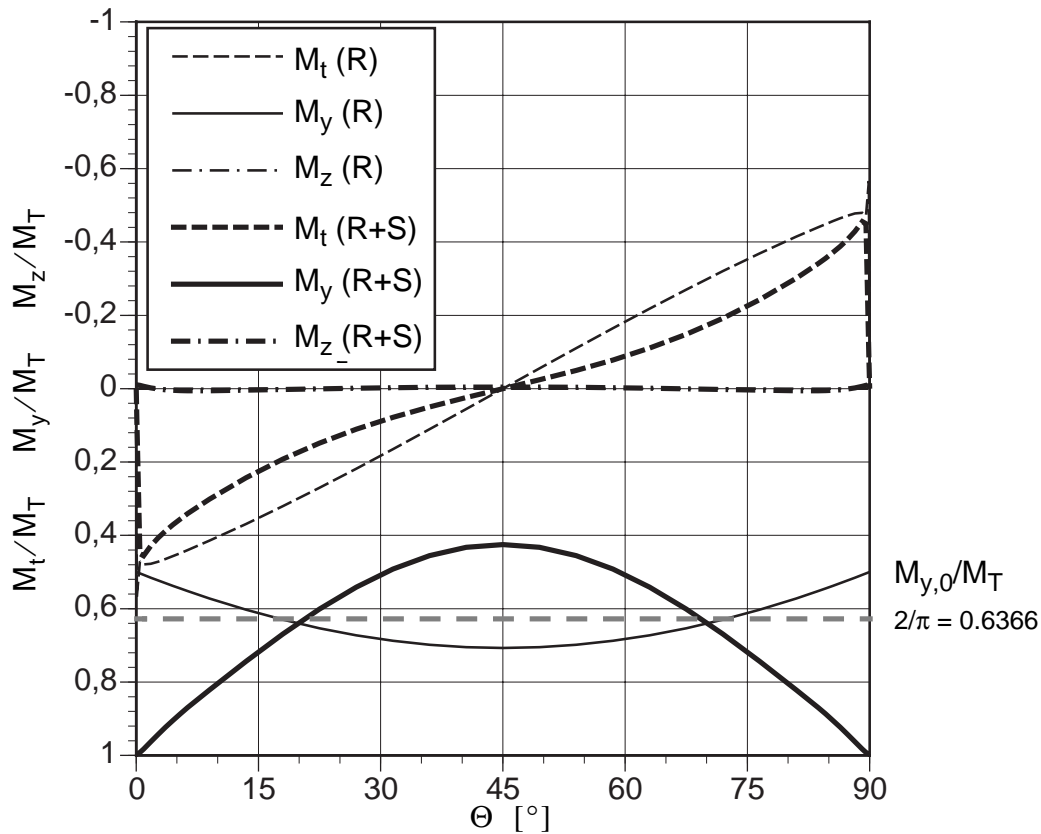


Bild 6-25 Schaft-Basisingrager-System und Vergleich mit dem isolierten Ringtrager — Torsionsmoment und Biegemomente bei Einzeltorsionsmomentenbelastung

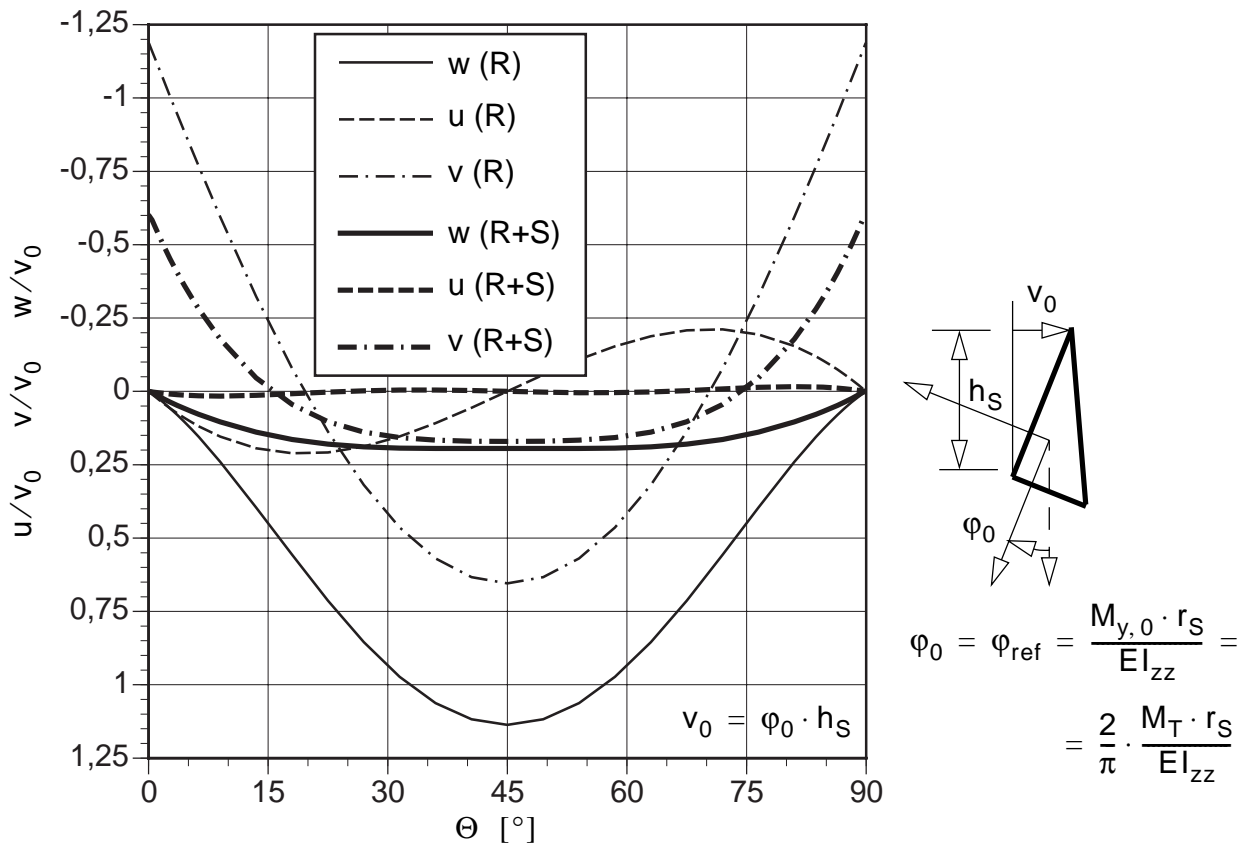


Bild 6-26 Schaft-Basisingrager-System und Vergleich mit dem isolierten Ringtrager — Verformungen der Ringtrageroberkante bei Einzeltorsionsmomentenbelastung

6.2.3.3 Ringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung

Untersuchtes System und Systemannahmen

Im Grenzfall eines in Axialrichtung unverformbaren Schaftes wird dieser als vertikale Randbedingung $w = 0$ idealisiert. In Umfangsrichtung ist der Ringträger nicht mit dem Schaft gekoppelt. Der Ringträgerstab wird dabei mit seiner Trägerrosttragwirkung berücksichtigt (Grundgleichungen siehe Anhang A.2).

Die Lösung des querschubnachgiebigen Ringträgers ($R \neq 0$) erfolgt durch Fourierreihenansätze und der Implementierung der vertikal unverschieblichen Schaftanbindung als Randbedingung $w = 0$.

Für die analytische Lösung des querschubstarrten Ringträgers ($R^* \neq 0$) gelten folgende Annahmen:

- der Ringträger ist mit seiner Trägerrosttragwirkung berücksichtigt
- querschubstarrer Ringträger (Bernoulli-Hypothese)
- reine St. Venant'sche Torsion
- der Schaft stellt eine idealisierte Randbedingung dar, die Vertikalverschiebung des Ringträgers wird zu Null ($w = 0$), die verbleibende Verformungsgröße ist die Verdrehung φ der Ringträgerachse
- in Umfangsrichtung erfolgt keine Koppelung von Schaft und Ringträger

Reduzierte Grundgleichungen der Trägerrosttragwirkung des Kreisringträgers

In Gl. (6-5a) bis Gl. (6-5c) sind die Grundgleichungen des querschubstarrten Kreisringträgers für Beanspruchungen senkrecht zur Ringebene (Tragwirkung als Trägerrost) dargestellt.

Durch die Einführung der Bernoulli-Hypothese wird die Schubverformung zu Null, die Querkraft Q_z kann nicht mehr aus den Materialgleichungen bestimmt werden und ist in den reduzierten Gleichgewichtsgleichungen (Gl. (6-5a)) und Materialgleichungen (Gl. (6-5b)) nicht mehr enthalten. Die unbekanntenen Verformungsgrößen sind die Vertikalverschiebung und die Torsionsverdrehung (Gl. (6-5c)).

$$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -(\cdot)'_{\Theta} & (\cdot)'_{\Theta\Theta} \\ (\cdot)'_{\Theta} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_t/r \\ M_y/r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_z - m_y/r \\ m_t/r \end{bmatrix} \quad (6-5a)$$

$$\begin{bmatrix} M_t/r \\ M_y/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GI_t/r^2 & 0 \\ 0 & EI_{zz}/r^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta \cdot r \\ \kappa_y \cdot r \end{bmatrix} \quad (6-5b)$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta \cdot r \\ \kappa_y \cdot r \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -(\cdot)'_{\Theta} & (\cdot)'_{\Theta} \\ -(\cdot)'_{\Theta\Theta} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \varphi \cdot r \end{bmatrix} \quad (6-5c)$$

Für die weitere Lösung werden nun die zugrundegelegten Annahmen eingearbeitet.

Der Ringträger wird im vorliegenden Fall durch Einzeltorsionsmomente belastet (Gl. (6-6a)). Es ergibt sich der direkte Zusammenhang von Torsionsmoment und Biegemoment aus den Gleichgewichtsgleichungen in Gl. (6-6b) zufolge Gl. (6-6a). Weiters werden aus den Gleichgewichtsgleichungen die entstehenden vertikalen Kontaktkräfte q_z in der Ringträger-Schaft-Anbindung, die in der vorliegenden Problemstellung eine Systemunbekannte darstellen, in Gl. (6-6c) berechnet.

$$m_y = m_t = 0 \tag{6-6a}$$

$$M_{t\prime\Theta} + M_y = 0 \tag{6-6b}$$

$$q_z = \frac{-(M_y + M_{y\prime\Theta\Theta})}{r^2} \tag{6-6c}$$

Die kinematischen Gleichungen werden durch die Annahme, daß die Vertikalverschiebung zu Null wird (Gl. (6-7a)), in Gl. (6-7b) weiter reduziert.

$$w = 0 \tag{6-7a}$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta \cdot r \\ \kappa_y \cdot r \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} () \prime_{\Theta} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \varphi \cdot r \tag{6-7b}$$

Differentialgleichung und Randbedingungen

Die Verknüpfung der Torsionsgleichgewichtsgleichung in Gl. (6-6b) mit den Materialgleichungen in Gl. (6-5b) ergibt folgende homogene Differentialgleichung für den Torsionsdrehwinkel φ in Gl. (6-8a). Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist in Gl. (6-8b) dargestellt.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} - \underbrace{\frac{E I_{zz}}{G I_t}}_{\varepsilon_T^2} \cdot \varphi = 0 \tag{6-8a}$$

$$\varphi = [e^{-\varepsilon_T \Theta} \quad e^{-\varepsilon_T(\pi/n - \Theta)}] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{6-8b}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 und C_2 der Differentialgleichung stehen zwei Randbedingungen in $\Theta = 0$ und $\Theta = 2\pi/n$ oder alternativ in $\Theta = \pi/n$ hinsichtlich des Torsionsmomentes M_t zur Verfügung (Gl. (6-9a) bis Gl. (6-9c)). Daraus folgt die Lösung der Differentialgleichung in Gl. (6-10).

$$M_{t(\Theta=0)} = M_T/2 \quad (6-9a)$$

$$M_{t(\Theta=2\pi/n)} = -M_T/2 \quad (6-9b)$$

$$M_{t(\Theta=\pi/n)} = 0 \quad (6-9c)$$

Lösung der Differentialgleichung — Schnittkräfte und Verformungen

$$\varphi = \frac{M_T \cdot (e^{-\varepsilon_T \Theta} + e^{-\varepsilon_T(2\pi/n - \Theta)})}{2\sqrt{EI_{ZZ}} \cdot GI_t \cdot (1 - e^{-2\varepsilon_T \pi/n}} \quad (6-10)$$

Der Verlauf der Torsions- und Biegemomente folgt aus dem Materialgleichungen und den kinematischen Grundgleichungen in Gl. (6-11a) und Gl. (6-11b).

$$M_t = GI_t \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{M_T}{2} \cdot \frac{(e^{-\varepsilon_T \Theta} - e^{-\varepsilon_T(2\pi/n - \Theta)})}{(1 - e^{-2\varepsilon_T \pi/n}} \quad (6-11a)$$

$$M_y = -EI_{ZZ} \cdot \varphi = \frac{M_T}{2} \cdot \varepsilon_T \frac{(e^{-\varepsilon_T \Theta} + e^{-\varepsilon_T(2\pi/n - \Theta)})}{(1 - e^{-2\varepsilon_T \pi/n}} \quad (6-11b)$$

Die Maximal- und Minimalwerte des Biegemomentes in $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi/n$ sind in Gl. (6-12a) und Gl. (6-12b) dargestellt.

$$\frac{M_{y(\Theta=0)}}{M_T} = \frac{\varepsilon_T}{2} \frac{1 + e^{-\varepsilon_T(2\pi/n)}}{1 - e^{-2\varepsilon_T \pi/n}} \quad (6-12a)$$

$$\frac{M_{y(\Theta=\pi/n)}}{M_T} = \frac{\varepsilon_T}{2} \frac{(2e^{-\varepsilon_T \pi/n})}{(1 - e^{-2\varepsilon_T \pi/n}} \quad (6-12b)$$

Die Kontaktkräfte q_z folgen aus den Biegemomenten M_y in Gl. (6-6c).

$$q_z = \frac{-(M_y + M_{y'\Theta\Theta})}{r^2} = \frac{-M_T}{2r^2} \cdot \varepsilon_T (1 + \varepsilon_T^2) \frac{(e^{-\varepsilon_T \Theta} + e^{-\varepsilon_T(2\pi/n - \Theta)})}{(1 - e^{-2\varepsilon_T \pi/n}} \quad (6-13)$$

Vergleich mit den anderen Modellierungsvarianten

In den folgenden Abbildungen werden die Verteilungen der Torsionsmomente M_t , der Biegemomente M_y und die Verdrehung φ für die Abtragung der Einzeltorsionsmomentenbelastung durch folgende Tragsysteme verglichen:

- **R** isolierter Ringträger
- **R + S** Schaft-Basisringträger-System
- **R* w0** querschubstarrer Ringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung
- **R w0** querschubnachgiebiger Ringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung

Schnittkräfte und Verformungen

Für den querschubnachgiebigen Ringträger (**R w0**) erfolgt die Berechnung durch direkten Einbau der vertikal unverschieblicher Schaftanbindung — Randbedingung $w = 0$ — in die Lösung mithilfe der Fourierreihenansätze.

Die Torsionsmomente M_t in Bild 6-27 weichen durch die stützende Wirkung des Schafts nur geringfügig von jenen des isolierten Ringträgers ab.

Die Biegemomente erreichen durch die stützende Wirkung des Schafts ihren Maximalwert über den Auflagerpunkten. Den größten Wert erreichen sie dabei durch die Idealisierung des Schafts als vertikale Randbedingung $w = 0$ und die Berechnung des Ringträgers als querschubstarrer Ringträger (Tragsystem (**R* w0**)). Den Mittelwert stellt der rotationssymmetrische Anteil $M_{y,0}$ (Stülpmomentenanteil) dar. Bei Berücksichtigung der Querschubverformung liefern die Berücksichtigung des Schafts als Randbedingung bzw. der tatsächlichen Nachgiebigkeit des Schafts gut übereinstimmende Biegemomente.

Die Torsionsverdrehungen φ in Bild 6-29 erreichen im Fall des isolierten Ringträgers ihren Maximalwert. Die idealisierte Berücksichtigung des Schafts und die Berücksichtigung der tatsächlichen Nachgiebigkeit ergeben wiederum gut übereinstimmende Torsionsverdrehungen.

Die Kontaktkräfte q_z werden vom Schaft abgetragen, sie bewirken Zug- und Druckmeridiankräfte n_x (Bild 6-30). Die größten Kräfte treten bei Berücksichtigung der tatsächliche Nachgiebigkeit des Schafts, also am Schaft-Basisringträger-System, auf.

Generell zeigen die Vergleiche, daß die Umverteilung der Biegemomente und die Größenwerte entstehenden Torsionsverdrehungen durch die vertikale Koppelung von Schaft und Ringträger entstehen. Die Koppelung in Umfangsrichtung ist dabei unbedeutend.

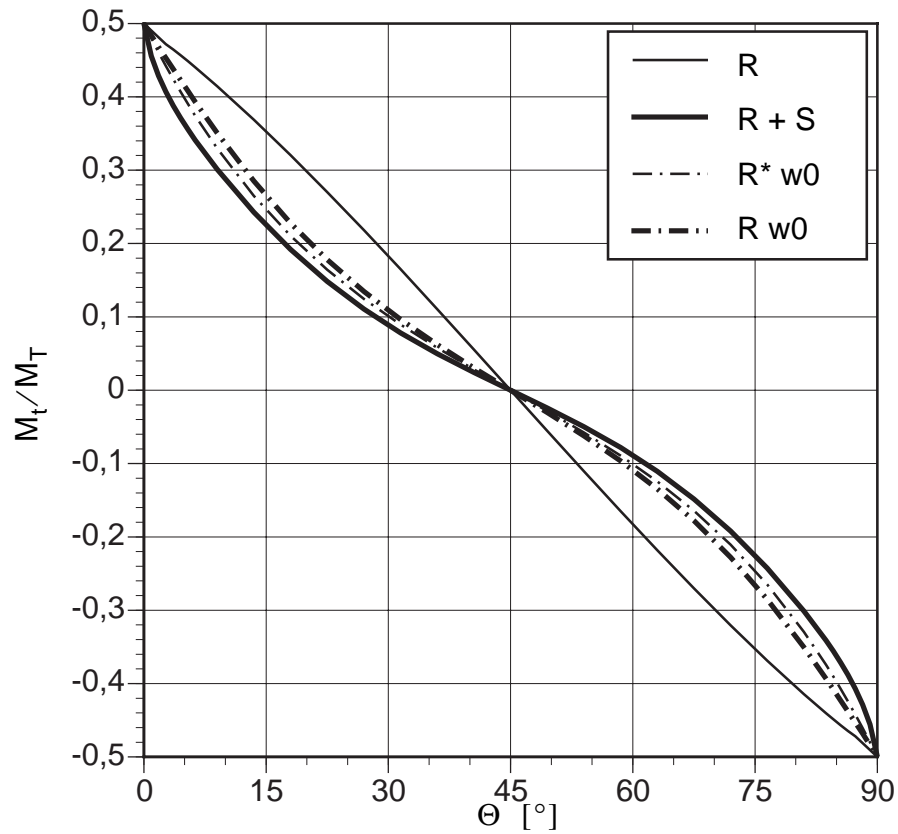


Bild 6-27 Isolierter bzw. integrierter Basisringträger — Torsionsmomente bei Einzeltorsionsmomentenbelastung

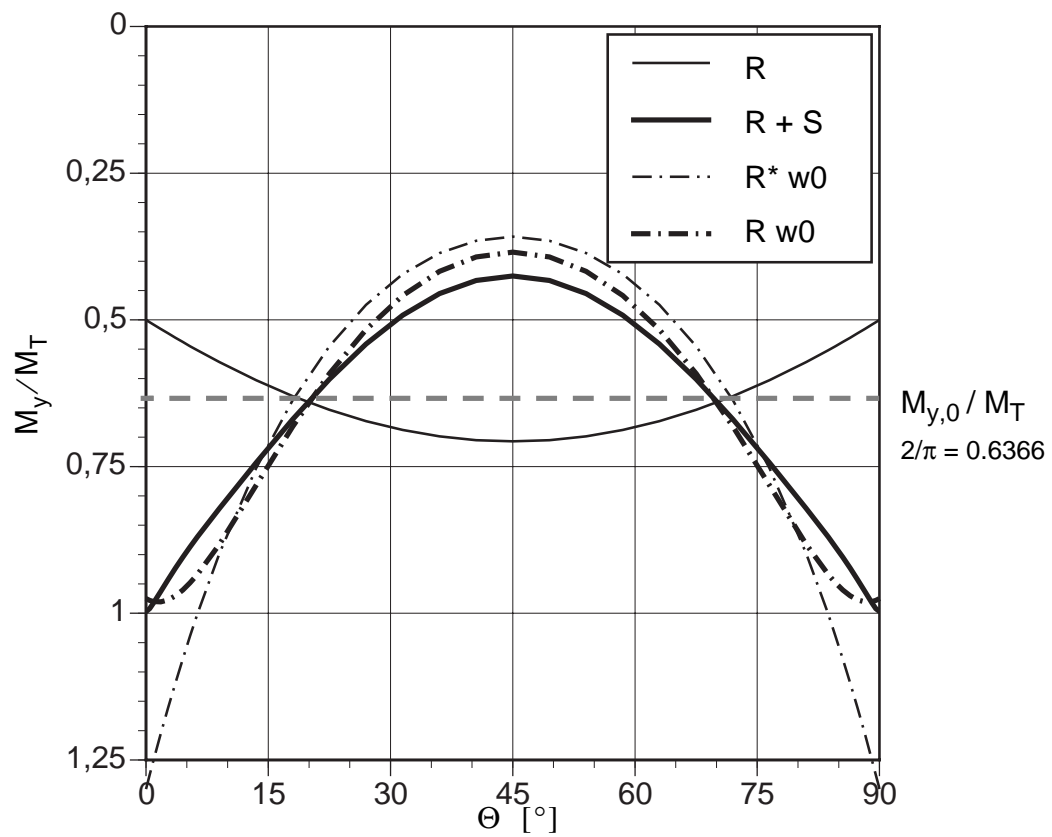


Bild 6-28 Isolierter bzw. integrierter Basisringträger — Biegemomente bei Einzeltorsionsmomentenbelastung

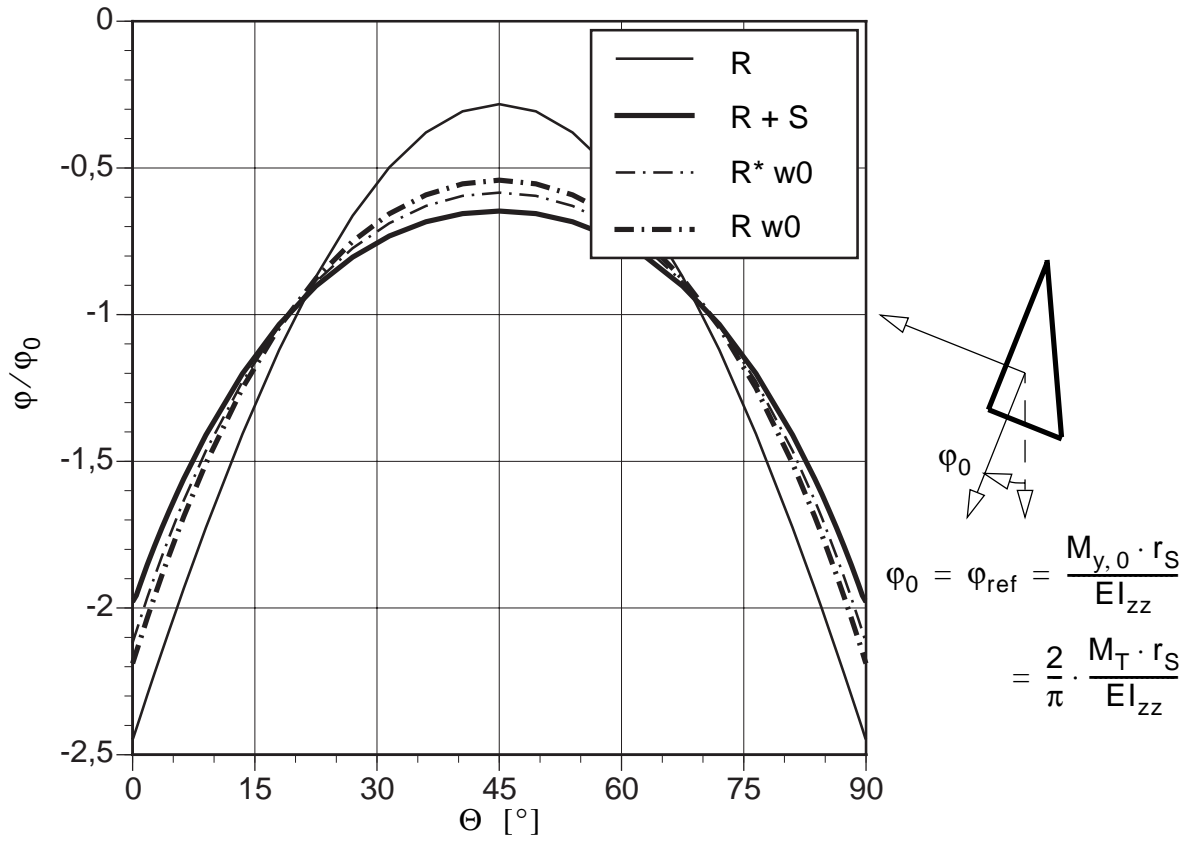


Bild 6-29 Isolierter bzw. integrierter Basisringträger — Torsionsverdrehung bei Einzeltorsionsmomentenbelastung

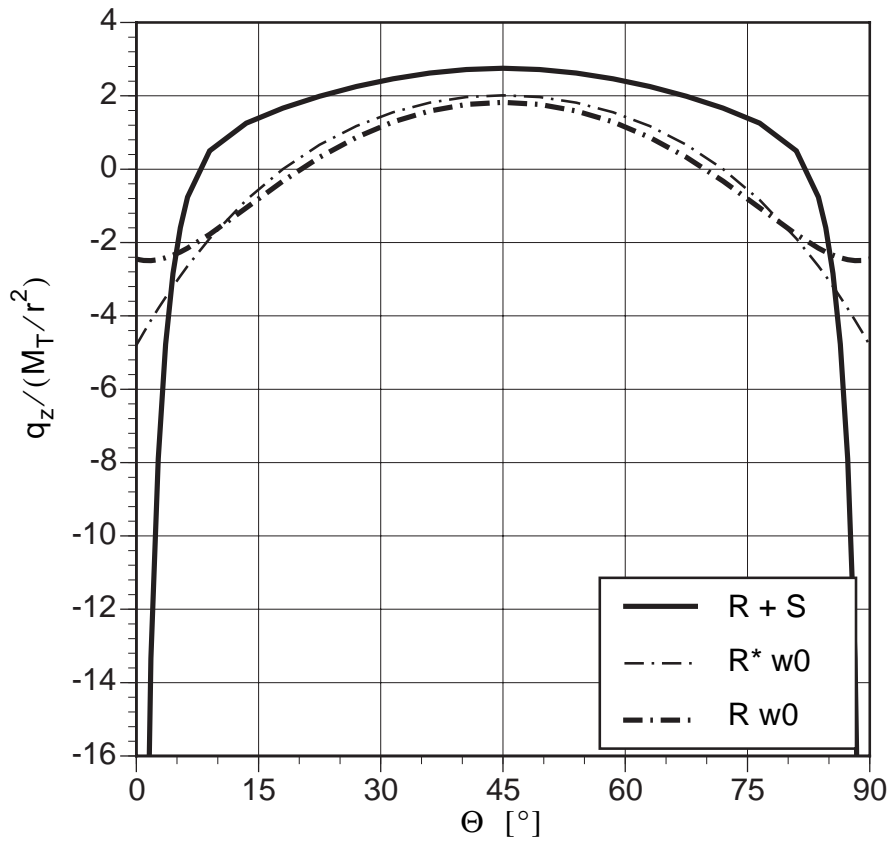


Bild 6-30 Integrierter Basisringträger — Kontaktkräfte q_z zwischen Schaft und Basisringträger

6.2.4 Einzelradialkraftbelastung

6.2.4.1 Isolierter Basisringträger — System "R"

Die nach innen gerichteten Radialkräfte H entstehen aus Gleichgewichtsgründen am Schottblech aus der lokalen Lagerkraft T_K des Trichters. Für die Belastung durch Radialkräfte wird der Ring nur in seiner Ebene beansprucht. Es liegt in diesem Fall ein statisch unbestimmtes Tragsystem vor, die Schnittkräfte können nicht direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen ermittelt werden.

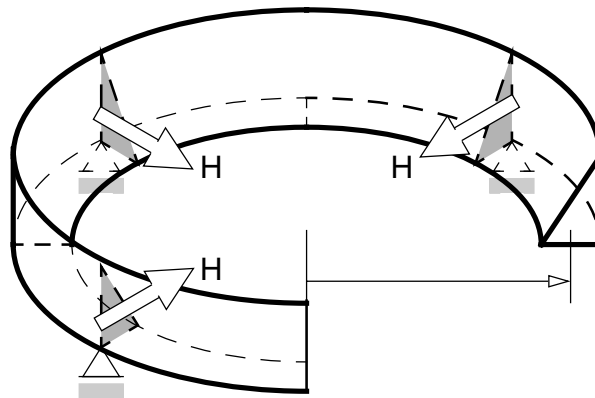


Bild 6-31 Lastabtragung von Radialkräften durch den Ringträger (Basisringträgersystem)

Zur Bestimmung der endgültigen Schnittkraftverläufe erfolgt die approximative Berechnung als ebener Ringträger mit einfachsymmetrischem Querschnitt. Für eine positiv wirkende Radialkraft H ergeben sich folgende Schnittkräfte in Gl. (6-14).

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ \frac{M_z}{r_s} \end{bmatrix} = \frac{-H}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cot \frac{\pi}{n} \cos \Theta + \sin \Theta \\ \cot \frac{\pi}{n} \sin \Theta - \cos \Theta \\ \cot \frac{\pi}{n} \cos \Theta + \sin \Theta - \frac{n}{\pi} \end{bmatrix} \quad (6-14)$$

Die Normalkraft ergibt sich analog dem Biegemoment M_y bei Einzeltorsionsmomentenbelastung zum Großteil aus einem rotationssymmetrischen Grundanteil N_0 .

$$N_0 = -H \cdot \frac{n}{2\pi} \quad (6-15)$$

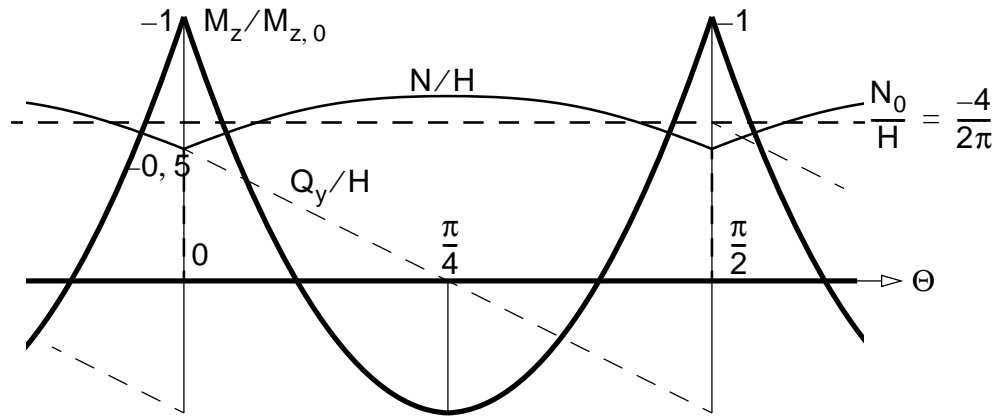


Bild 6-32 Schnittkraftverläufe des Basisringträgers in dimensionsloser Darstellung bei Radialkraftbelastung ($n = 4$)

6.2.4.2 Schaft-Basisringträger-System — Systeme "R+S" bzw. "S"

Die Radialkräfte, die aus Gleichgewichtsgründen am Schottblech notwendig sind, wirken im vorliegenden Fall nach innen gerichtet am Ringträger. Neben dem Schaft-Basisringträger-System wird der isolierte Ringträger untersucht.

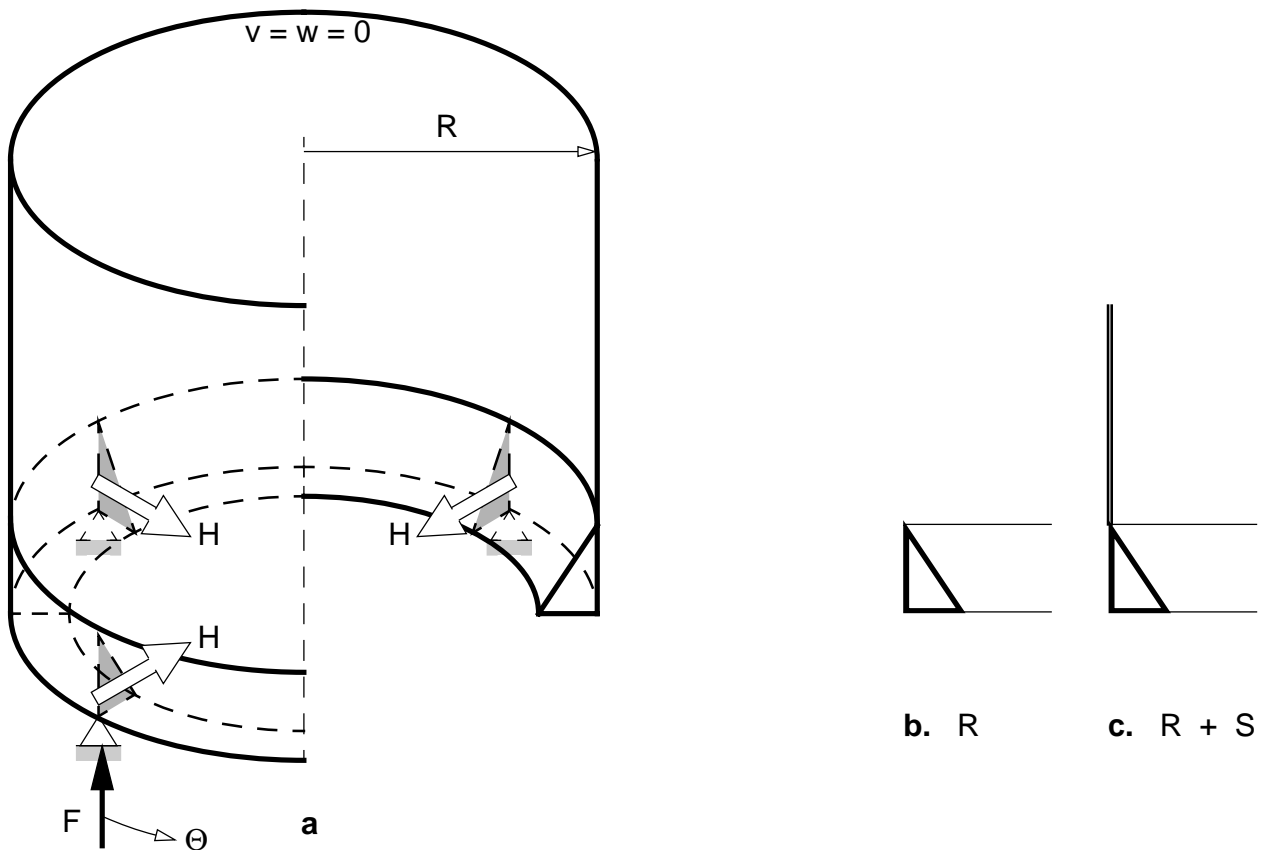


Bild 6-33 Untersuchte Tragsysteme bei Einzelradialkraftbelastung — **b.** isolierter Basisringträger und **c.** Schaft-Basisringträger-System

Es werden folgende Ergebnisse dargestellt:

- Schnittkräfte N , Q_y und Q_z
- Momente M_t , M_y und M_z
- Verschiebungen u , v und w an der Oberkante des Ringträgers

Als Bezugsgrößen dienen für die Schnittkräfte die Radialkraft H , für die Momente das Biegemoment M_{z0} am Kraftangriffspunkt und für die Verschiebungen die Radialverschiebung v_0 am Kraftangriffspunkt des isolierten Ringträgers mit Annahme eines symmetrischen Querschnittes.

Schnittkräfte und Verformungen

In Bild 6-34 sind die Kräfte N , Q_y und Q_z dargestellt. Die Lastabtragung erfolgt am isolierten Ringträger durch Normalkräfte N , Querkkräfte Q_y und Biegemomente M_z . Am Schaft-Basisringträger-System tritt durch die Koppelung in Vertikalrichtung zusätzlich die Querkraft Q_z auf, die Normalkraft N und die Querkraft Q_y sind nahezu unverändert.

In Bild 6-35 sind die Torsions- und Biegemomente dargestellt. Am isolierten Ringträger dominiert das Biegemoment M_z , das geringfügige Biegemoment M_y tritt nur aufgrund der unsymmetrischen Querschnittsform (schiefe Hauptträgheitsachsen des dreieckförmigen Hohlkastenquerschnittes) auf, das Torsionsmoment M_t ist ident Null. Am Schaft-Basisringträger-System entstehen Torsionsmomente M_t und Biegemomente M_y . Dominierend sind nach wie vor die Biegemomente M_z , sie sind nahezu ident mit jenen des isolierten Ringträgers.

Die Verformungen der Oberkante des Ringträgers sind in Bild 6-36 dargestellt. Am Schaft-Basisringträger-System entstehen gegenüber dem isolierten Ringträger geringfügig veränderte Radial- und Umfangsverschiebungen auf. Die Vertikalverschiebung wird nahezu zu Null, am isolierten Ringträger ist sie aufgrund der schiefen Hauptträgheitsachsen circa halb so groß wie die Radialverformung.

Im Gegensatz zur Einzeltorsionsmomentenbelastung kommt es also kaum zu einer Änderung der Ringschnittkraftverläufe am kombinierten Schaft-Basisringträger-System. Dies begründet sich damit, daß der Basisringträger primär in der Ringebeane beansprucht wird und, wie bereits erwähnt, die maßgebenden Verformungen in der Ringebeane auftreten. Signifikante Umverteilungen ergeben sich durch das steifigkeitsmässige Zusammenwirken des integrierten Basisringträgers mit dem Schaft bei Vorliegen von wesentlichen Vertikalverformungen, wie z.B. bei der Einzeltorsionsmomentenbelastung.

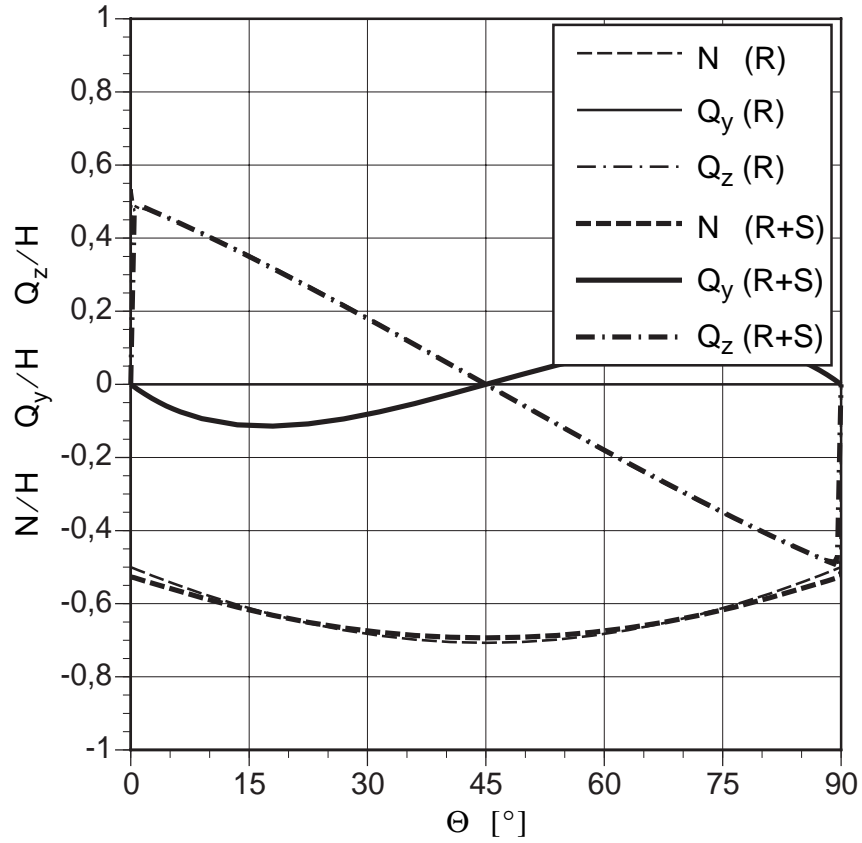


Bild 6-34 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem isolierten Basisringträger — Normalkraft und Querkräfte bei Einzelradialkraftbelastung

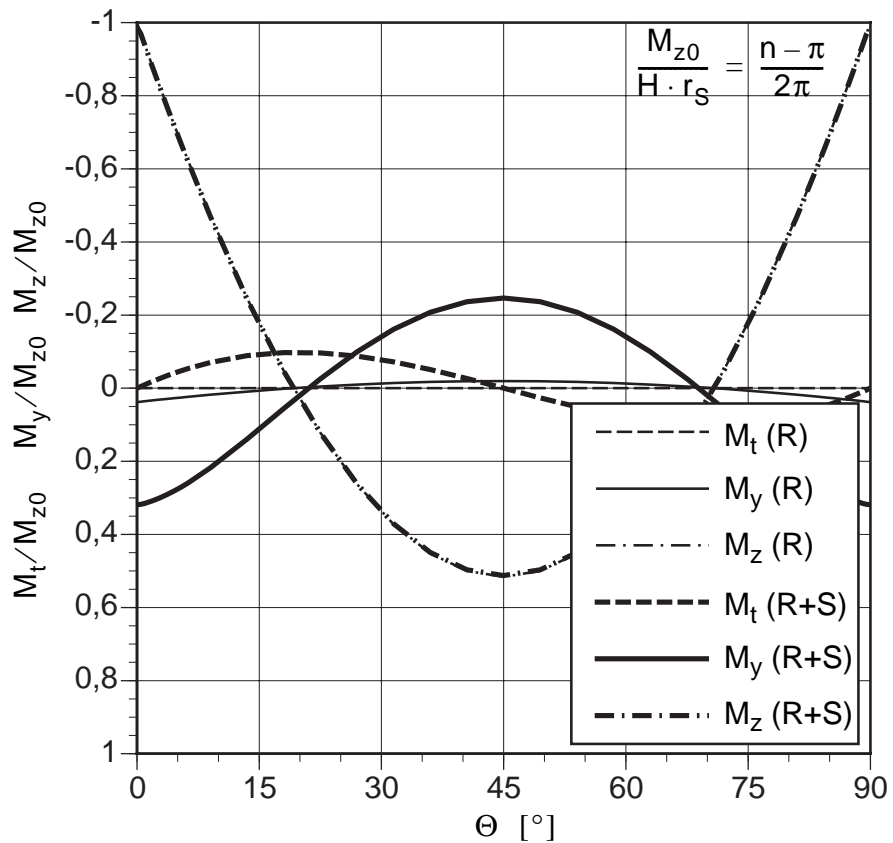


Bild 6-35 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem isolierten Basisringträger — Torsionsmoment und Biegemomente des Ringträgers bei Einzelradialkraftbelastung

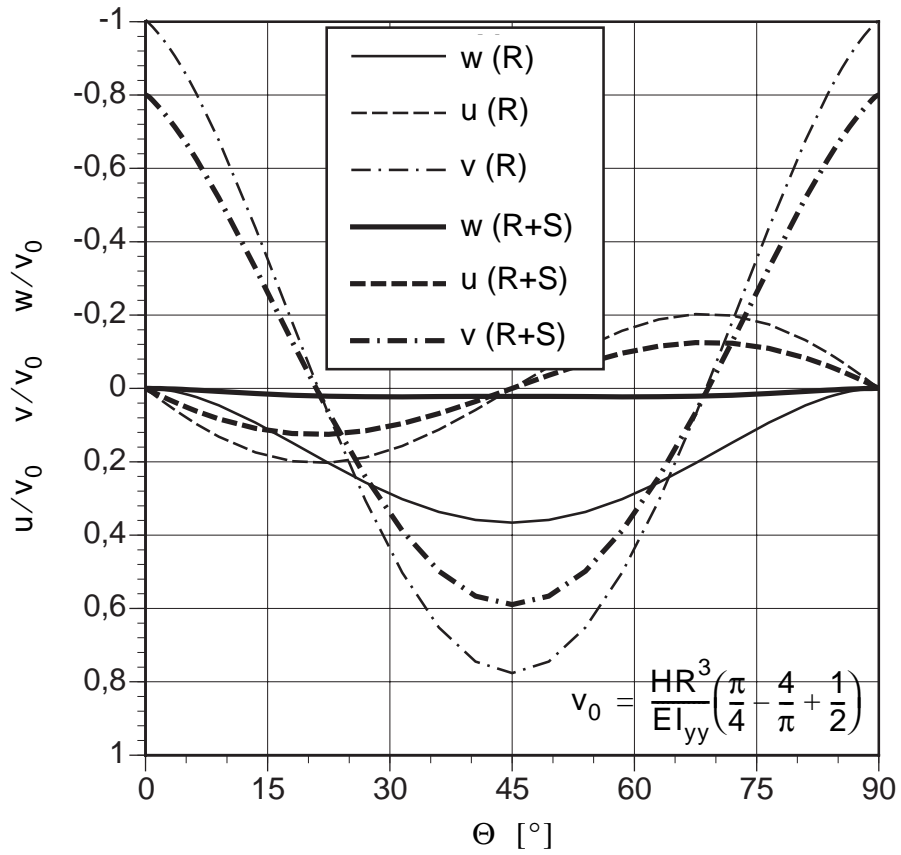


Bild 6-36 Schaft-Basisringträger-System und Vergleich mit dem isolierten Basisringträger
— Verformungen der Ringträgeroberkante bei Einzelradialkraftbelastung

6.3 Spannungsbasierte Tragfähigkeitsberechnung

Die Bestimmung der Tragfähigkeit des Schaft-Basisringträger-Systems erfolgt näherungsweise auf Basis der Schnittkraftverteilungen der linear-elastischen Berechnungen. Dabei wird die Tragfähigkeitsberechnung getrennt für den Schaft und den Ringträger durchgeführt.

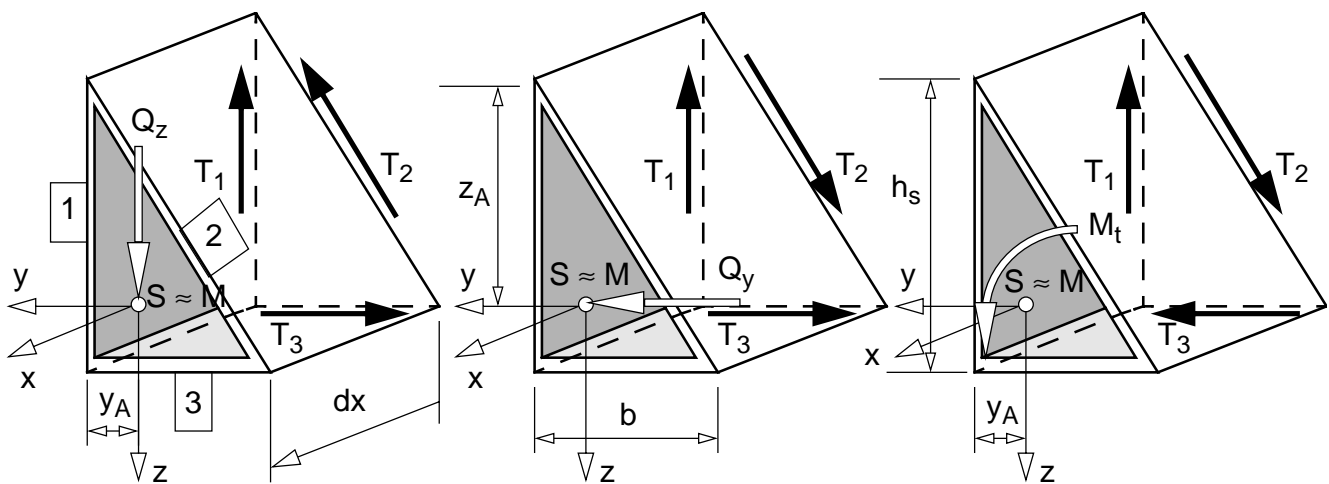
Zur Bestimmung der Tragfähigkeit des Ringträgers stehen folgende Möglichkeiten mit steigender Approximationsqualität der realen plastischen Tragfähigkeit zur Verfügung:

- Fließen des maximal beanspruchten Punktes — die Bestimmung der Tragfähigkeit erfolgt durch die Berechnung der Mises-Vergleichsspannung.
- Teilschnittgrößenverfahren — die Aufteilung sämtlicher Schnittgrößen auf die Einzelscheiben erfolgt entsprechend der elastischen Spannungsverläufe und der Anwendung der plastischen Querschnittsinteraktion für die dünnwandigen Querschnittsteile mit Rechtecksquerschnitt zufolge Normalkraft-, Biegemomenten- und Schubkraftbeanspruchung. Maßgebend für das Querschnittsgesamtversagen ist die Tragfähigkeit der stärkst beanspruchten Einzelscheibe.
- Vollplastische Querschnittsinteraktion

Vorweg wird die Berechnung der Schubspannungen bzw. der resultierenden Schubkräfte am dreieckförmigen Hohlkastenquerschnitt des Basisringträgers in Kap. 6.3.1 gezeigt. Für die Anwendungsbeispiele wird die Tragfähigkeit durch eine vereinfachte plastische Querschnittsinteraktion (siehe Kap. 6.3.2.2) berechnet. Die Tragfähigkeit des Schaftes wird vereinfacht mit den Meridiankräfte n_x des Schaftes bestimmt. Die Materialparameter sind jene von Baustahl St 37 ($f_y = 24,0 \text{ kN/cm}^2$).

6.3.1 Vereinfachte Schubspannungsberechnung

Im folgenden werden die resultierenden Schubkräfte an den Einzelscheiben — Standzarge, oberer Trichterteil und Basisringblech — zufolge der Querkräfte Q_y und Q_z und des Torsionsmomentes M_t bestimmt. Der vorliegende dreieckförmige Hohlkastenträger besteht aus 3 Einzelscheiben, die Aufteilung der Querkräfte und des Torsionsmomentes erfolgt somit statisch bestimmt. Am infinitesimalen Ringträgererelement in Bild 6-37 wirken am positiven Schnittufer die Schnittgrößen, am negativen Schnittufer die resultierenden Schubkräfte. Näherungsweise wird der Schubmittelpunkt M mit dem Schwerpunkt S gleich gesetzt. Der Schubmittelpunkt gilt für rein elastische Querschnittsbeanspruchung des Ringträgers. Bei Ausbildung von plastischen Bereichen im Querschnitt verändert der Schubmittelpunkt seine Lage, der ursprüngliche Schubmittelpunkt verliert somit seine Bedeutung. Die resultierenden Schubkräfte stellen sich bei Torsionsmomentenbeanspruchung für den dreieckförmigen Hohlkastenträger entsprechend der Bredt'schen Formel (Bild 6-37) ein. Die Vorzeichenregelung wird entsprechend dieser rundum laufenden Schubkräfte gewählt.



$T_1 = Q_z \left(1 - \frac{y_A}{h_s}\right)$ $T_2 = -Q_z \frac{y_A}{h_s \cos \beta}$ $T_3 = -Q_z \frac{y_A}{h_s}$	$T_1 = Q_y \left(1 - \frac{z_A}{h_s}\right) \frac{h_s}{b}$ $T_2 = Q_y \left(1 - \frac{z_A}{h_s}\right) \frac{h_s}{b \cdot \cos \beta}$ $T_3 = -Q_y \frac{z_A}{h_s}$	$T_1 = \frac{M_t}{b}$ $T_2 = \frac{M_t}{b \cdot \cos \beta}$ $T_3 = \frac{M_t}{h_s}$
$\tau_1 = Q_z \left(1 - \frac{y_A}{h_s}\right) \frac{1}{h_s \cdot t_s}$ $\tau_2 = Q_z \frac{y_A}{h_s^2} \cdot \frac{1}{t_h}$ $\tau_3 = Q_y \frac{y_A}{h_s \cdot b} \cdot \frac{1}{t_b}$	$\tau_1 = Q_y \left(1 - \frac{z_A}{h_s}\right) \frac{1}{b t_s}$ $\tau_2 = Q_y \left(1 - \frac{z_A}{h_s}\right) \frac{1}{b t_h \cdot \cos \beta}$ $\tau_3 = Q_y \frac{z_A/h_s}{b \cdot t_b}$	$\tau_1 = \frac{M_t}{b \cdot h_s \cdot t_s} = \frac{M_t}{2A_m \cdot t_s}$ $\tau_2 = \frac{M_t}{b \cdot h_s \cdot t_h} = \frac{M_t}{2A_m \cdot t_h}$ $\tau_3 = \frac{M_t}{b \cdot h_s \cdot t_b} = \frac{M_t}{2A_m \cdot t_s}$
a	b	c

Bild 6-37 Resultierende Schubkräfte bzw. Schubspannungen zufolge **a.** Querkraft Q_z , **b.** Querkraft Q_y und **c.** Torsionsmoment M_t

6.3.2 Plastische Querschnittsinteraktion

6.3.2.1 Exakte plastische Querschnittsinteraktion

Für die Interaktion der Normalkraft N und der Biegemomente M_y bzw. M_z wird die exakte Querschnittsinteraktion aufbereitet und die Zulässigkeit der im weiteren verwendeten vereinfachten plastischen Querschnittsinteraktion gezeigt.

Bei der vereinfachten Querschnittsinteraktion werden die plastisch verteilten Umfangsspannungen zufolge N , M_y und M_z linear superponiert. Mit den Schubspannungen zufolge Q_y , Q_z und M_t erfolgt eine quadratische Interaktion.

Die exakte plastische Querschnittsinteraktion wird numerisch mittels Simpson-Integrationsschema aus der Spannungsverteilung am Querschnitt entsprechend Bild 6-38 bzw. Gl. (6-16) bestimmt. Dabei wird die Lage der Spannungsnulllinie und somit der plastische Verformungsmechanismus am Querschnitt vorgegeben. Das Materialverhalten ist starr-plastisch, in jedem Punkt wird die Fließgrenze f_y als Druck- oder Zugspannung erreicht. Vorweg können die maximalen plastischen Biegemomente $M_{y,pl}$ und $M_{z,pl}$ durch die Bestimmung aus den abschnittsweise konstant verteilten Druck- bzw. Zugspannungen ober- und unterhalb bzw. links und rechts der Flächenhalbierenden bestimmt werden.

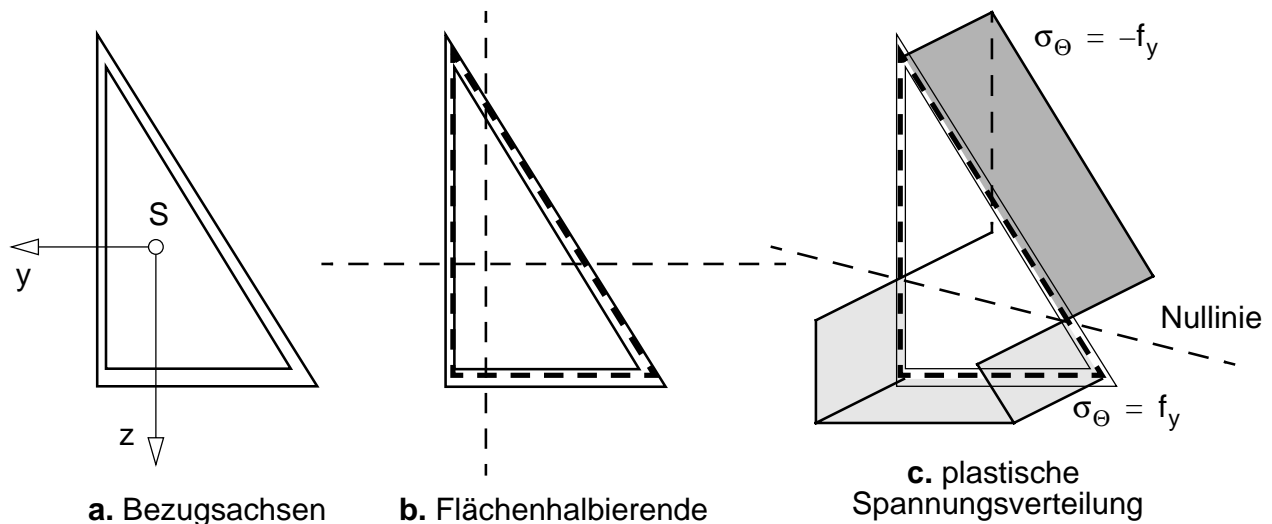


Bild 6-38 Plastische Querschnittsinteraktion

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \int \sigma_{\Theta} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ y \end{bmatrix} dA \quad (6-16)$$

In Bild 6-39 ist die vereinfachte Querschnittsinteraktion entsprechend Kap. 6.3.2.2 im Vergleich mit der exakten (numerisch) bestimmten Querschnittsinteraktion für den behandelten dreieckförmigen Hohlkastenquerschnitt ($h_S/t = 100$, $\beta = 30^\circ$) dargestellt.

Durch die unsymmetrische Querschnittsform wird die Interaktionskurve der Biegemomente ebenfalls unsymmetrisch, im vorliegenden Fall weist die Interaktionskurve eine annähernd elliptische Form auf.

Aus der plastischen Verteilung der Spannungen bei Erreichen des maximalen Biegemomentes $M_{y,pl}$ ergibt sich ein zugeordnetes Biegemoment M_z mit konträrem Vorzeichen. Die plastischen Momente der vertikalen bzw. horizontalen Bezugsachse des Querschnitts stellen somit konjugierte Durchmesser der elliptischen Interaktionskurve dar. Für Kombinationen von M_y und M_z mit ungleichem Vorzeichen ergibt sich gegenüber der vereinfachten Querschnittsinteraktion eine deutlich erhöhte Tragfähigkeit. Weisen M_y und M_z das gleiche Vorzeichen auf, so stellt die vereinfachte Querschnittsinteraktion eine gute Näherung der realen Querschnittsinteraktion dar.

Für die Interaktion von Normalkraft N und einem Biegemoment M_y in Bild 6-39 zeigt die Querschnittsinteraktion einen quadratischen Verlauf, die vereinfachte Interaktion erfolgt linear.

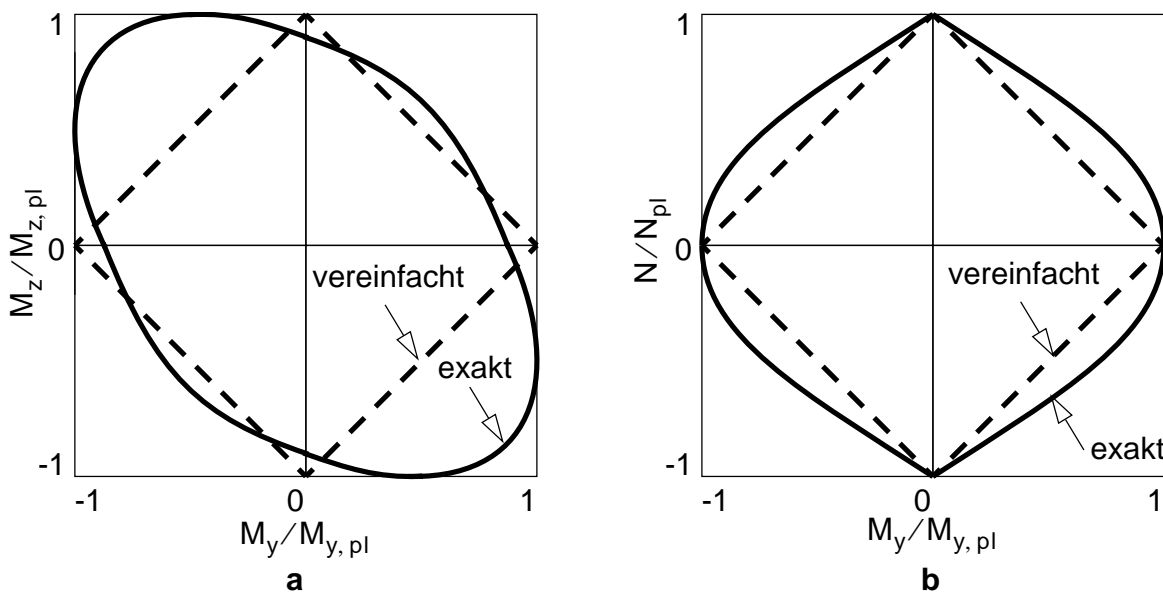


Bild 6-39 Vereinfachte und exakte Querschnittsinteraktion — **a.** Interaktion der Biegemomente M_y und M_z und **b.** Interaktion von Biegemoment M_y und Normalkraft N

Für die Bestimmung der Ringträgertragfähigkeit bei Einzeltorsionsmomentenbelastung wird der Ringträger durch Torsionsmomente M_t und Biegemomente M_y beansprucht. Die vereinfachte Querschnittsinteraktion wird für diese Schnittgrößeninteraktion nicht benötigt.

Bei Einzelradialkraft- und Einzeltorsionsmomentenbelastung wird die vereinfachte Querschnittsinteraktion angewendet werden. Durch die unregelmäßig verteilten Biegemomente M_y und M_z und der Größenordnung der Torsionsmomentenbeanspruchung und folglich Schubspannungsbeanspruchungen verringern sich die Abweichungen gegenüber der exakten Querschnittsinteraktion.

6.3.2.2 Vereinfachte plastische Querschnittsinteraktion

Zur Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit des Basisringträgers wird die Interaktion der plastischen Querschnittsbeanspruchungen berechnet. Die plastische Querschnittsinteraktion wird in bezogener Form zufolge der Schnittkräfte und der plastischen Widerstandsgrößen des Ringträgers bestimmt. Die Interaktion der Schnittgrößen wird dabei in folgender, vereinfachter Form vorgenommen.:

- Die Interaktion von Normalkraft N und Biegemomenten M_y bzw. M_z wird vereinfacht linear angenommen. Dies entspricht der Bestimmung der maximalen Normalspannung im Ringträger ähnlich der Bestimmung der maximalen elastischen Normalspannung, statt der linear veränderlichen elastischen Spannungsverteilung wird die abschnittsweise konstante plastische Spannungsverteilung zufolge der Einzelschnittgrößen verwendet (Bild 6-40).
- Für die Querkräfte und das Torsionsmoment werden die resultierenden Schubkräfte T_i der Einzelteile des Ringträgers bestimmt. Die entstehenden Schubspannungen werden als konstant verteilt angenommen. Als plastische Widerstandsgröße wird die Schubtragfähigkeit $T_{i,y}$ des jeweiligen Einzelteiles verwendet.

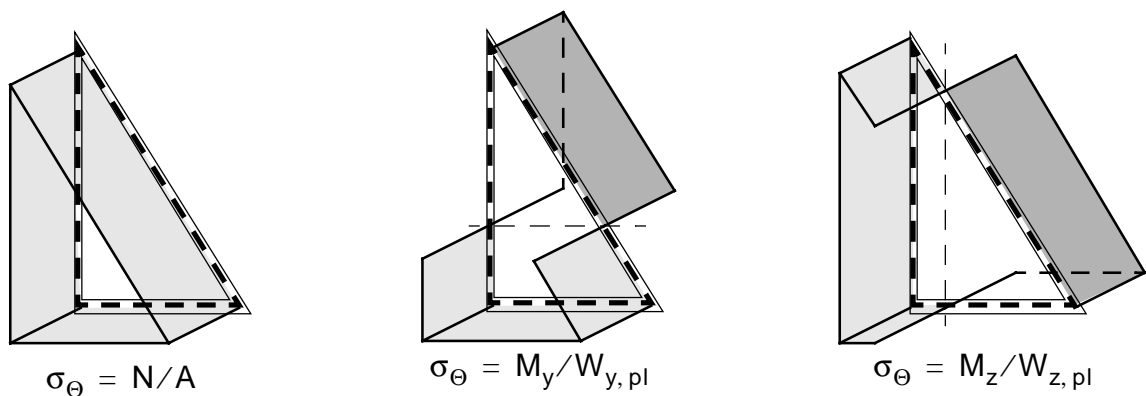


Bild 6-40 Plastische Spannungsverteilung am dreieckförmigen Hohlkastenquerschnitt

Die Interaktion aller Schnittgrößen erfolgt durch die folgende Vereinfachung, die Normalkraft N und die Biegemomente M_y bzw. M_z bewirken Umfangsspannungen σ_{Θ} , die Interaktion untereinander erfolgt linear durch Addition. Mit den Schubspannungen der resultierenden Schubkräfte ergibt sich eine quadratische Interaktion. Zur Bestimmung der Tragfähigkeit wird die plastische Querschnittsausnutzung α in Gl. (6-17c) berechnet.

$$\left(\frac{|N|}{A} + \frac{|M_y|}{W_{y,pl}} + \frac{|M_z|}{W_{z,pl}} \right) \leq f_y \sqrt{1 - \left(\frac{T_i}{T_{i,y}} \right)^2} = f_{y,red} \quad (6-17a)$$

$$\left(\frac{|N|}{N_{pl}} + \frac{|M_y|}{M_{y,pl}} + \frac{|M_z|}{M_{z,pl}} \right) \leq \sqrt{1 - \left(\frac{T_i}{T_{i,y}} \right)^2} \quad (6-17b)$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{|N|}{N_{pl}} + \frac{|M_y|}{M_{y,pl}} + \frac{|M_z|}{M_{z,pl}} \right)^2 + \left(\frac{T_i}{T_{i,y}} \right)^2} \leq 1 \quad (6-17c)$$

6.3.3 Vertikalbelastung

6.3.3.1 Isolierter Basisringträger — System "R"

Die maßgebenden Beanspruchungen des isolierten Ringträgers entstehen in den Auflagerpunkten. Die plastische Querschnittsausnutzung und die Verteilung der Biege- und Torsionsmomente ist in bezogener Form in Bild 6-41 dargestellt. Die Schubkräfte zufolge Querkraft Q_z und Torsionsmoment M_t überlagern sich maximal im Trichterteil (Schubkraft T_2) des Ringträgers.

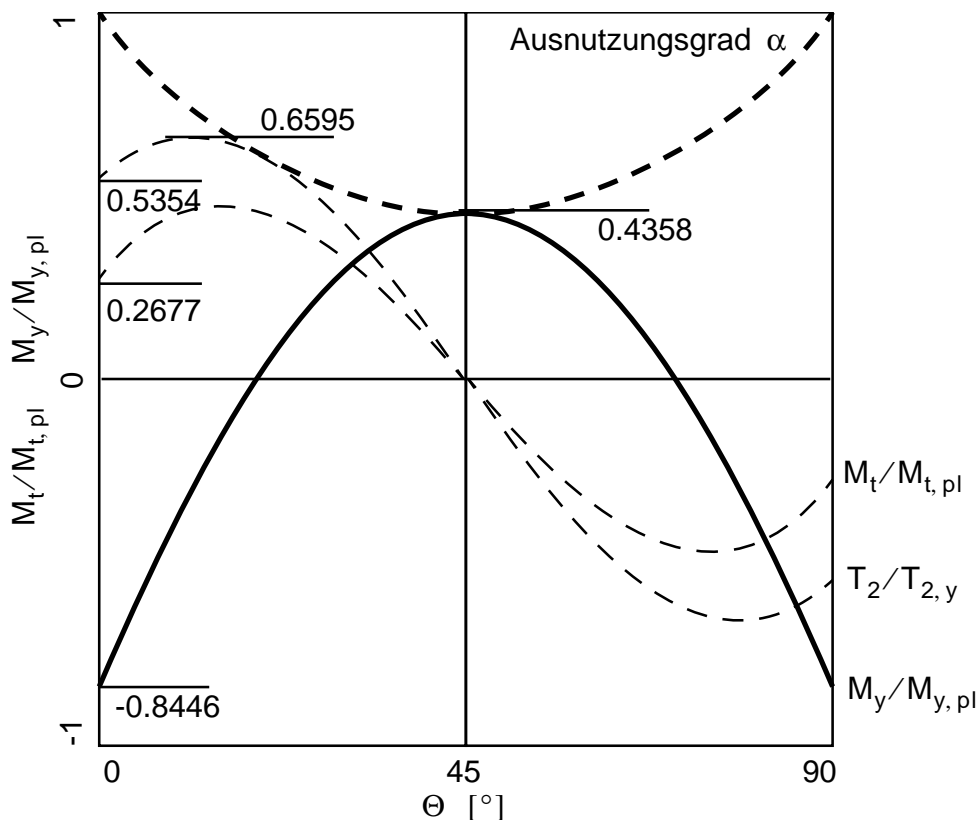


Bild 6-41 Isolierter Basisringträger — Verteilung der Momente in bezogener Darstellung und der plastischen Querschnittsausnutzung α bei Erreichen der plastischen Tragfähigkeit

Es ergibt sich bei vorliegendem Anwendungsbeispiel folgende bezogene Tragfähigkeit:

$$\frac{q_z}{f_{yt}} = 0,124$$

6.3.3.2 Schaft-Basisringträger-System — System "R+S", "S" bzw. "R"

Die Tragfähigkeit des Schaft-Basisringträger-Systems bei Vertikalbelastung wird im folgenden bei

- Variation der Höhe h_S des Ringträgers untersucht.

Die Bezugshöhe ist dabei $h_{S,0} = 100 \text{ cm}$.

Die Bestimmung der Tragfähigkeit erfolgt mit:

- Ringschnittkräften des Ringträgers
- Axialkräften des Schaftes in $x/L = 0$

Zu Vergleichszwecken sind die Tragfähigkeiten des Schaft-Systems und des isolierten Ringträgers dargestellt. Die Tragfähigkeit des Schaft-Systems basiert auf den Meridiankräften in $x/L = 0$

Die Gesamttragfähigkeit ist in Bild 6-42 in bezogener Form dargestellt. Als Bezugsgröße dient die aufnehmbare Vertikalbelastung q_z bei rotationssymmetrischer Lagerung. Maßgebend ist die Beanspruchung des Schaftes durch die Meridiankräfte. Gegenüber dem Schaft-System ergibt sich je nach Höhe des Ringträgers eine Steigerung der Tragfähigkeit. Die Tragfähigkeiten des isolierten Ringträgers sind aufgrund der wesentlich höheren Beanspruchung gegenüber dem Schaft-Basisringträger-System geringer.

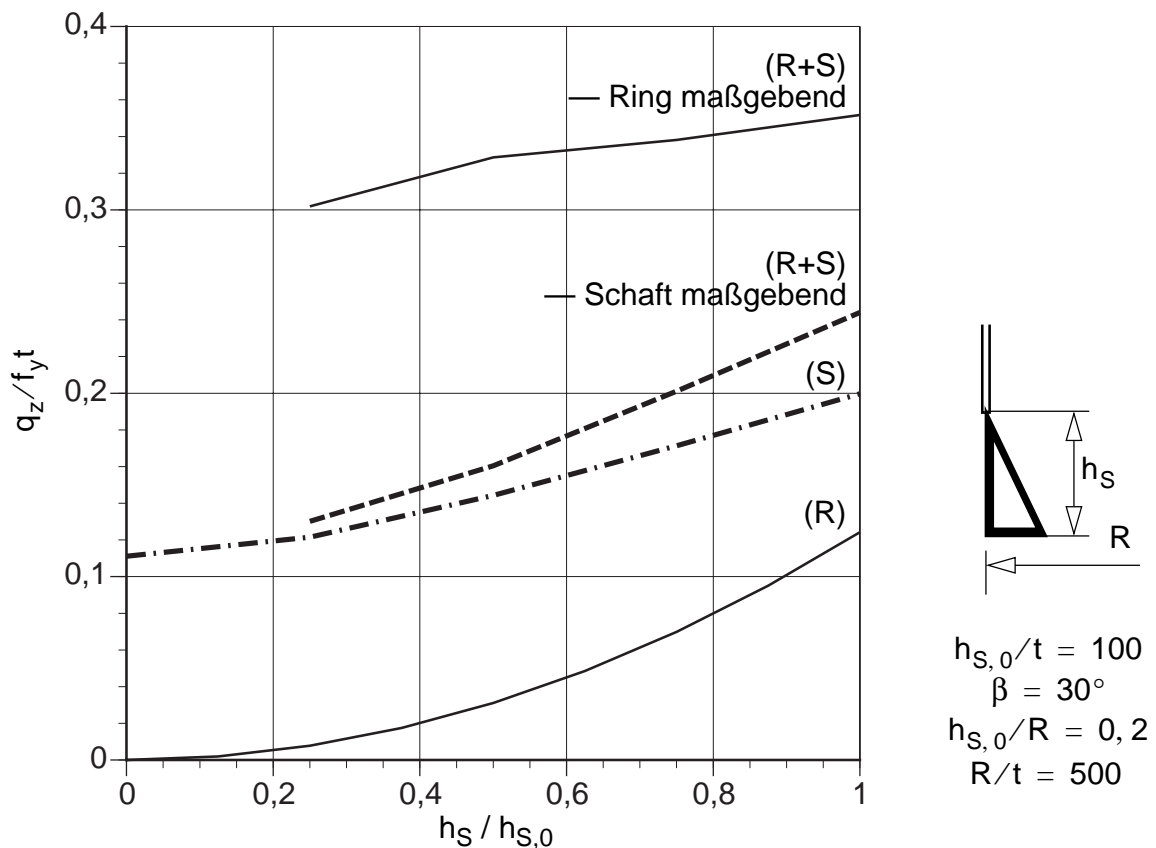


Bild 6-42 Tragfähigkeit bei Vertikalbelastung in Abhängigkeit der Höhe h_S — Isolierter Basisringträger (R), Schaft-Basisringträger-System (R + S) bzw. Schaft-System (S)

6.3.4 Einzeltorsionsmomentenbelastung

6.3.4.1 Isolierter Basisringträger — System "R"

Die Momente M_y und M_t werden direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen berechnet (siehe Kap. 6.2.3.2). Die Bestimmung der Tragfähigkeit erfolgt durch die plastische Querschnittsinteraktion am maximal beanspruchten Ort — hier den Auflagerpunkten. Für jeden beliebigen Ort am Ringträger wird die Querschnittsausnutzung α bestimmt (Gl. (6-18b)).

$$\begin{bmatrix} M_y \\ M_t \end{bmatrix} = \frac{M_T}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\cos \Theta}{\tan \pi/n} + \sin \Theta \\ \frac{-\sin \Theta}{\tan \pi/n} + \cos \Theta \end{bmatrix} \tag{6-18a}$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{y,pl}}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{M_{t,pl}}\right)^2} \tag{6-18b}$$

In Bild 6-43 sind die Verteilungen der Momente bei Erreichen der plastischen Tragfähigkeit bezogen auf die plastischen Widerstandsgrößen $M_{y,pl}$ bzw. $M_{t,pl}$ des Ringträgers und die Querschnittsausnutzung α dargestellt. Die Torsionsmomente erreichen an den Auflagerungen einen Wert von $M_t = 0,9211 M_{t,pl}$.

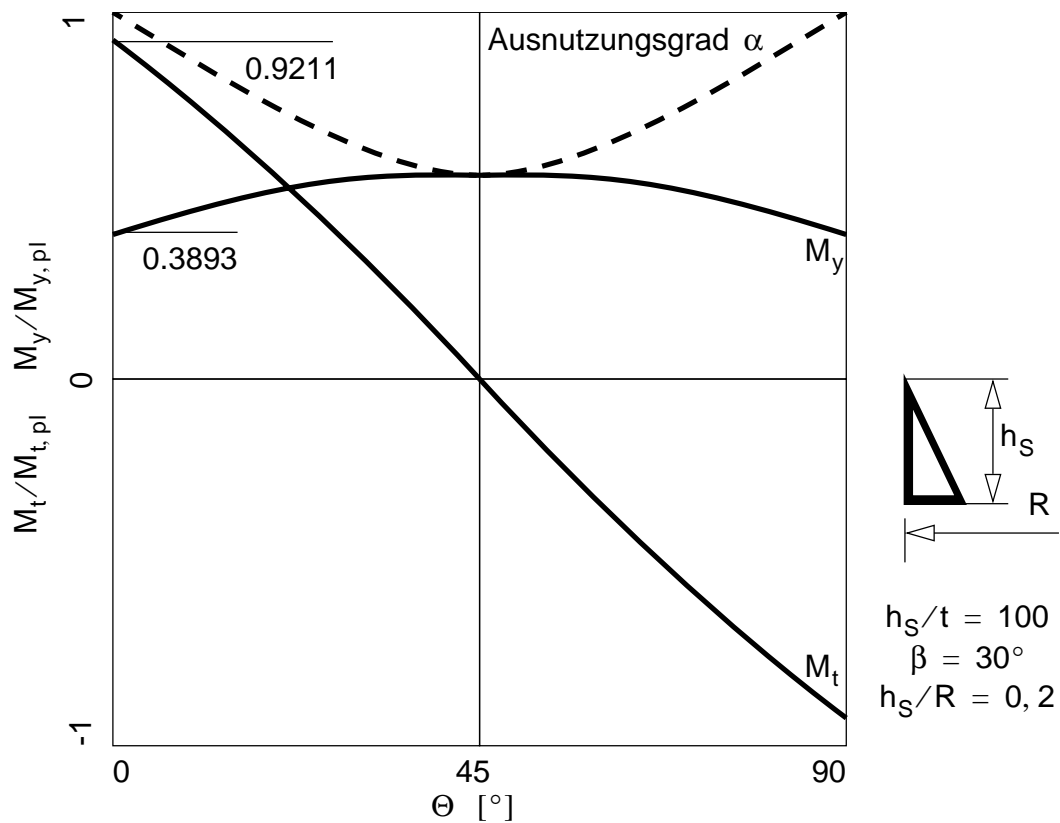


Bild 6-43 Isolierter Basisringträger — Torsions- und Biegemomente bzw. Querschnittsausnutzung bei Erreichen der Tragfähigkeit für Einzeltorsionsmomentenbelastung

6.3.4.2 Schaft-Basisringträger-System — System "R+S" bzw. "R"

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen zeigen durch die Koppelwirkung von Schaft und Ringträger in vertikaler Richtung eine Umlagerung des maximalen Biegemomentes zu den Auflagerpunkten hin. Die Bestimmung der Tragfähigkeit erfolgt wiederum durch die Berechnung der plastischen Querschnittsinteraktion am Ringträger.

In Bild 6-44 sind die Momente bei Erreichen der Tragfähigkeit in bezogener Form dargestellt. Zum Vergleich sind die Momentenverteilungen und die Querschnittsausnutzung des isolierten Basisringträgers dargestellt. Der maximal beanspruchte Ort ist wiederum das Auflager. Der Torsionsmoment erreicht am Auflager 76% des plastischen Torsionswiderstandsmomentes ($M_t = 0,7649M_{t,pl}$). Gegenüber der Tragfähigkeit des isolierten Ringträgers ergibt sich somit für das Schaft-Basisringträger-System eine um 20% geringere Tragfähigkeit. Die Ursachen dafür liegen in den Biegemomentenverteilungen am kombinierten Schaft-Basisringträger-System (System "R + S") gegenüber dem isolierten Ringträger (System "R").

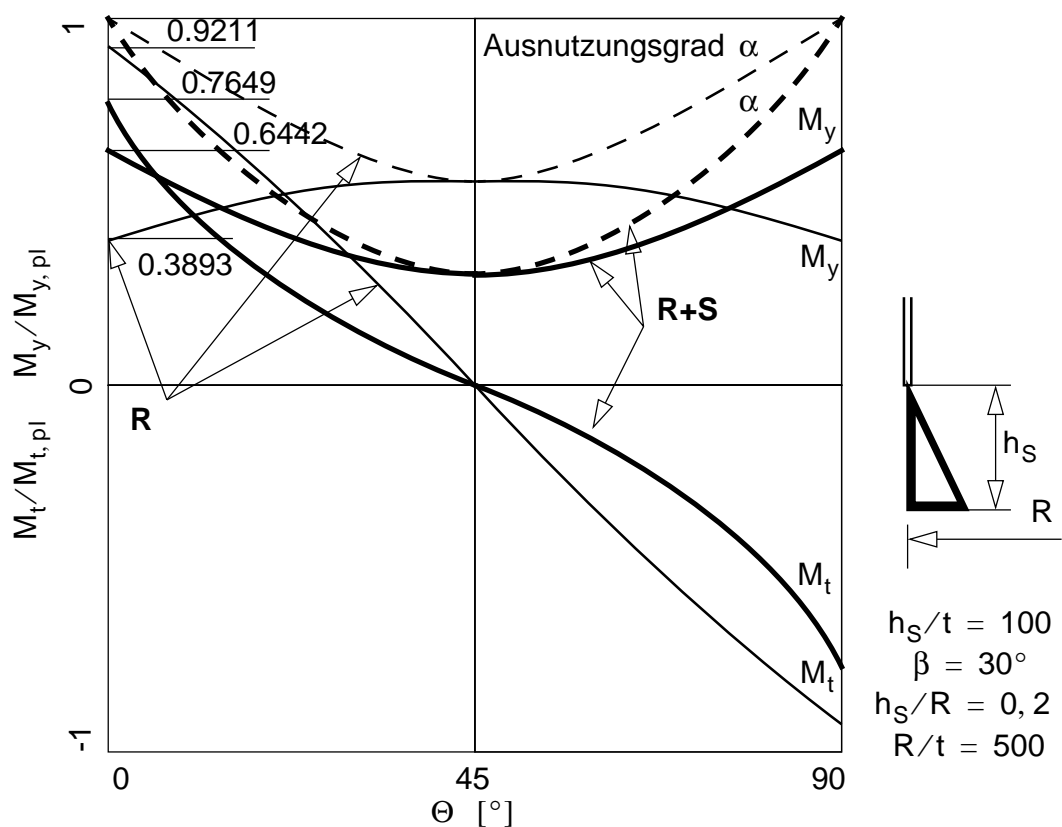


Bild 6-44 Schaft-Basisringträger-System — Torsions- und Biegemomente bzw. Querschnittsausnutzung bei Erreichen der Tragfähigkeit für Torsionsmomentenbelastung

6.3.5 Kombinierte Einzelradialkraft- und Einzeltorsionsmomentenbelastung

6.3.5.1 Lastsituation

Die Tragfähigkeit wird mit folgender kombinierter Radial- und Torsionsmomentenbelastung in Bild 6-45 untersucht. Die Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung entsteht im vorliegenden Fall durch die lokale Auflagerung des Trichters in Meridianrichtung (Bild 6-45).

Die plastische Tragfähigkeit des Ringträgers bzw. des Schaft-Basisringträger-Systems wird für folgende Kraftwirkungen untersucht:

- Einzeltorsionsmomente
- kombinierte Belastung durch Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente

Aus Gleichgewichtsgründen am Schottblech ergibt sich eine Belastung des Ringträgers durch Einzelradialkräfte H und Einzeltorsionsmomente M_T .

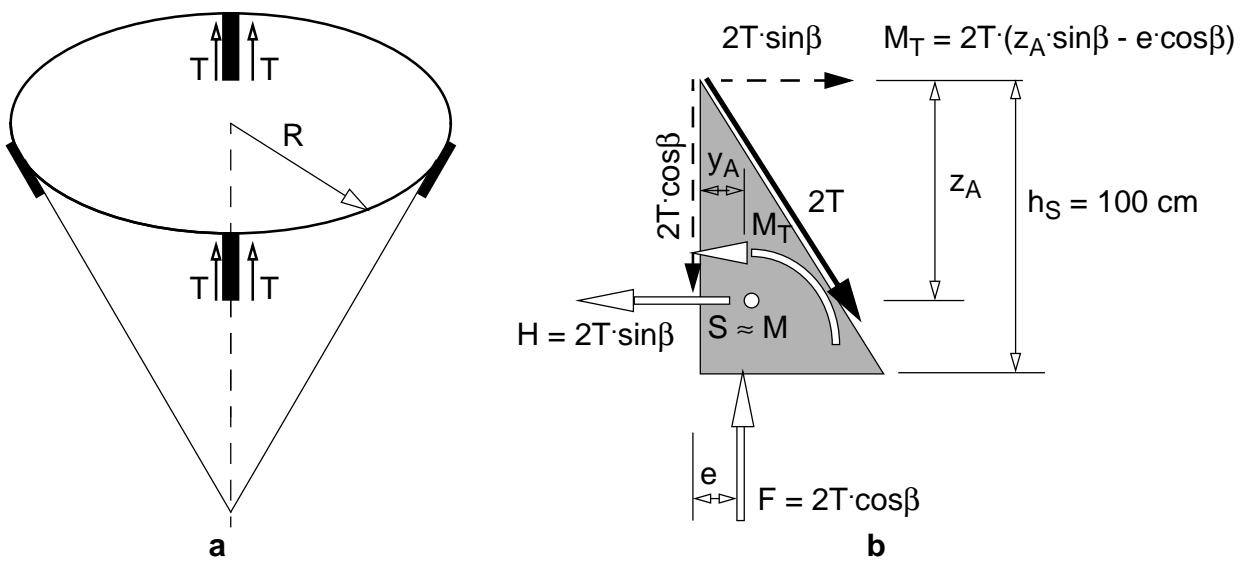


Bild 6-45 Gleichgewicht am Schottblech — **a.** Lagerkräfte T am Trichter und **b.** Haltekräfte am Schottblech — Torsionsmoment M_T und Radialkraft H

Die Vertikallagerung des Ringträgers wird als Grenzfall unter der Standzarge liegend angenommen ($e = 0$). Für das Anwendungsbeispiel ergibt sich folgende bezogene Lastausmitte e_H der kombinierten Einzelradialkraft- und Torsionsmomentenbelastung in Gl. (6-19).

$$e_H = z_A = M_T/H = 0,60h_S \tag{6-19}$$

6.3.5.2 Isolierter Basisringträger — System "R"

Zur Bestimmung der maximalen Tragfähigkeit kann eine plastischen Verteilung der Biegemomente M_z des isolierten Ringträgers zufolge Radialkraftbelastung im Sinne einer starrplastischen Betrachtung berücksichtigt werden. Die Bestimmung der Momentenverläufe im Zuge der linear-elastischen Spannungsberechnungen ergibt sich aus einer statisch unbestimmten Berechnung.

Im plastischen Grenzzustand bildet sich eine Fließgelenkkette mit $n \times 2$ Fließgelenken (n =Anzahl der Einzelradialkräfte) aus. In Bild 6-46.a bilden sich 8 Fließgelenke bei 4 angreifenden Einzelradialkräften aus. Aufgrund der Symmetriebedingungen können die weiteren Betrachtungen an einem 1/8-System angestellt werden. Der Momentenverlauf ergibt sich aus den Fließbedingungen (=plastische Querschnittsinteraktionen) in den maximal beanspruchten Querschnitten.

In den Fließgelenken in $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi/4$ stellen sich aufgrund des vorgegebenen (statisch bestimmten) Normalkraft- und Querkraftverlaufes (Bild 6-46.b) unterschiedliche Grenzmomente aufgrund der plastischen Normalkraft-Querkraft-Momenteninteraktion ein. In Bild 6-46.c ist dafür beispielhaft die Normalkraft-Momenteninteraktion eines Rechteckquerschnittes dargestellt.

Die Berücksichtigung des plastischen Grenzzustandes führt auf Gl. (6-20), die formelmässig auf den elastischen Schnittkraftverläufen aufbaut. Die plastischen Momentenverteilungen sind mit dem Differenzmoment ΔM_z berücksichtigt, die Formeln der Normal- und Querkraftverläufe sind unverändert.

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ \frac{M_z}{r} \end{bmatrix} = \frac{H}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cot \frac{\pi}{n} \cos \Theta + \sin \Theta \\ \cot \frac{\pi}{n} \sin \Theta - \cos \Theta \\ \cot \frac{\pi}{n} \cos \Theta + \sin \Theta - \frac{n}{\pi} + \Delta M_z \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

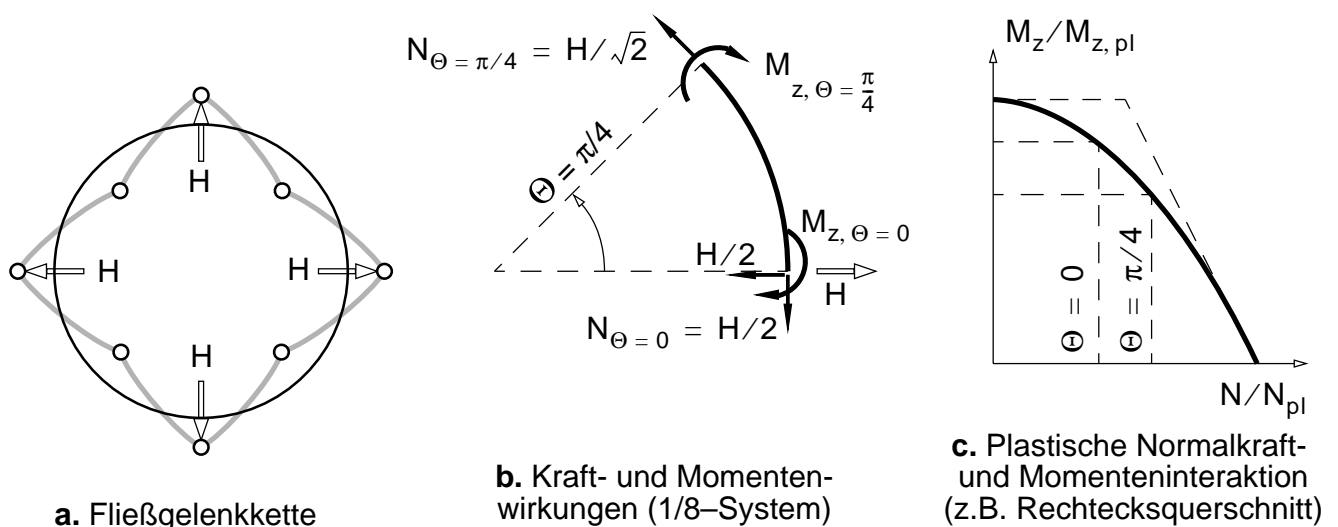


Bild 6-46 Kreisringträger mit Einzelradialkraftbelastung — plastischer Grenzzustand

Die Querschnittsausnutzung zufolge Normalkraft, Biege- und Torsionsmomenten wird entsprechend Gl. (6-21) berechnet. Die Schubbeanspruchungen zufolge der Querkraft Q_y werden nicht berücksichtigt.

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{|N|}{N_{pl}} + \frac{|M_y|}{M_{y,pl}} + \frac{|M_z|}{M_{z,pl}}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{M_{t,pl}}\right)^2} \tag{6-21}$$

Maßgebend sind wiederum die Auflagerpunkte (Ausnutzungsgrad $\alpha = 1$). In Bild 6-47 und Bild 6-48 sind die Verteilungen der Schnittkräfte bei Erreichen der Tragfähigkeit des Ringträgers ohne und mit Berücksichtigung der Momentenumlagerung dargestellt. Bei Berücksichtigung der plastischen Momentenumlagerung gleichen sich die Biegemomente M_z in den Auflagerbereich und im Mittenbereich nahezu aus, die ursprünglichen Momente der linear-elastischen Berechnung sind in den Auflagerpunkten fast doppelt so groß wie die Momente im Mittenbereich. Die Querschnittsausnutzung erreicht im Mittenbereich nahezu $\alpha = 1$.

Wird die Momentenumlagerung nicht berücksichtigt, so ergibt sich ein Torsionsmoment von $M_t = 0,4024M_{t,pl}$ an den Auflagerpunkten. Bei Berücksichtigung der Momentenumlagerung steigen die Auflagertorsionsmoment um 14% an, es ergibt sich ein Wert von $M_t = 0,4572M_{t,pl}$.

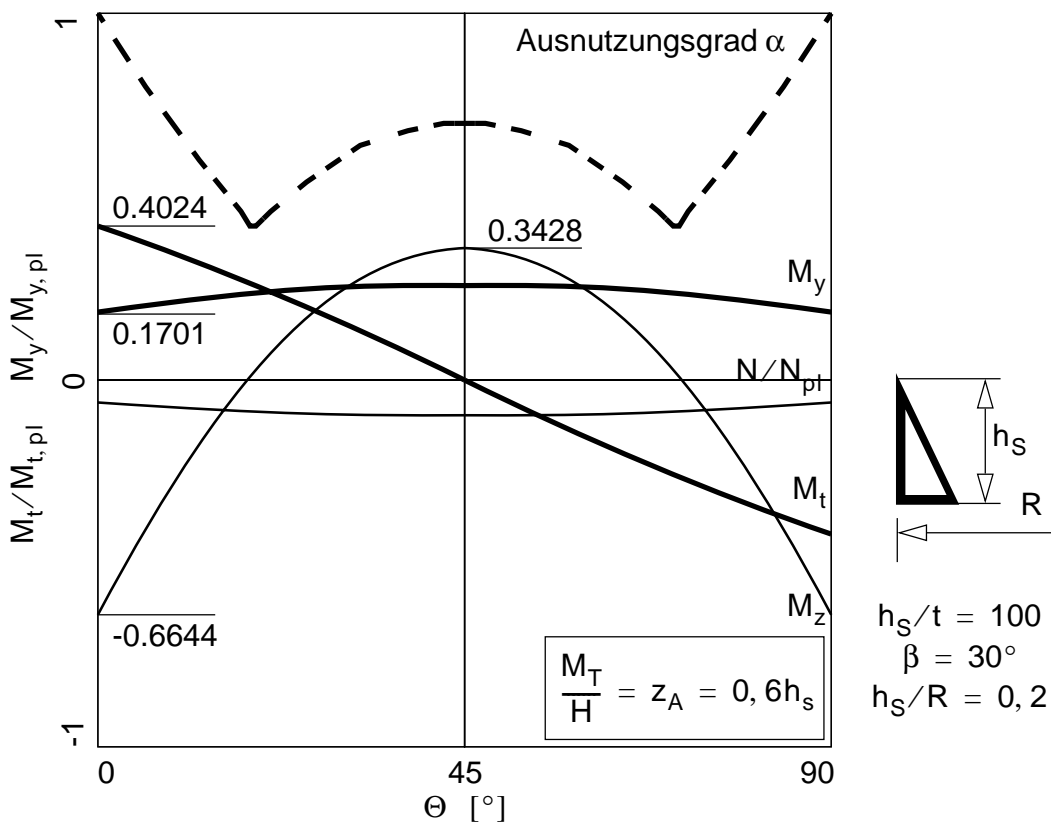


Bild 6-47 Isolierter Basisringträger — Schnittgrößen des isolierten Basisringträgers bei Erreichen der Tragfähigkeit für kombinierte Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

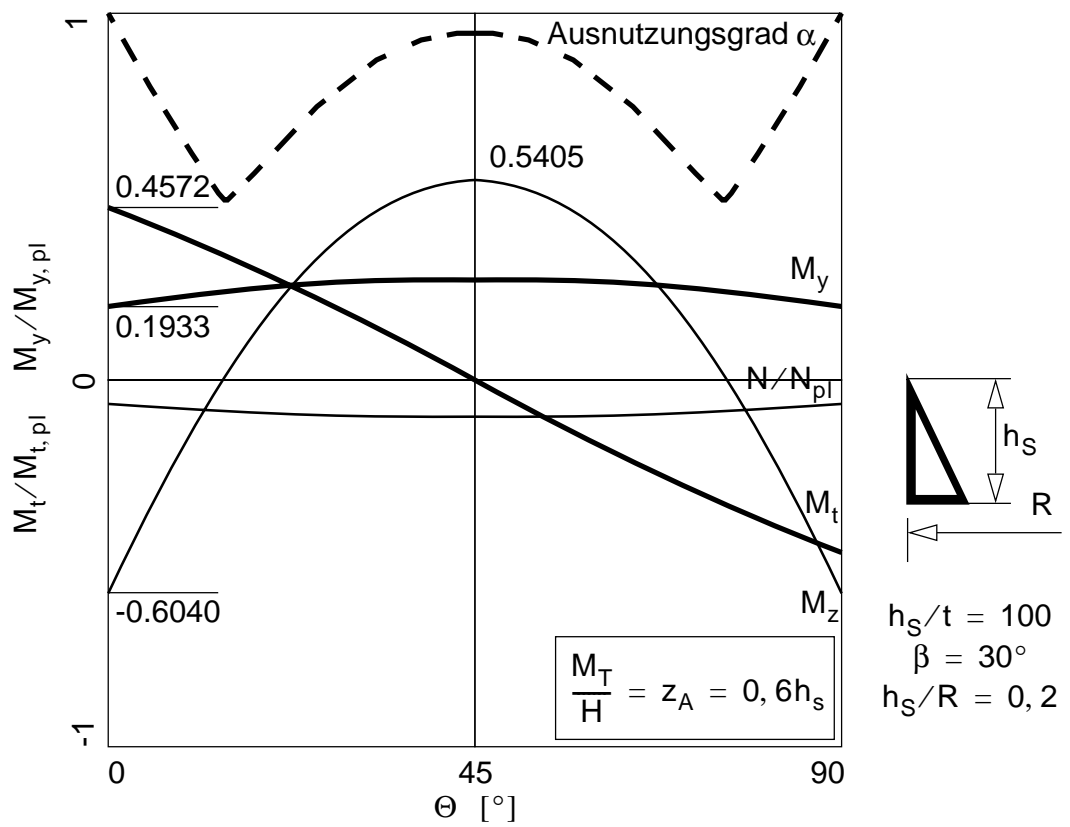


Bild 6-48 Isolierter Basisringträger — Schnittgrößen mit Momentenumlagerung bei Erreichen der Tragfähigkeit für kombinierte Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

6.3.5.3 Schaft-Basisringträger-System — System "R+S"

Bei den linear-elastischen Spannungsberechnungen erreichen das Biegemoment M_y und das Biegemoment M_z ihren Maximalwert in den Auflagerpunkten (siehe Kap. 6.2.3.2 und Kap. 6.2.4.2).

In Bild 6-49 sind die Momente und die Normalkräfte bei Erreichen der plastischen Tragfähigkeit in bezogener Form dargestellt. Die maximal beanspruchten Orte ($\alpha = 1$) sind, wie bereits erwähnt, die Auflagerquerschnitte.

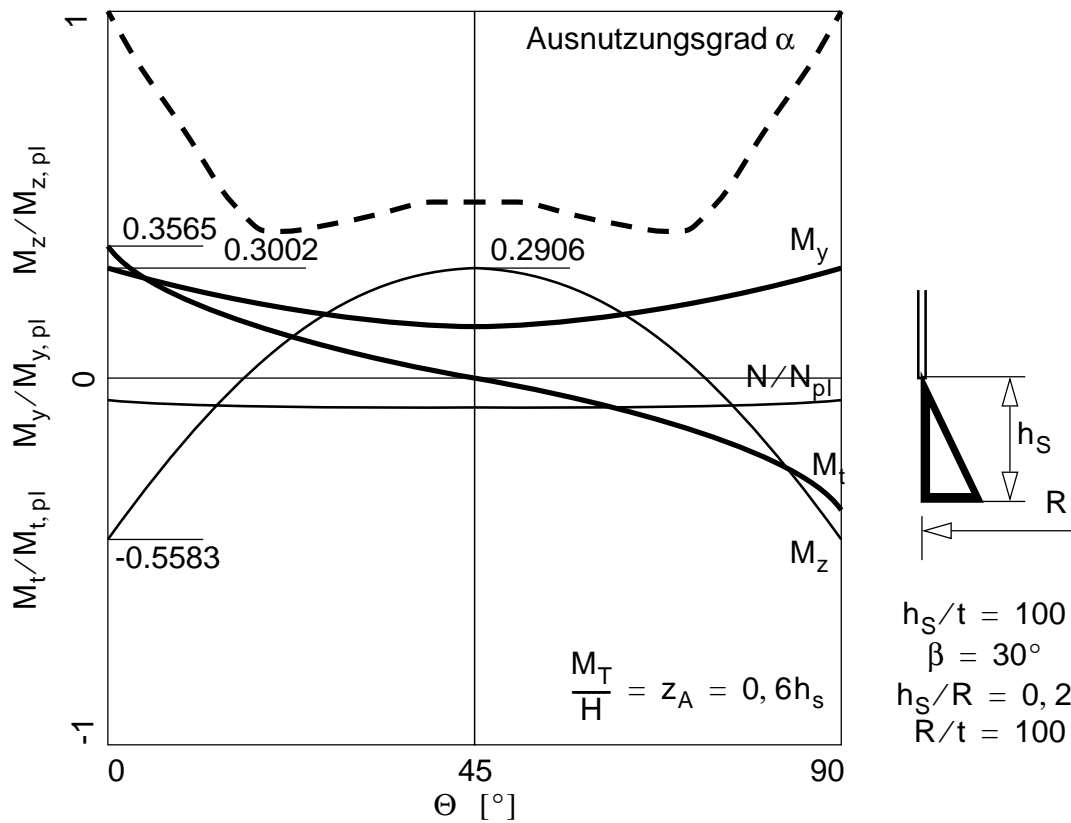


Bild 6-49 Schaft-Basisringträger-System — Schnittgrößen und Querschnittsausnutzung bei Erreichen der Tragfähigkeit für Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

Das Auflagertorsionsmoment erreicht 36% des plastischen Torsionsmomentes — $0,3565M_{t,pl}$ — damit wird die Tragfähigkeit des isolierten Ringträgers (ohne Berücksichtigung der Momentenumlagerung) um 11% verringert.

6.4 Materiell nichtlineare Berechnungen

Materiell nichtlineare FE-Berechnungen mit ABAQUS (1997) zur Bestimmung der plastischen Grenztragfähigkeit werden für den isolierten Ringträger, das vollständige Schalenmodell und das Schaft-System durchgeführt, und zwar für:

- Vertikalbelastung
- kombinierte Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

Der Ringträger wird dabei als Schalentragswerk (Verwendung von FE-Schalenelementen) modelliert.

Alternativ dazu wird eine

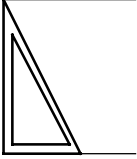
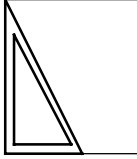
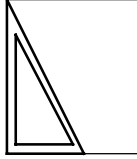
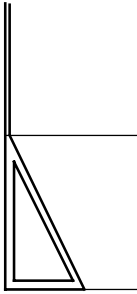
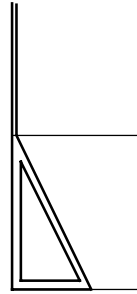
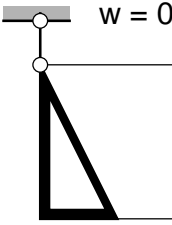
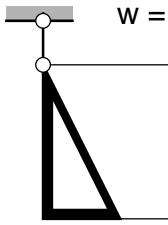
- analytische, starrplastische Berechnung des Basisringträgers bei kombinierter Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung durchgeführt.

Die Berechnungen werden für das ideal-elastoplastische Standardmaterialverhalten — entsprechend den Parametern von Baustahl St 37 — durchgeführt ($E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ und $f_y = 24,0 \text{ kN/cm}^2$).

Die Berechnung der plastischen Tragfähigkeit am Schaft-Basisringträger-System bei Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung erfolgt zusätzlich zu den materiell nichtlineare FE-Berechnungen durch starrplastische Berechnungen. Dabei wird der Schaft, wie schon zum Teil bei den linear-elastischen Spannungsberechnungen, als vertikal unverschiebliche Randbedingung des Ringträgers idealisiert berücksichtigt. Für den isolierten Ringträger werden bei Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung nur materiell nichtlineare FE-Berechnungen durchgeführt. Die berechneten Tragfähigkeiten — signifikant sind die Werte der Auflagertorsionsmomente im plastischen Traglastzustand — werden mit den auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) bestimmten Tragfähigkeiten verglichen.

Ein Überblick wird hinsichtlich der durchgeführten Berechnungen in Tab. 6-4 gegeben. Tab. 6-4 hat den selben Aufbau wie Tab. 6-3 (Überblick über die durchgeführten linear-elastischen Spannungsberechnungen). Es ist ersichtlich, daß im Zuge der materiell nichtlinearen Berechnungen wesentlich weniger Lastfälle und Systeme untersucht werden, das Hauptaugenmerk liegt auf dem durch Einzeltorsionsmomente und Einzelradialkräfte belasteten integrierten Basisringträger.

Tab. 6-4 Untersuchte Tragsysteme der materiell nichtlinearen Berechnungen

Tragsystem		Materiell nichtlineare Berechnungen		
		Vertikalbelastung	Einzeltorsionsmomente	Einzelradialkräfte
Isolierter Ringträger	R			
Isolierter Ringträger	Rs			
Schaft-Ringträger-System	R + S			
vollständiges Schalenmodell	Rs + S			
Ringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung	R w0 R* w0			
Schaft-System	S			

6.4.1 Vertikalbelastung

Die Berechnungen werden am isolierten Basisringträger am vollständigen Schalenmodell (Schaft und dreieckförmiger Hohlkastenträger modelliert als Schalenträgerwerk) und am Schaftsystem durchgeführt.

6.4.1.1 Isolierter Basisringträger — System "Rs"

Materiell nichtlineare FE-Berechnungen werden am isolierten Basisringträger durchgeführt. Dabei wird der Basisringträger als Schalenträgerwerk modelliert.

Die Tragfähigkeit ist mit jener der spannungsbasierten Berechnung ident.

Für variable Standzargenhöhen h_S werden die Tragfähigkeiten in Kap. 6.5.1 gegenübergestellt.

6.4.1.2 Vollständiges Schalenmodell — System "Rs+S"

Die plastische Tragfähigkeit des vollständigen Schalenmodells ist dominiert von der lokalen Auflagerkrafteinleitung im Ringträgerbereich. Ein Versagen als Ringträger durch die Beanspruchungen zufolge Biege- und Torsionsmomenten bzw. Querkräften tritt nicht auf.

Die plastische Grenztragfähigkeit des Auflagerkrafteinleitungsbereiches wird in Kap. 7 untersucht.

6.4.2 Einzeltorsionsmomentenbelastung

Es werden folgende Berechnungen zur Bestimmung der Tragfähigkeit durchgeführt:

- Materiell nichtlineare FE-Berechnung des als Schalentragswerk modellierten Basisringträgers
- Materiell nichtlineare FE-Berechnung des vollständigen Schalenmodelles
- Analytische, starrplastische Berechnung des isolierten Basisringträgers mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung

6.4.2.1 Isolierter Basisringträger — System "Rs"

Die Tragfähigkeit des isolierten Basisringträgers — der Basisringträger wird mit Schalenelementen modelliert und die Implementierung des Schottbleches erfolgt mithilfe von Zwangsbedingungen in der materiell nichtlinearen FE-Berechnung — erreicht folgenden Wert, der durch das, auf das plastische Torsionswiderstandsmoment $M_{t,pl}$ bezogene, aufnehmbare Einzeltorsionsmoment definiert ist:

$$M_T / 2M_{t,pl} = 0,921$$

6.4.2.2 Vollständiges Schalenmodell — System "Rs+S"

Die Momente der materiell nichtlinearen FE-Berechnung in Bild 6-50, der Basisringträger wird dabei mit Schalenelementen modelliert, werden aus den Spannungsverteilungen rückgerechnet. Im Mittenbereich zwischen den Auflagern wird das Torsionsmoment aufgrund der Symmetriebedingungen zu Null, das Biegemoment M_y erreicht dort seinen Maximalwert (Bild 6-50). Durch das zu den Lagerpunkten hin zunehmende Torsionsmoment, nimmt das Biegemoment stetig ab. In den Auflagerpunkten kann das Torsionsmoment durch Interaktionseffekte bedingt nicht das volle plastische Torsionswiderstandsmoment $M_{t,pl}$ erreichen.

Es sind bereits die Ergebnisse einer analytischen starrplastischen Berechnung dargestellt (siehe Kap. 6.4.2.3). Dabei wird der Schaft als vertikal unverschiebliche Randbedingung (System R w0) des isolierten Ringträgers idealisiert. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der FE-Berechnungsergebnisse mit der starrplastischen Lösung. Die materiell nichtlineare FE-Vergleichsberechnung liefert eine idente plastische Grenztragfähigkeit (identen Auflagertorsionsmoment). Die Verteilung der integralen Spannungsgrößen M_y und M_t des Basisringträgers sind in Bild 6-50 dargestellt.

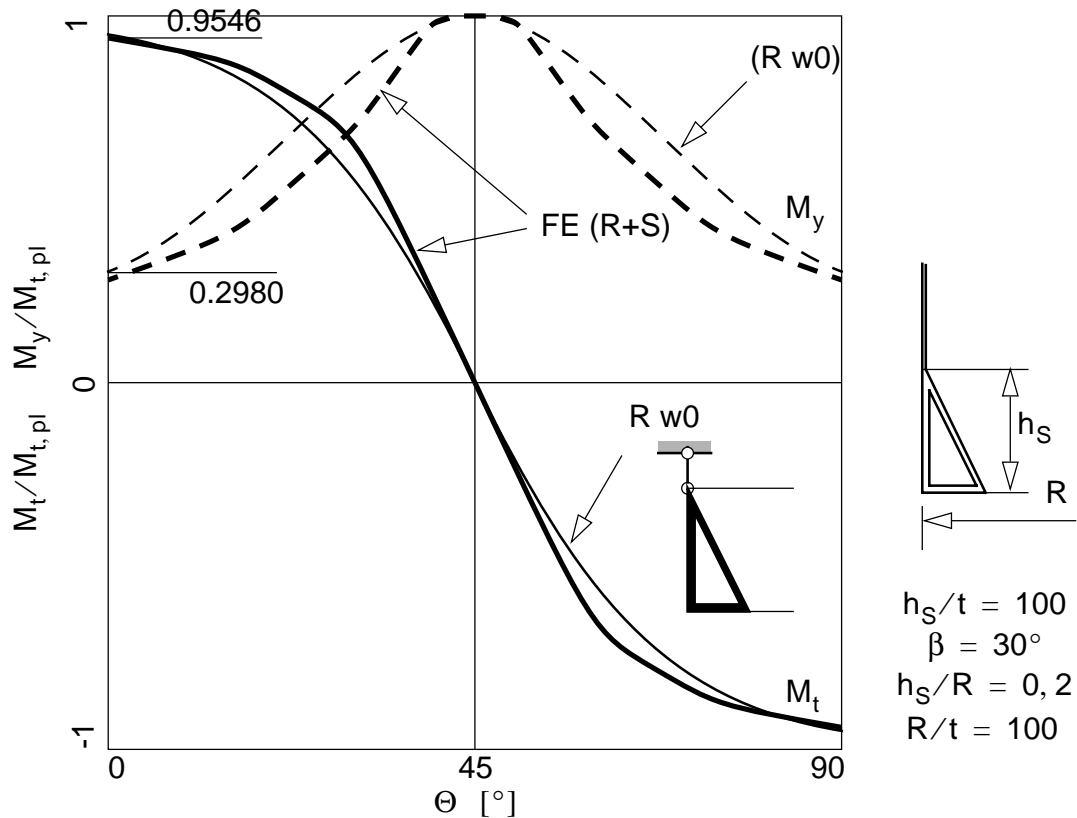


Bild 6-50 Vollständiges Schalenmodell — Vergleich der Torsionsmomente M_t und der Biegemomente M_y der starrplastischen Berechnung als Ringträgerstab und der materiell nichtlinearen FE-Berechnungen bei Einzeltorsionsmomentenbelastung

6.4.2.3 Isolierter Basisringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung (System "R w0") — starrplastische Berechnung

Die starrplastische Lösung erfolgt durch die idealisierte Berücksichtigung des Schaftes als Randbedingung $w = 0$ in Vertikalrichtung. Weiters wird davon ausgegangen, daß in jedem Punkt die plastische Tragfähigkeit des Basisringträgers zur Gänze ausgenutzt wird ($\alpha = 1$), es wird somit die maximale plastische Systemtragfähigkeit bestimmt. Aufgrund der ausgeglichenen Anzahl von Systemunbekannten entsprechend Tab. 6-5 und den zugrundeliegenden Grundgleichungen kann eine analytische Lösung erfolgen.

In Kap. 6.2.3.3 wurden bereits linear-elastische Spannungsberechnungen für den isolierten Basisringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung angestellt. Dabei kommt es zu nennenswerten Umverteilungen der Biegemomente M_y gegenüber jenen des isolierten Ringträgers (System R). Die Momentenverteilungen und die abgeschätzte Tragfähigkeit werden mit den Momentenverteilungen der starrplastischen Berechnung verglichen.

Gleichungsbilanz

Die mechanische Problembeschreibung erfolgt durch kinematische Gleichungen, Fließregeln, Gleichgewichtsgleichungen und der Fließbedingung. Die Bilanz der Gleichungen und Unbekannten ist in Tab. 6-5 dargestellt, es liegen somit für 7 Unbekannte 7 Bestimmungsgleichungen vor.

Zur Lösung liegen aufgrund der Systemsymmetrie in $\Theta = \pi/n$ 4 Anfangsbedingungen für die Momente M_t und M_y bzw. die Torsionsverdrehungen zur Verfügung. Das Torsionsmoment M_t ist gleich Null und das Biegemoment erreicht, da im gesamten Lösungsbereich das Erreichen des plastischen Querschnittstragfähigkeit ($\alpha = 1$) vorausgesetzt wird, das plastische Tragmoment $M_{y,pl}$ in Gl. (6-22a). Für den Zuwachs der Torsionsverdrehung und der Torsionsverdrillung sind die Anfangsbedingungen entsprechend der Symmetriebedingungen in Gl. (6-22b) gegeben. Die Torsionsverdrehung wird dabei mit dem "beliebigen" Startwert $\dot{\phi} = 1$ gewählt, die Verdrillung ist aufgrund der Symmetriebedingungen gleich Null.

$$\begin{aligned} M_t (\pi/n) &= 0 \\ M_y (\pi/n) &= M_{y,pl} \end{aligned} \tag{6-22a}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} \dot{\phi} &= 0 \end{aligned} \tag{6-22b}$$

Tab. 6-5 Gleichungsbilanz der starrplastischen Berechnung

Gleichungen		Unbekannte		
Art	Anzahl	Art		Anzahl
assoziierte Fließregel	2	plastische Verzerrungszuwächse	$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\kappa}_y \end{bmatrix}_{pl}$	2
kinematische Gleichungen	2	Torsionsverdrehung	$\dot{\phi}$	2
Fließbedingung	1	Lagrange Multiplikator	$\dot{\lambda}$	1
Gleichgewichtsgleichungen	2	Momente	$\begin{bmatrix} M_t \\ M_y \end{bmatrix}$	2
		Kontaktkräfte	q_z	1
Summe	7	—	—	7

Grundgleichungen

Die kinematischen Gleichungen, die Fließregel entsprechend dem assoziierten Fließgesetz, die Fließbedingung und die Gleichgewichtsgleichungen sind in Gl. (6-23a) bis Gl. (6-23d) dargestellt.

$$\dot{\mathbf{e}}_{pl} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\kappa}_y \end{bmatrix}_{pl} = \begin{bmatrix} ()_{,\Theta} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\phi} \tag{6-23a}$$

$$\begin{aligned}\dot{\kappa}_{y,pl} &= -\dot{\varphi} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_y} \\ \dot{\vartheta}_{pl} &= \frac{\partial}{\partial \Theta} \dot{\varphi} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_t}\end{aligned}\quad (6-23b)$$

$$F = \left(\frac{M_y}{M_{y,pl}}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{M_{t,pl}}\right)^2 - 1 = 0 \quad (6-23c)$$

$$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -(\cdot)'_{\Theta} & (\cdot)'_{\Theta\Theta} \\ (\cdot)'_{\Theta} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_t/r \\ M_y/r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6-23d)$$

Sequentielle Lösung

Die Lösung erfolgt sequentiell. Die Gleichgewichtsgleichungen können direkt nach Implementierung der Fließbedingung für das Torsionsmoment M_t durch Vorwärtsintegration (Runge-Kuta-Verfahren) von $\Theta = \pi/n$ beginnend mit den vorgegebenen Anfangswerten gelöst werden. Das Biegemoment M_y und die Kontaktkräfte q_z werden rückgerechnet.

$$\frac{M_{t,r\Theta}}{M_{t,pl}} \cdot \frac{M_{t,pl}}{M_{y,pl}} + \sqrt{1 - \left(\frac{M_t}{M_{t,pl}}\right)^2} = 0 \quad (6-23e)$$

$$M_y = -M_{t,r\Theta} \quad (6-24a)$$

$$q_z = -\frac{M_y + M_{y,r\Theta\Theta}}{r^2} \quad (6-24b)$$

Die plastischen Torsionsverdrehungen des plastischen kinematischen Mechanismus ergeben sich aus den berechneten plastischen Momentenverteilungen, der assoziierten Fließregel und den kinematischen Gleichungen in Gl. (6-25).

$$\varphi - \frac{M_{y,pl}}{M_{t,pl}} \frac{M_t}{M_y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = 0 \quad (6-25)$$

Anwendungsbeispiel

In Bild 6-51 ist die Verteilung der Momente bei Erreichen der plastischen Tragfähigkeit dargestellt. Das Biegemoment erreicht aufgrund der Annahmen in $\Theta = 45^\circ$ seinen Größtwert und nimmt zum Auflager hin stetig ab. Das Torsionsmoment erreicht aufgrund der Interaktion mit dem Biegemoment im Auflager 95% des plastischen Widerstandsmomentes ($M_t = 0,9546 M_{t,pl}$). Der isolierte Ringträger erreicht im Vergleich ein Auflagertorsionsmoment von $0,9211 M_{t,pl}$.

Die vertikal unverschiebliche Schaftanbindung, die einem axial dehnstarrten Schaft entspricht, liefert also bei vorliegendem Anwendungsbeispiel eine Erhöhung der Tragfähigkeit um 4%.

Gegenüber den linear-elastischen Spannungsberechnungen zeigen die Biegemomente eine gänzlich konträren Verlauf, das Maximum liegt nun im Mittenmeridian ($\Theta = \pi/4 = 45^\circ$).

Die Kontaktkräfte werden aus den Biegemomenten M_y rückgerechnet, dabei wird M_y mittels einer kubischen Funktion für den Bereich $0 \leq \Theta \leq \pi/4$ in Gl. (6-26a) genähert. Die nach innen wirkenden Einzeltorsionsmomente bewirken nach oben gerichtete, negative Kontaktkräfte im Auflagerbereich und positiv nach unten gerichtete vertikale Kontaktkräfte im Mittenmeridian ($\Theta = \pi/4$).

$$M_y = M_{y,pl} \cdot \left[0,3 + 0,3 \left(\frac{\Theta}{\pi/n} \right) + 1,3 \left(\frac{\Theta}{\pi/n} \right)^2 - 0,9 \left(\frac{\Theta}{\pi/n} \right)^3 \right] \tag{6-26a}$$

$$q_z = -\frac{M_y + M_{y'\Theta\Theta}}{r^2} = -\frac{M_{y,pl}}{r^2} \cdot \left[2,9 - 5,1 \left(\frac{\Theta}{\pi/n} \right) + 1,3 \left(\frac{\Theta}{\pi/n} \right)^2 - 0,9 \left(\frac{\Theta}{\pi/n} \right)^3 \right] \tag{6-26b}$$

Die Maximalwerte bzw. Minimalwerte der Kontaktkräfte in Gl. (6-27a) bzw. Gl. (6-27b) sind wesentlich geringer als das Produkt von Fließgrenze und Einheitsdicke $t = 1$.

$$q_{z, \Theta=0} = -0,091 \cdot f_y \cdot 1 \tag{6-27a}$$

$$q_{z, \Theta=90} = 0,057 \cdot f_y \cdot 1 \tag{6-27b}$$

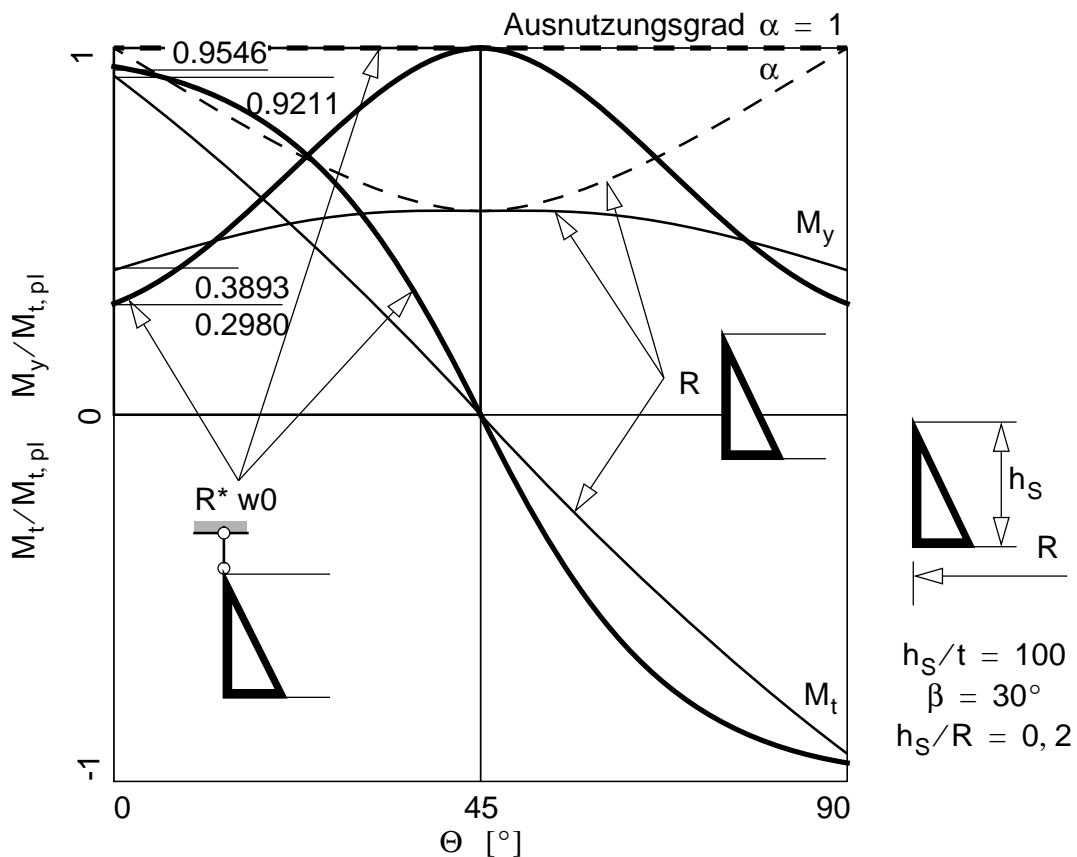


Bild 6-51 Isolierter Basisringträger bei vertikal unverschieblicher Schaftanbindung — Verteilung der Torsions- und Biegemomente bei starrplastischer Berechnung und Vergleich mit den Momenten des isolierten Basisringträgers

In Bild 6-52 sind zu Vergleichzwecken nochmals die Torsions- und Biegemomente der starrplastischen Berechnungen des Basisringträgers mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung dargestellt. Der Vergleich erfolgt mit den Schnittkräften, die sich auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen für den querschubstarrten Basisringträger (System “R* w0”) in Kap. 6.2.3.3 einstellen.

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen zeigen konträre Momentenverteilungen gegenüber den starrplastischen Berechnungen. Dies bezieht sich vor allem auf das Biegemoment M_y , das sein Maximum in den Auflagermeridianen erreicht und in den Mittenmeridianen einen wesentlich kleineren Wert erreicht. Der Torsionsmomentenverlauf zeigt aber ebenfalls Abweichungen. Die Querschnittsausnutzung wird nur in den Auflagerlinien voll erreicht ($\alpha = 1$) und nimmt bis zu den Mittellinien hin stetig ab.

Der Vergleich der Tragfähigkeiten zeigt, daß gegenüber dem plastischen Torsionsgrenzmoment von $M_t/M_{t,pl} = 0,9546$ der starrplastischen Berechnung, bei der plastische Systemwirkungen berücksichtigt werden, nur mehr ein Torsionsmoment von $M_t/M_{t,pl} = 0,6735$ erreicht wird.

Die Tragfähigkeit des Schaft-Basisringträger-System (System “R + S“ siehe Kap. 6.3.4.2), die auf Basis linear elastischer Spannungsberechnungen bestimmt wird, erreicht einen Wert von $M_t/M_{t,pl} = 0,7649$. Der Tragfähigkeitsanstieg gegenüber dem isolierten Basisringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung begründet sich auf den in den Auflagermeridianen um ca. 30% geringeren aber nach wie vor bemessungsrelevanten Biegemomenten.

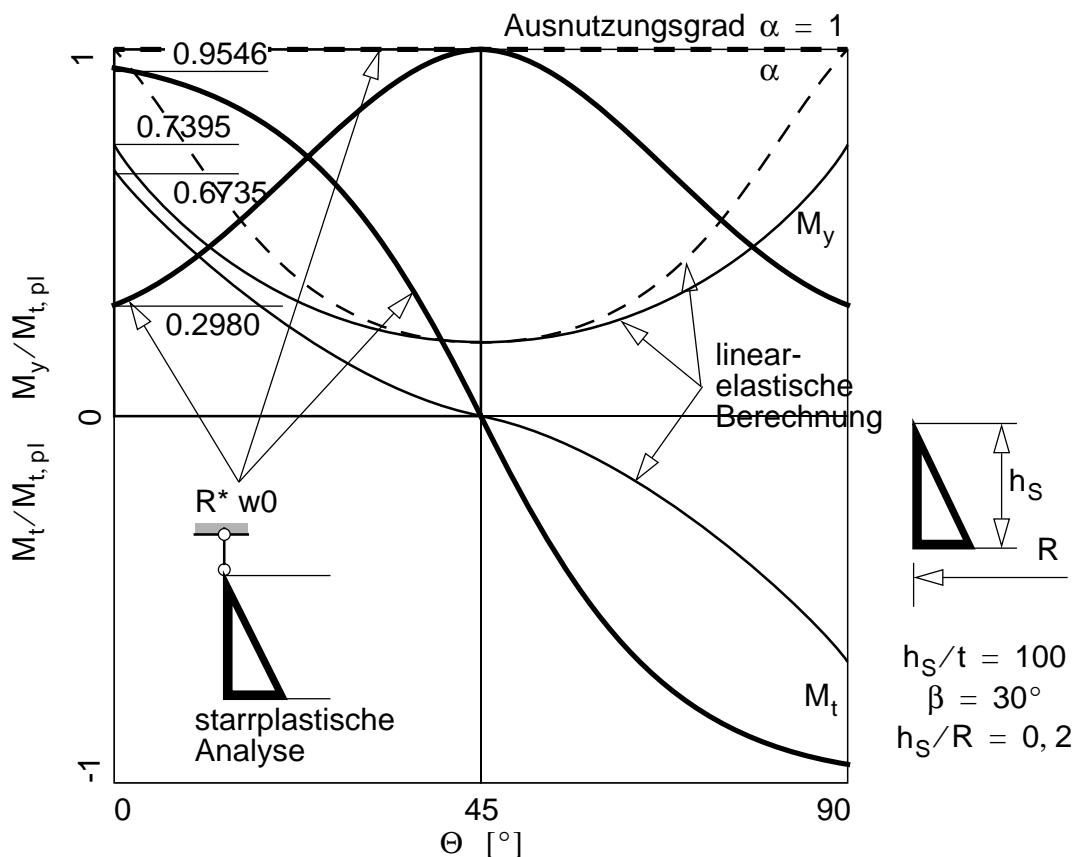


Bild 6-52 Isolierter Basisringträger bei vertikal unverschieblicher Schaftanbindung — Verteilung der Torsions- und Biegemomente bei analytischer, starrplastischer Berechnung bzw. Vergleich mit den Torsions- und Biegemomenten auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen.

6.4.3 Kombinierte Einzelradialkraft- und Einzeltorsionsmomentenbelastung

Es wird wiederum eine analytische starrplastische Berechnung des isolierten Basisringträgers mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung und eine materiell nichtlineare FE-Berechnung des vollständigen Schalenmodelles vorgenommen.

Für das Anwendungsbeispiel entsprechend Kap. 6.3.5 folgt die bezogene Lastausmitte e_H der kombinierten Einzelradialkraft- und Torsionsmomentenbelastung aus der Trichterlagerkraft:

$$e_H = z_A = M_T/H = 0,60h_S \quad (6-28)$$

6.4.3.1 Isolierter Basisringträger

Die Tragfähigkeit des isolierten Ringträgers — der Ringträger wird mit Schalenelementen modelliert und die Wiedergabe des Schottbleches erfolgt mithilfe von Zwangsbedingungen in der materiell nichtlinearen FE-Berechnung — erreicht folgende auf das plastische Torsionswiderstandsmoment bezogenen Wert:

$$M_T/2M_{t,pl} = 0,472$$

6.4.3.2 Vollständiges Schalenmodell

In Bild 6-53 und Bild 6-54 erfolgt der Vergleich der Normalkräfte bzw. Momente der starrplastischen Ringträgerberechnung (Kap. 6.4.3.3) mit jenen der materiell nichtlinearen FE-Berechnung.

Die materiell nichtlineare Berechnung liefert folgendes Auflagertorsionsmoment von $0,5585M_{t,pl}$.

Die aus den Spannungsverteilungen rückgerechneten Normalkräfte N und Biegemomente M_z in Bild 6-53 zeigen an den Stellen ihrer Maximalwerte, also im Mittenbereich bzw. an den Auflagern, eine annähernd gute Übereinstimmung mit den Schnittkräften der starrplastischen Berechnung des isolierten Basisringträgers mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung (System "R w0"). Die Unterschiede ergeben sich durch die Mitwirkung des Schaftes bei den FE-Berechnungen, bei den starrplastischen Berechnungen werden die Radialkräfte vom Ringträger alleine abgetragen.

Die rückgerechneten Torsionsmomente M_t in Bild 6-54 zeigen qualitativ eine gute Übereinstimmung mit jenen der starrplastischen Berechnung, die rückgerechneten Biegemomente weisen einen gänzlich anderen Verlauf auf. Dies begründet sich auch auf der wesentlich günstigeren Querschnittsausnutzung zufolge der Biegemomente M_z .

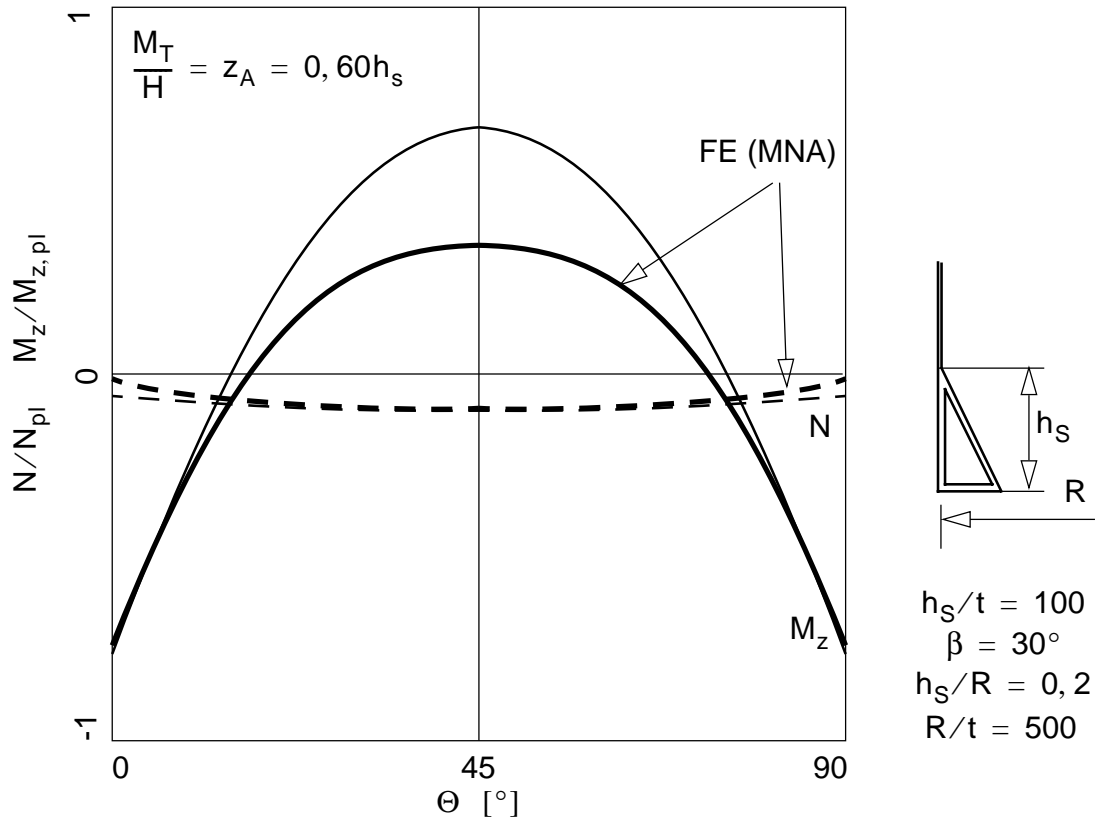


Bild 6-53 Vergleich der Normalkräfte N und der Biegemomente M_z der starrplastischen Ringträgerberechnung und der MNA-Berechnungen bei Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

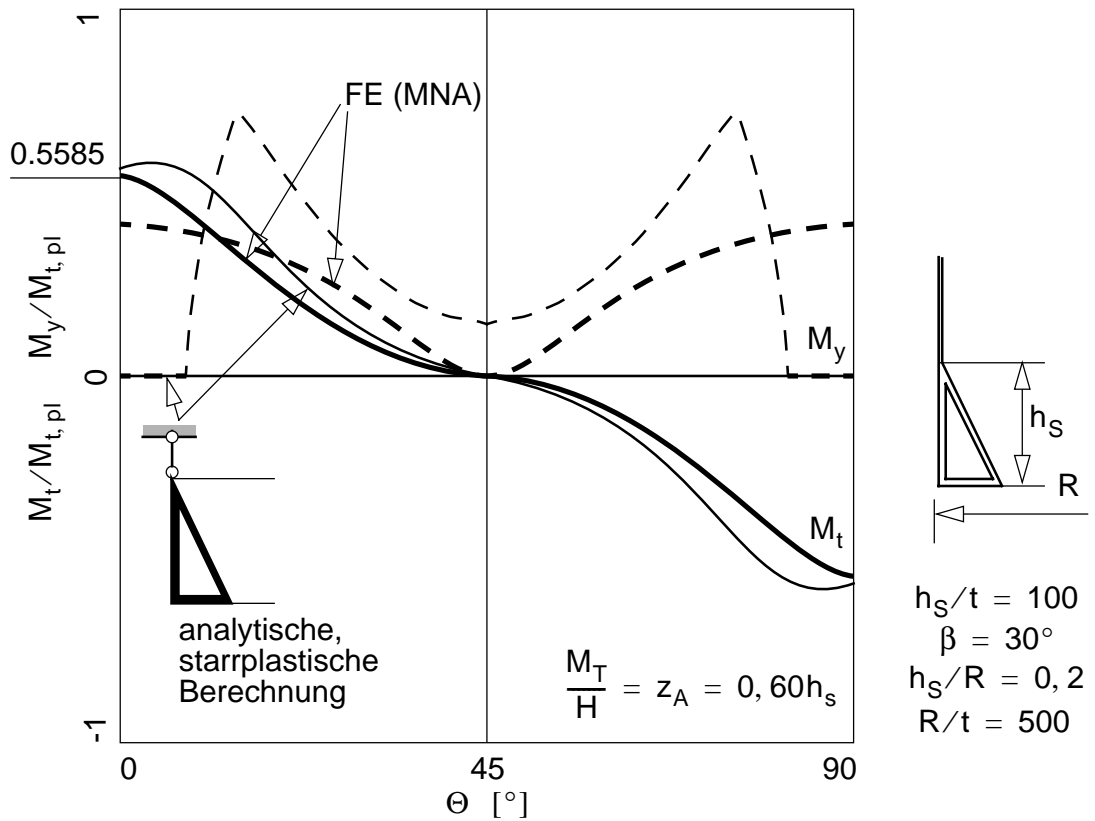


Bild 6-54 Vergleich der Torsionsmomente M_t und der Biegemomente M_y der starrplastischen Ringträgerberechnung und der MNA-Berechnungen bei Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

6.4.3.3 Isolierter Basisringträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung — Analytische starrplastische Berechnung

Der Schaft wird wiederum als Randbedingung $w = 0$ in Vertikalrichtung idealisiert. Die Radialkräfte werden vom Basisringträger alleine abgetragen. Dies Annahme rechtfertigt sich durch die Ergebnisse der linearen Berechnungen in Kap. 6.2.4.2, es zeigt sich kein nennenswerter Unterschied der Schnittkräfte für den isolierten Ringträger bzw. für das Schaft-Basisringträger-System. Zur Berechnung der plastischen Tragfähigkeit wird die plastische Systemwirkung wie in Kap. 6.3.5 erörtert, die sich in Form des Biegemomentes ΔM_z in Gl. (6-29) äußert, berücksichtigt.

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ \frac{M_z}{r} \end{bmatrix} = \frac{H}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cot \frac{\pi}{n} \cos \Theta + \sin \Theta \\ \cot \frac{\pi}{n} \sin \Theta - \cos \Theta \\ \cot \frac{\pi}{n} \cos \Theta + \sin \Theta - \frac{n}{\pi} + \Delta M_z \end{bmatrix} \quad (6-29)$$

Die Normalkraft N und das Biegemoment M_z bewirken eine Verringerung der Querschnittstragfähigkeit. Zur Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit steht die verbleibende Querschnittstragfähigkeit $1 - \alpha_{\text{radial}}$ zur Abtragung der Einzeltorsionsmomente in Gl. (6-30a) zur Verfügung, dabei wird die plastische Umlagerung des Momentes M_z berücksichtigt.

$$\alpha_{\text{radial}} = \frac{|N|}{N_{\text{pl}}} + \frac{|M_z|}{M_{z,\text{pl}}} \quad (6-30a)$$

$$\frac{M_{t,\Theta}}{M_{t,\text{pl}}} \cdot \frac{M_{t,\text{pl}}}{M_{y,\text{pl}}} + \sqrt{(1 - \alpha_{\text{radial}})^2 - \left(\frac{M_t}{M_{t,\text{pl}}}\right)^2} = 0 \quad (6-30b)$$

In Bild 6-55 ist die Verteilung des Biegemomentes M_z und der Normalkraft N und die verbleibende Querschnittstragfähigkeit dargestellt. Der Startwert der starrplastischen Berechnung des Biegemomentes M_y in $\Theta = 45^\circ$ ist $1 - \alpha_{\text{radial}} = 0,1515$. Die größte verbleibende Querschnittstragfähigkeit für die restlichen Schnittgrößen ergibt sich im Bereich des Momentennullpunktes von M_z .

In Bild 6-56 ist die Verteilung der Torsions- und Biegemomente dargestellt. Zu Vergleichszwecken sind die Torsions- und Biegemomente für die Belastung durch Torsionsmomente dargestellt. Durch die Ausnutzung der Querschnittstragfähigkeit zufolge der Biegemomente M_z werden die Momente M_y im mittelbaren Auflagerbereich zu Null.

Das Auflagertorsionsmoment erreicht einen Wert von $0,5633M_{t,\text{pl}}$.

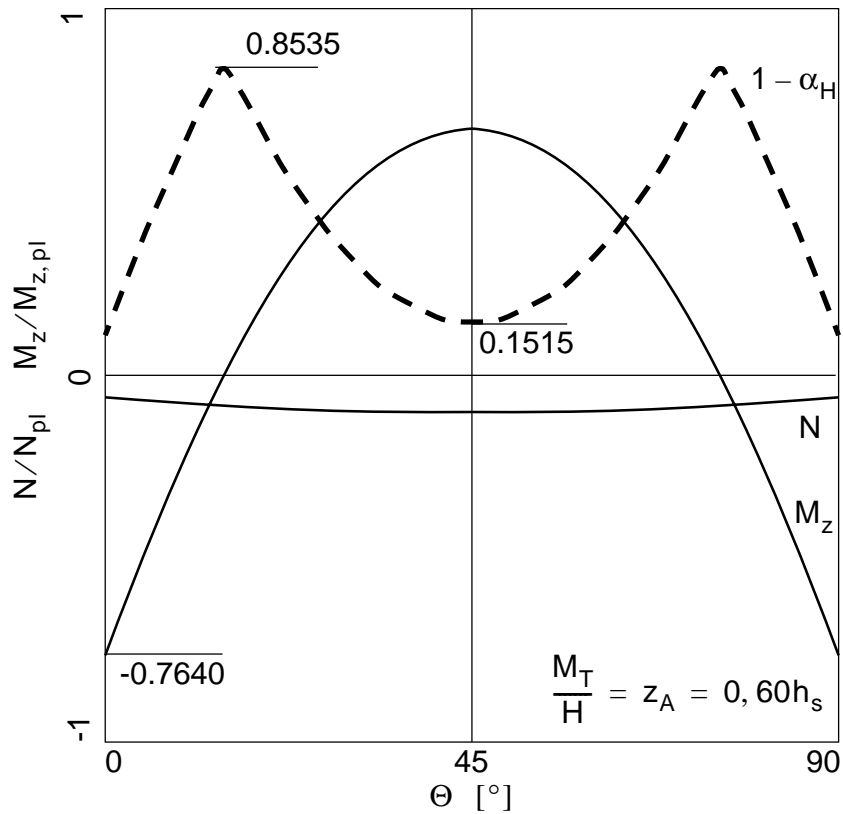


Bild 6-55 Isolierter Basisingträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung — Verteilung der Normalkräfte N und der Biegemomente M_z in bezogener Form und verbleibende Tragfähigkeit $1 - \alpha_{\text{radial}}$ für Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

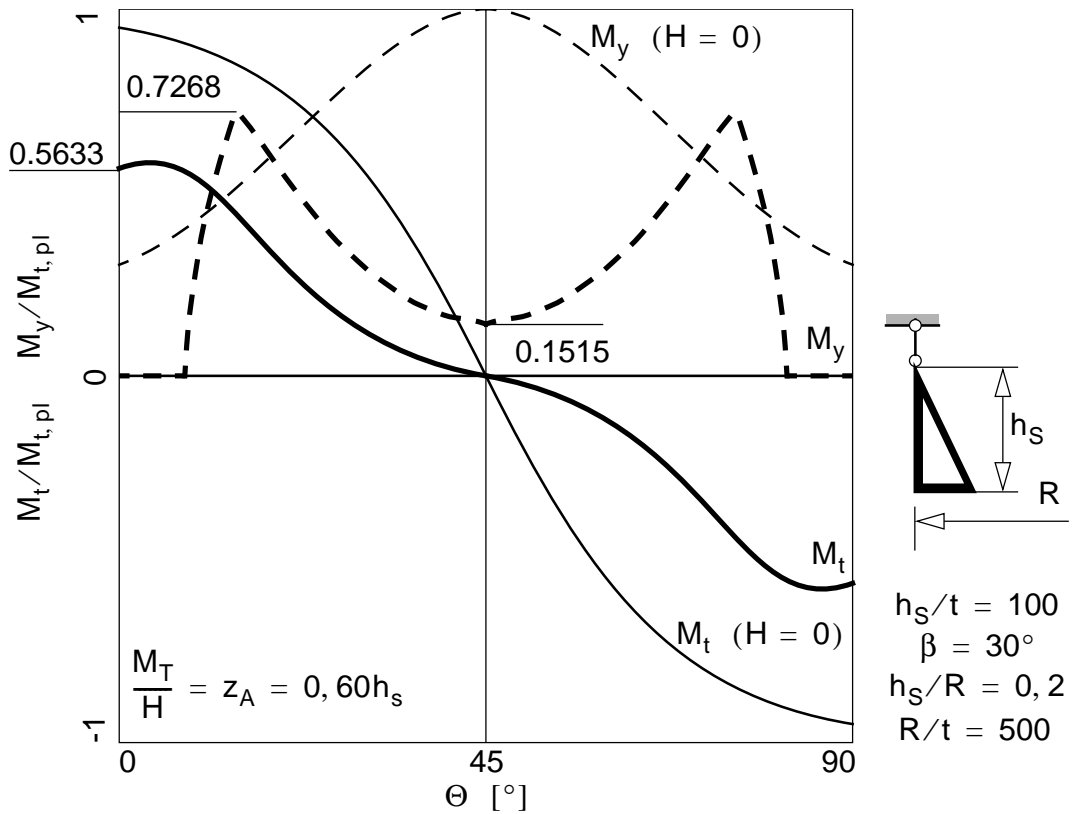


Bild 6-56 Isolierter Basisingträger mit vertikal unverschieblicher Schaftanbindung — Verteilung der Torsions- und Biegemomente bei Erreichen der plastischen Tragfähigkeit für Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

6.5 Vergleich der Tragfähigkeiten

6.5.1 Vertikalbelastung

In Bild 6-57 sind die spannungsbasiert bestimmten Tragfähigkeiten mit den plastischen Tragfähigkeiten der materiell nichtlinearen FE-Berechnungen verglichen. Aufgrund der dominierenden Auflagerkrafteinleitungsproblematik sind hier nur die Tragfähigkeiten des isolierten Ringträgers verglichen. Dabei wird die Höhe h_S der Standzarge variiert.

Die spannungsbasierte Bestimmung der Tragfähigkeit des isolierten Ringträgers liefert eine gute Übereinstimmung mit den Tragfähigkeiten der materiell nichtlinearen Berechnungen und der Modellierung als Schalentragwerk. Das Schottblech ist dabei als starr (unverformbar) angenommen, die Berücksichtigung im Zuge der FE-Berechnung erfolgt über geometrische Zwangsbedingungen.

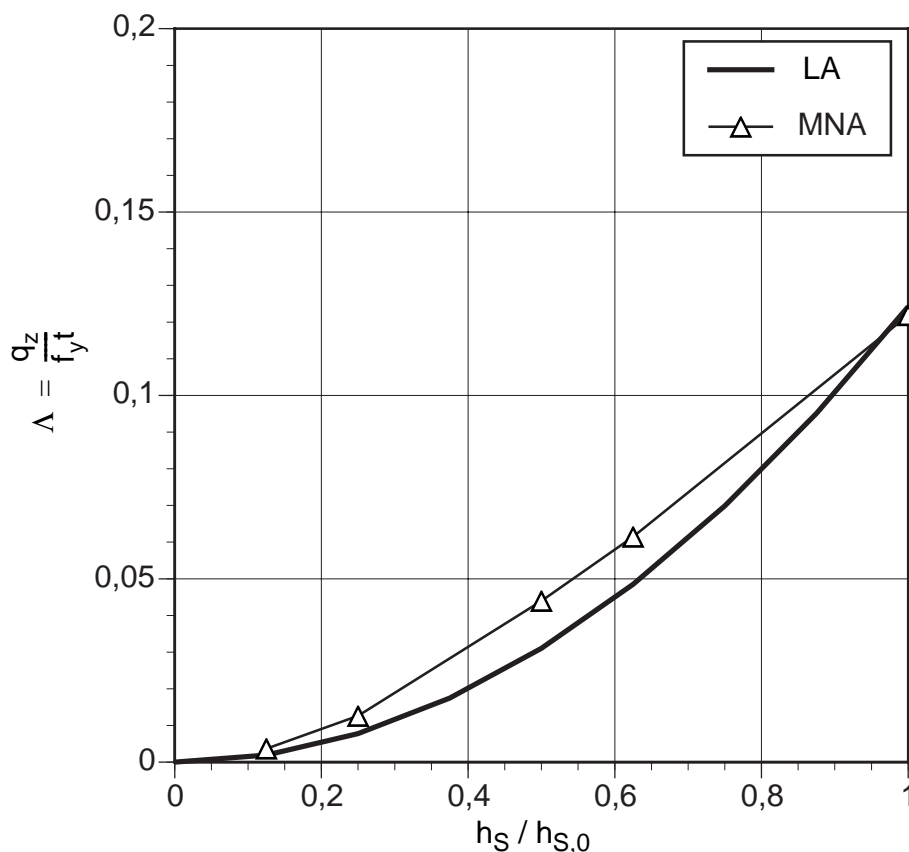


Bild 6-57 Plastische Tragfähigkeit bei Vertikalbelastung in Abhängigkeit der Höhe h_S für die Lastabtragung durch den isolierten Ringträger (R)

6.5.2 Einzeltorsionsmomentenbelastung

In Bild 6-58 sind die Tragfähigkeiten bei Einzeltorsionsmomentenbelastung für den isolierten Basisringträger und das Schaft-Basisringträger-System dargestellt.

Die Tragfähigkeiten des isolierten Ringträgers auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen und der materiell nichtlinearen Berechnungen sind aufgrund der statisch bestimmten Lösung bis auf Ungenauigkeiten in der Erfassung des plastischen Grenzzustandes über den Ringträgerquerschnitt ident. Beim Schaft-Basisringträger-System folgt aufgrund der Umverteilung der Biegemomente bei linearer Berechnung die geringste Tragfähigkeit. Die starrplastische Berechnung und die materiell nichtlineare FE-Berechnung liefern idente Tragfähigkeiten.

Die Berechnung der Schnittgrößen und der darauf basierende Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit am isolierten Ringträger bei Torsionsmomentenbelastung ist aufgrund der vorliegenden Ergebnisse gerechtfertigt.

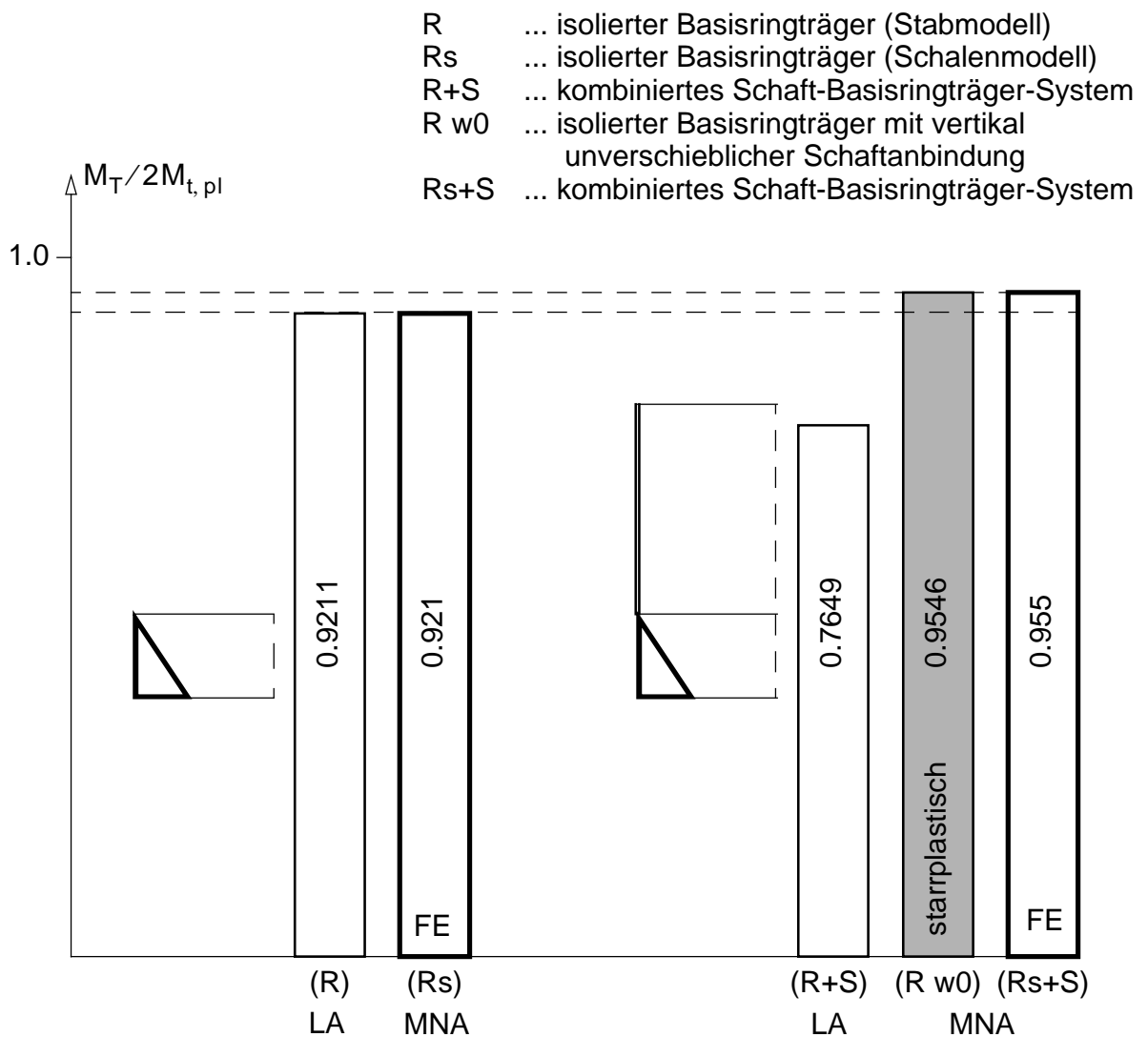


Bild 6-58 Isolierter Basisringträger und Schaft-Basisringträger-System — Vergleich der linear und materiell nichtlinear berechneten Tragfähigkeiten für Torsionsmomentenbelastung

6.5.3 Kombinierte Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

In Bild 6-59 sind die Tragfähigkeiten bei kombinierter Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung dargestellt. Als Bezugsgröße dient das angreifende Einzeltorsionsmoment M_T . Die geringsten Tragfähigkeiten ergeben sich zufolge der Momentenverteilungen der linearen Berechnungen. Am isolierten Ringträger wird durch die berücksichtigte plastische Umlagerung des Horizontalbiegemomentes M_z eine gute Annäherung der materiell nichtlinearen Berechnung erreicht.

Für das Schaft-Basisringträger-System liefern die starrplastischen Berechnungen und die materiell nichtlinearen Berechnungen nahezu idente Tragfähigkeiten.

Die Berechnung der Schnittgrößen und die darauf basierende Bestimmung der plastischen Tragfähigkeit am isolierten Ringträger auch bei kombinierter Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung ist aufgrund der vorliegenden Ergebnisse gerechtfertigt.

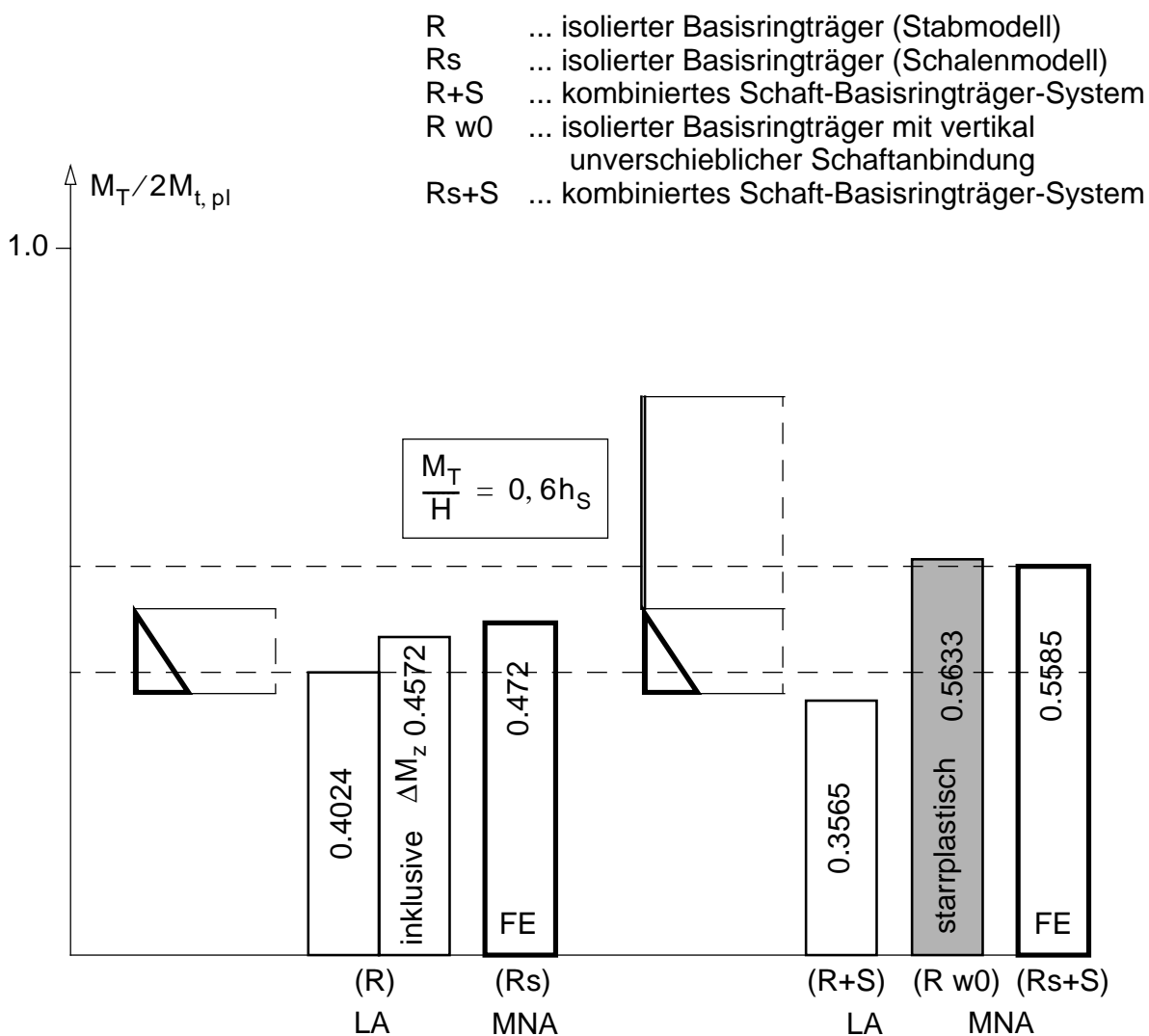


Bild 6-59 Isolierter Basisringträger und Schaft-Basisringträger-System — Vergleich der linear und materiell nichtlinear berechneten Tragfähigkeiten für Radialkraft- und Torsionsmomentenbelastung

6.6 Zusammenfassung von Kap. 6

Zusammenfassung

In der vorliegenden Modellbildung entsprechend Kap. 3 werden Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente durch den Basisringträger abgetragen. Diese Kraftwirkungen entstehen bei der optionalen Berücksichtigung der lokalen Trichterauflagerung über den Schottblechen, die im Auflagerbereich im dreieckförmigen Hohlkastenquerschnitt, der sich aus Standzarge, Trichter und Basisringblech zusammensetzt, eingebaut sind. Die Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente sind zur Erfüllung des Gleichgewichtes an den Schottblechen selbst notwendig.

Die plastische Grenztragfähigkeit hinsichtlich der abzutragenden Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente wurde sowohl am isolierten Basisringträger als auch am integrierten Basisringträger (Schaft-Basisringträger-System) auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen und materiell nichtlinearer FE-Berechnungen bestimmt.

- Sowohl die linear-elastischen als auch elasto-plastischen bzw. starrplastischen Berechnungen zeigen, daß für den Lastfall "Einzeltorsionsmomente" die stützende Wirkung durch die Schalenwand in ungleich höherem Maß aktiviert wird als im Lastfall "Einzelradialkräfte". Der Unterschied begründet sich in der unterschiedlichen Beanspruchung des Ringträgers durch die beiden Lastfälle.
- Beim Lastfall "Einzeltorsionsmomente" entstehen bei Außerachtlassung der stützenden Wirkung der Schalenwand am Basisringträger zugehörig zu seiner "Trägerrosttragwirkung" beträchtliche Vertikalverformungen. Durch das Zusammenwirken entstehen am Schaft zusätzliche Axialbeanspruchungen. Die Größenordnung dieser Zusatzbeanspruchungen wurden sowohl im Zuge der linear-elastischen Spannungsberechnungen als auch der materiell nichtlinearen Berechnungen untersucht. Es zeigt sich, daß diese Zusatzbeanspruchungen in der Schalenwand bei den zugrundegelegten Geometrieparametern und der vorliegenden Belastungsintensität von untergeordneter Größenordnung sind.
- Beim Lastfall "Einzelradialkräfte" liegt eine Beanspruchung in der "Ringebene" des Basisringträgers vor, die Ringträgerbeanspruchungen werden somit durch das Zusammenwirken mit der Schalenwand nur geringfügig verändert.
- Die bestimmten Tragfähigkeitswerte auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen ergeben eine konservative Abschätzung der Tragfähigkeitswerte materiell nichtlinearer Berechnungen. Es zeigt sich, daß die Berechnungen am isolierten Basisringträger durchaus für diese beiden Lastfälle anwendbar sind und eine gute Abschätzung der Resultate materiell nichtlinearer Berechnungen des integrierten Basisringträgers darstellen.
- Analytische starrplastische Berechnungen des integrierten Basisringträgers liefern bei beiden Lastfällen nahezu idente Tragfähigkeitswerte zu jenen der elasto-plastischen, materiell nichtlinearen FE-Berechnungen.

Ausblick

Die durchgeführten Berechnungen von Kap. 6 beziehen sich auf die “isolierte“ Belastung des Basisringträgers durch Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente.

Dabei wurden die Kraftgrößen derart zugrundegelegt, daß sie einer vollen Ausnutzung der Tragfähigkeit der optionalen lokalen Trichterauflagerung über den Schottblechen zuordenbar sind.

Zur Komplettierung der durchgeführten Berechnungen sind für eine Interpretation zu Bemessungszwecken noch folgende Festlegungen bzw. Untersuchungen ausständig:

- Festlegung des Lastanteiles der Gesamtbelastung, der durch die optionale lokale Trichterauflagerung über den Schottblechen abgetragen wird, das heißt Bestimmung einer “realen“ Lastsituation am integrierten Basisringträger.
- Superposition mit den Beanspruchungen des Trichter-Schaft-Überganges
- Superposition mit den Beanspruchungen des Auflagerkrafteinleitungsbereiches des Schaftes bzw. Standzarge

Weiters ist die Überprüfung der zugrundeliegenden Modellbildung und die damit verbundene, lediglich sekundäre Lastabtragungsfunktion des Basisringträgers unbedingt am Gesamtsystem zu überprüfen.

7

AUFLAGERKRAFTEIN- LEITUNGSBEREICH

Inhalt von Kapitel 7:

- 7.1 Aufteilung der Auflagerkraft**
- 7.2 Auflagerkrafteinleitung über das Schottblech in die Standzarge**
- 7.2 Zusammenfassung von Kap. 7**

7.1 Aufteilung der Auflagerkraft

Wesentlich für die Tragfähigkeit des Silos ist der Auflagerkrafteinleitungsbereich. Die abzutragende Gesamtvertikalbelastung und die folgenden Auflagerkräfte definieren die erforderliche Auflagernettofläche, die korrekte Dimensionierung des Auflagerbereiches stellt eine Pflichtaufgabe des Siloentwurfes dar.

Die Einleitung der Auflagerkräfte erfolgt, wie in Bild 7-1 exemplarisch dargestellt, über mehrere Teilflächen am Stützenkopf des Silogerüsts. Im Fall dieses konkreten Beispiels besteht die Gesamtauflagerfläche aus den drei folgenden Teilflächen:

- lokale Randlagerung des Schaftes — Lagerfläche A_Z des Schaftes (=Zargenauflagerung)
- lokale Lagerung des Schaftes in Meridianrichtung — Lagerfläche A_S des Schottbleches
- zentrische Lagerung der Auflagerlängssteife — Lagerfläche A_L der Längssteife

Zugeordnet zu diesen drei Teilflächen sind die drei grundsätzlich verschiedenen Auflagerkrafteinleitungsmechanismen. Im vorliegenden Fall sind dies die Einleitung über:

- Meridianrandkräfte n_x im Bereich der lokalen Randlagerung des Schaftes in Umfangsrichtung innerhalb der Lagerbreite d zufolge der Teilauflegerkraft F_Z
- Schubkräfte $n_{x\Theta}$ im Bereich der lokalen Lagerung des Schaftes in Meridianrichtung innerhalb der Höhe h_S zufolge der Teilauflegerkraft F_S
- zentrische Teilauflegerkraft F_L der Auflagerlängssteife

Weiters kann ein Anteil der Schottauflegerkraft F_S in Form eines kräftemässigen Kurzschlusses direkt als lokale Lagerkraft des Trichters bei Lagerung in Meridianrichtung entlang des Schottbleches angesetzt werden (siehe Kap. 3 bzw. Kap. 4). Die Einleitung erfolgt dabei ebenfalls durch Schubkräfte $n_{x\Theta}$ in den Trichter.

Die Modellierung der Auflagerung kann, wie in Bild 7-1 dargestellt wird, durch die Vorgabe von Einzelauflegerkräften bzw. linienförmig verteilten Auflagerkräften erfolgen. Die Aufteilung der Auflagerkomponenten ergibt sich in diesem Fall aus dem elastischen oder elasto-plastischen Zusammenwirken im Rahmen der globalen Systemwirkung. Maximale Ausnutzung der Auflagergesamtragfähigkeit stellt sich ein, wenn Auflagerkräfte flächenproportional aufgeteilt sind. Dieser Aufteilungsschlüssel stellt sich bei starren Auflagerungsbedingungen mit hoher Annäherung ein.

Alternativ dazu kann die Lagerfläche, wie in Bild 7-2 dargestellt, als vertikal unverschiebliche Randbedingung des Silos erfaßt werden.

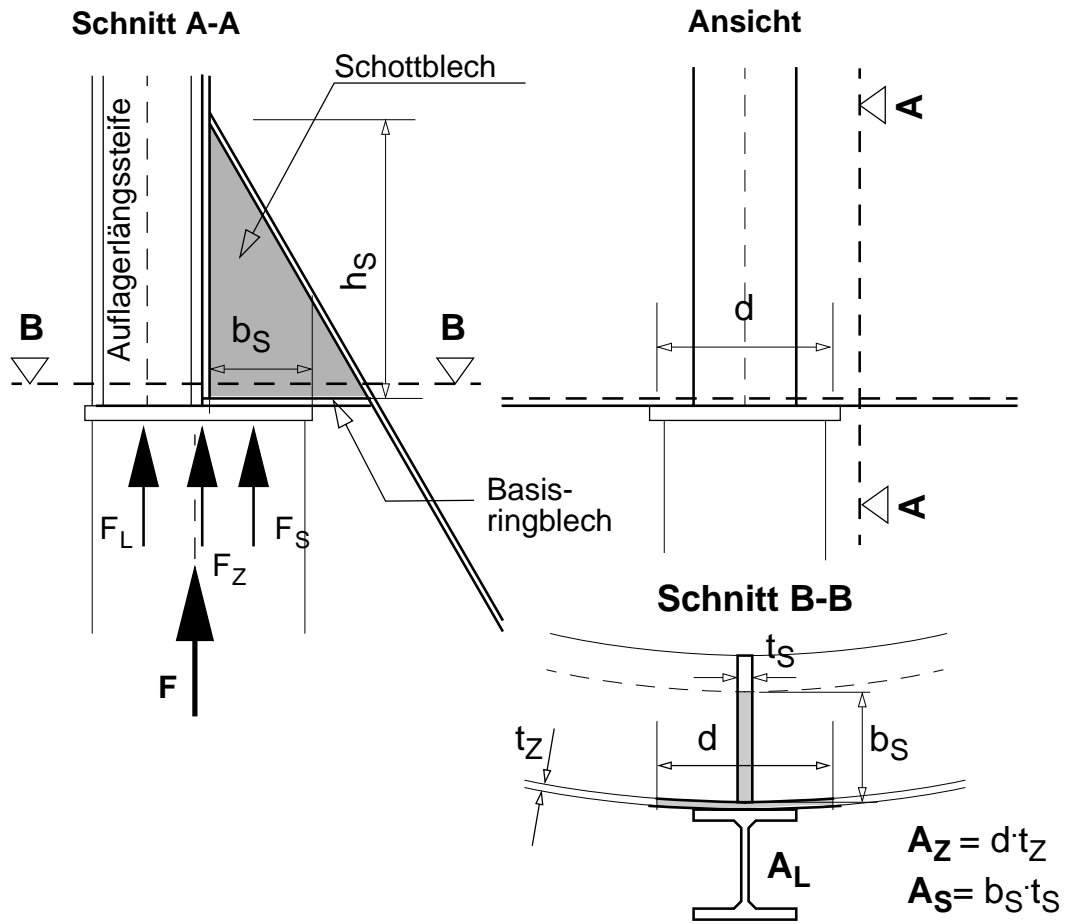


Bild 7-1 Auflagerausbildung eines diskret gelagerten Silos mit Auflagerlängssteife und Schottblech

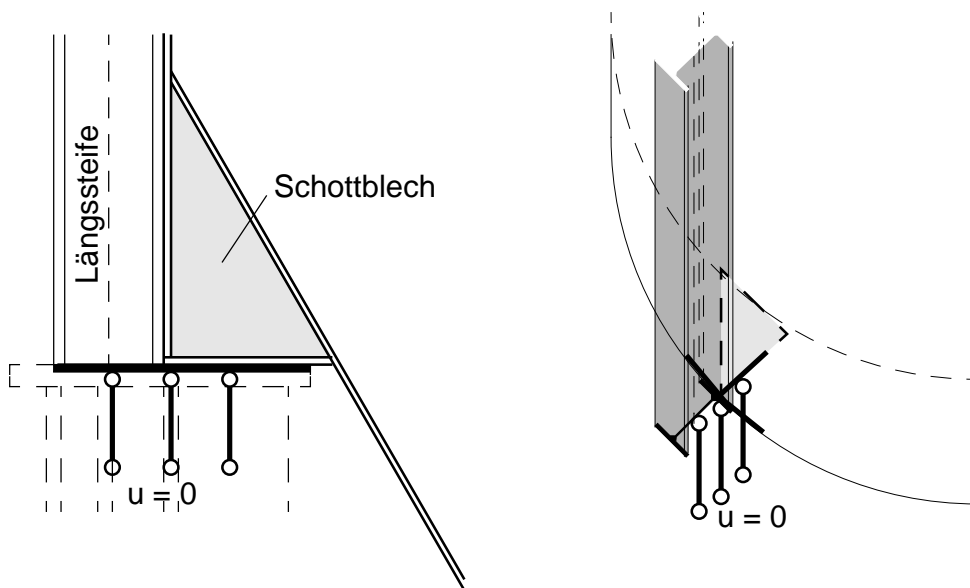


Bild 7-2 Vertikal unverschiebliche Auflagerungsbedingungen

7.2 Auflagerkrafteinleitung über das Schottblech in die Standzarge

Im folgenden wird die Interaktion folgender Auflagerkrafteinleitungsmechanismen in Bild 7-3 untersucht:

- Einleitung der Teilauflegerkraft F_Z über die Lagerbreite d mittels Meridianrandkräften n_x (=Zargenauflagerung)
- Einleitung der Teilauflegerkraft F_S über die Höhe h_S mittels Schubkräften $n_{x\Theta}$ (=Schottblechlagerung). Dies kann auf zweierlei Arten erfolgen. Eine Möglichkeit ist die Einleitung über das sogenannte Schottblech, eine zweite Möglichkeit ist die Anordnung einer lokalen Auflagerlängssteife und folglich die Einleitung der Teilauflegerkraft ebenfalls über Schubkräfte in den Schaft.

Die zusätzliche Einleitung der Auflagerkraft über die über die gesamte Schafthöhe durchgehende Auflagerlängssteife und die Interaktion mit diesen beiden Auflagerkrafteinleitungsmechanismen wird in Kap. 8.3.6 untersucht.

7.2.1 Baustatische Modellierung der Auflagerung

Die baustatische Modellierung der Auflagerung kann folgendermaßen wiedergegeben werden:

- unendlich nachgiebige Auflagerung
- starre Auflagerung

Wie bereits in Bild 7-1 und Bild 7-2 dargestellt, wird die Einleitung der Auflagerkräfte über konstant verteilte Kräfte als unendlich nachgiebige Auflagerung angesehen.

Der Grenzfall einer vertikal unverschieblichen Lagerfläche und einer unverformbaren lokalen Längssteife bzw. eines unverformbaren Schottbleches wird als starre Auflagerung in Umfangs- und Meridianrichtung des Schaftes angesehen (Bild 7-4).

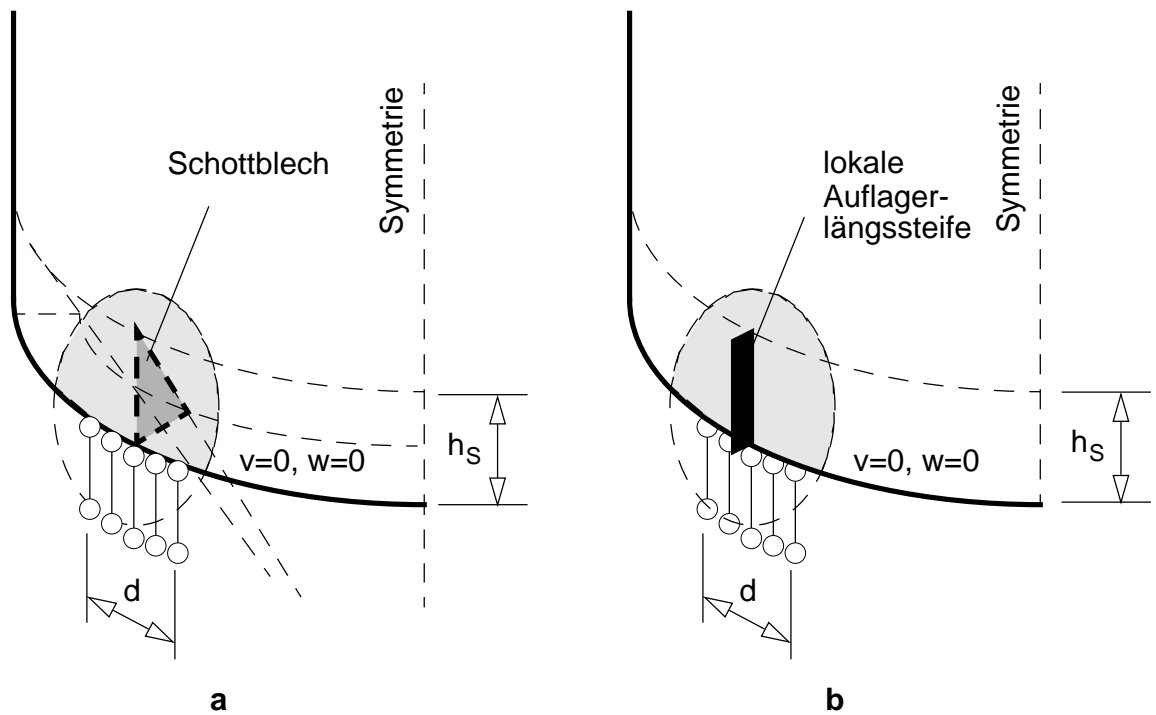


Bild 7-3 Einleitung der Auflagerkraft in den Schaft durch lokale Randauflagerung (Lagerbreite d in Umfangsrichtung) und **a.** durch ein zwischen Standzarge und Trichter eingebautes Schottblech oder **b.** durch die Anordnung von lokalen Auflagerlängssteifen im Auflagerbereich

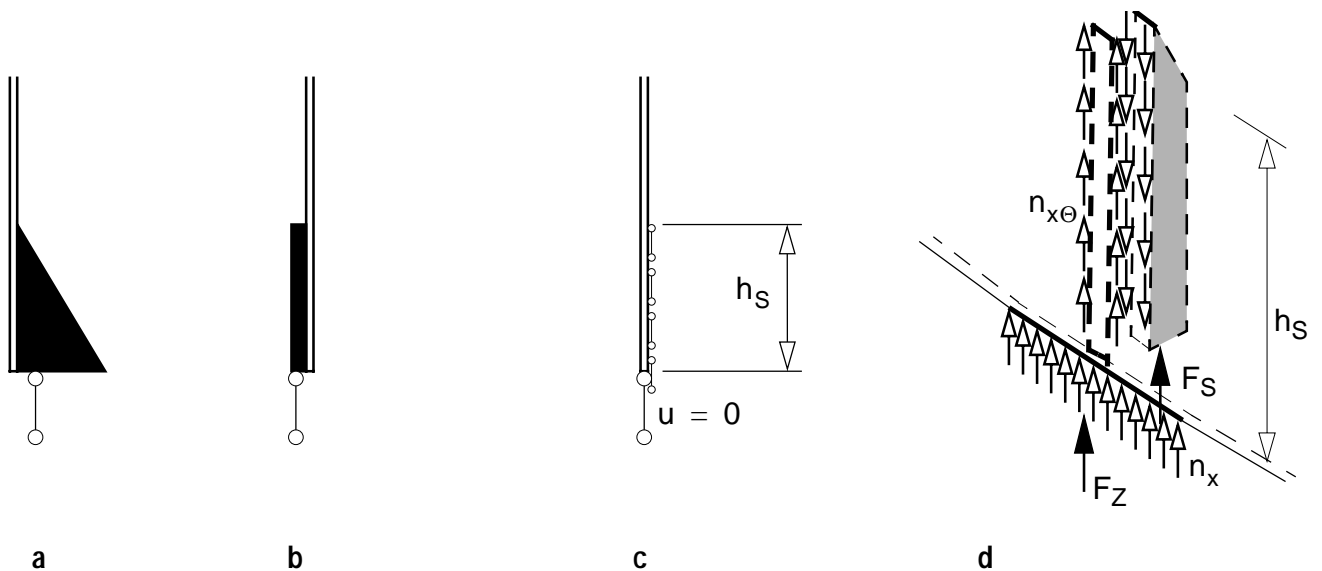


Bild 7-4 Einleitung der Auflagerkraft in den Schaft — **a.** über das Schottblech bzw. **b.** über die lokale Auflagerlängssteife, **c.** Modellierung als starre Auflagerungsbedingung in Meridianrichtung und **d.** Modellierung als unendlich nachgiebige Auflagerungsbedingung in Meridianrichtung durch die Vorgabe konstant verteilter Schubkräfte

7.2.2 Berechnungsmodell

Das Berechnungsmodell und die zugehörigen Systemparameter sind in Bild 7-5 dargestellt. Die Materialparameter entsprechen wiederum wieder jenen von Baustahl St 37. Die Gesamthöhe des Schaftes ergibt sich aus der Höhe h_S der Standzarge bzw. der Länge der partiellen Längssteife (oder des Schottbleches) und der Länge L des darüberliegenden oberen Schaftteiles.

Die Gesamtvertikalbelastung greift als konstant verteilte Wandschubbelastung am oberen Schaftteil an.

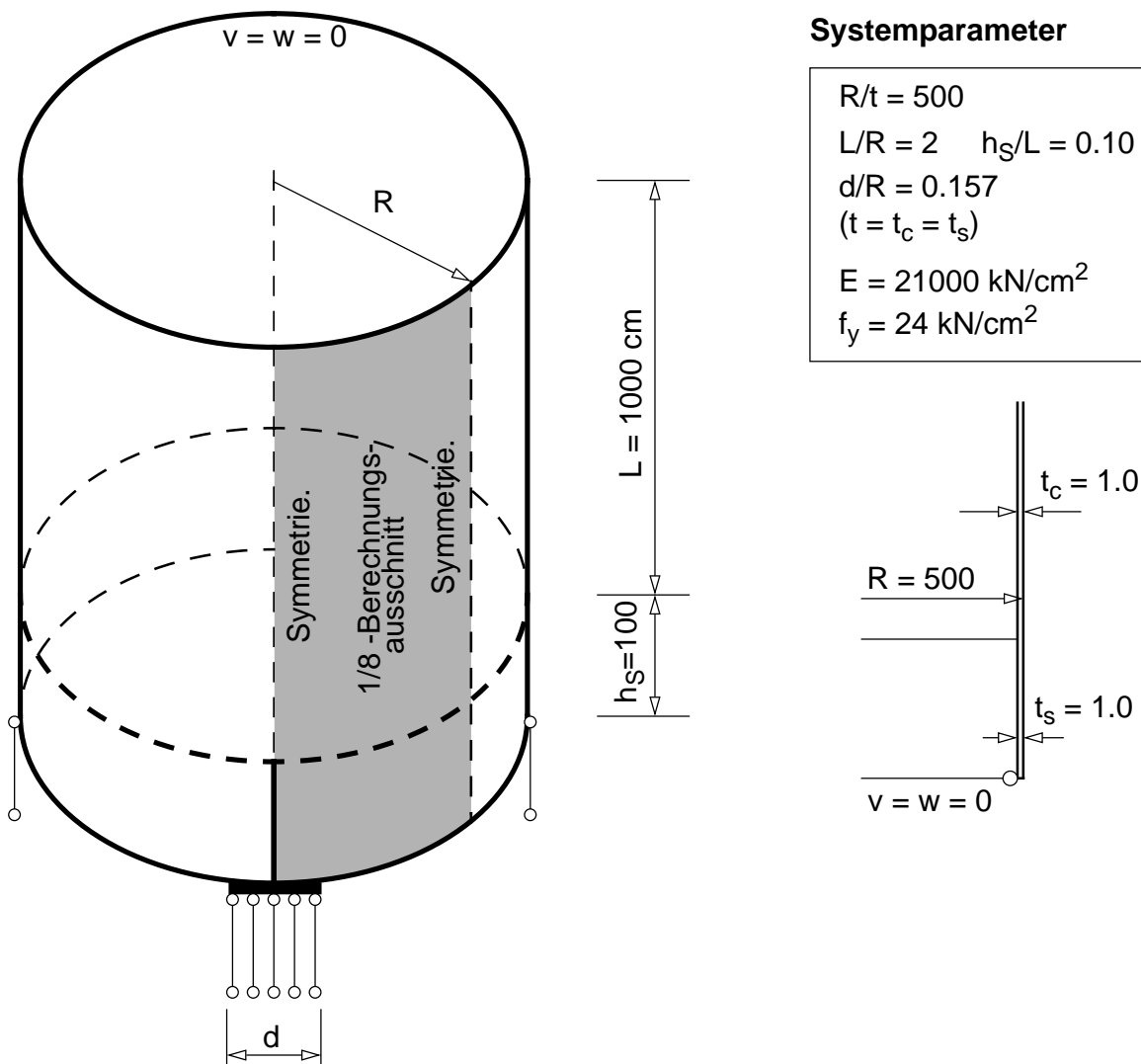


Bild 7-5 Berechnungsmodell und 1/8-Berechnungsausschnitt

7.2.3 Vereinfachte Berechnung

Eine vereinfachte Berechnung ist durch die Annahme einfacher Spannungsfelder im Auflagerbereich möglich. Dabei wird die Aufteilung der Auflagerkraft auf die beiden Auflagerkräfteinleitungsmechanismen als variabel angesehen und folglich derart bestimmt, daß daraus die größt möglich einleitbare Auflagerkraft resultiert.

Die Einleitung der Auflagerkraft (Bild 7-6) erfolgt durch Axialkräfte n_x zufolge der über die Lagerbreite d verteilten Auflagerkraft F_Z und durch Schubkräfte $n_{x\theta}$ zufolge der über die Höhe h_S verteilten Auflagerkraft F_S . Zur Ermittlung der Gesamttragfähigkeit ist die Interaktion der Axial- und Schubspannungen im Auflagerbereich maßgebend. In Abhängigkeit der Lagerparameter d und h_S kann die optimale Aufteilung der Gesamtauflagerkraft in die Teilaflagerkräfte F_Z und F_S mithilfe einer vereinfachten Berechnung bestimmt werden.

Die Aufteilung der Gesamtauflagerkraft F erfolgt durch den Aufteilungsfaktor α (Bild 7-6). Zur Aufnahme stehen die vollplastischen Tragfähigkeiten der Teilaflagerkräfte F_Z und F_S zur Verfügung.

$$F_{Z,y} = dt_s \cdot f_y \quad (7-1a)$$

$$F_{S,y} = 2h_s t_s \cdot f_y / \sqrt{3} \quad (7-1b)$$

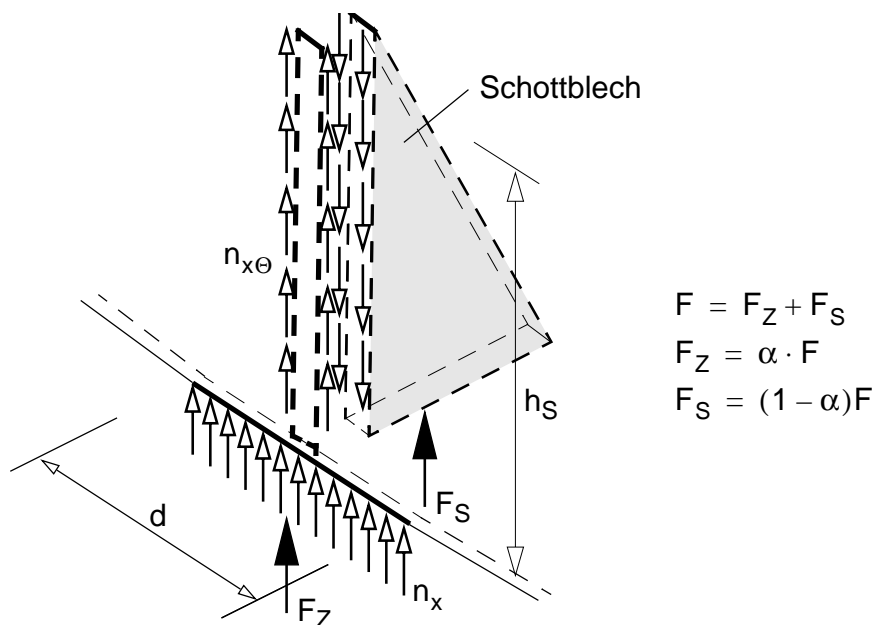


Bild 7-6 Einleitung der Auflagerkraft über die Lagerbreite d und die Schottblechhöhe h_S

Die Vergleichsspannung σ_{eq} bzw. die Ausnutzung der Tragfähigkeiten im Auflagerbereich ist in Gl. (7-2a) in dimensionsloser Form durch den Bezug auf die plastischen Teiltragfähigkeiten der Auflagerteilflächen in Abhängigkeit des Aufteilungsfaktors α dargestellt. Die Gesamtauflagerkraft F folgt ebenfalls in Abhängigkeit des Aufteilungsfaktors α in Gl. (7-2c).

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}}{f_y} = \sqrt{\left(\frac{\alpha \cdot F}{F_{Z,y}}\right)^2 + \left(\frac{(1-\alpha) \cdot F}{F_{S,y}}\right)^2} \quad (7-2a)$$

$$\frac{\sigma_{\text{eq}}}{f_y} = \frac{F}{F_{Z,y} \cdot F_{S,y}} \sqrt{F_{Z,y}^2 (1-\alpha)^2 + \alpha^2 (F_{S,y})^2} \quad (7-2b)$$

$$F = \frac{F_{Z,y} \cdot F_{S,y}}{\sqrt{F_{Z,y}^2 (1-\alpha)^2 + \alpha^2 F_{S,y}^2}} \quad (7-2c)$$

Optimale Auflagerkraftaufteilung

Der optimale Aufteilungsfaktor α in Gl. (7-3b) ergibt sich aus der Extremalbedingung — Maximumforderung hinsichtlich der Gesamtauflagerkraft F — in Gl. (7-3a). Dieser Aufteilungsfaktor ist letztendlich von den geometrischen Parametern d und h_S der Auflagerteilflächen abhängig.

$$dF/d\alpha = 0 \quad (7-3a)$$

$$\alpha = \frac{F_{Z,y}^2}{F_{Z,y}^2 + F_{S,y}^2} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{h_S}{d}\right)^2} \quad (7-3b)$$

Die Teilaflagerkraft F_Z kann auch als Anteil der plastischen Auflagerkrafttragfähigkeit $F_{Z,y}$ in Gl. (7-4a) angegeben werden. Daraus folgen die Teilaflagerkraft F_S und die Gesamtauflagerkraft F und der Aufteilungsfaktor α . Durch Rückeinsetzen wird der zum optimalen Aufteilungsfaktor zugehörige Faktor Λ_Z in Gl. (7-4e) berechnet

$$F_Z = \Lambda_Z \cdot F_{Z,y} \quad (7-4a)$$

$$F_S = F_{S,y} \cdot \sqrt{1 - \Lambda_Z^2} \quad (7-4b)$$

$$F = F_Z + F_S = \Lambda_Z \cdot F_{Z,y} + F_{S,y} \cdot \sqrt{1 - \Lambda_Z^2} \quad (7-4c)$$

$$\alpha = \frac{F_Z}{F_Z + F_S} = \frac{\Lambda_Z \cdot F_{Z,y}}{\Lambda_Z \cdot F_{Z,y} + F_{S,y} \cdot \sqrt{1 - \Lambda_Z^2}} \quad (7-4d)$$

$$\Lambda_Z = \sqrt{\frac{F_{Z,y}^2}{F_{S,y}^2 + F_{Z,y}^2}} = \sqrt{\alpha} \quad (7-4e)$$

7.2.4 Materiell nichtlineare FE-Berechnungen

Zur Verifikation der vereinfachten Berechnung und der Bestimmung des Aufteilungsfaktors α werden materiell nichtlineare Berechnungen (MNA) mithilfe des FE-Programmes ABAQUS (1997) durchgeführt. Die Lagerung wird einerseits als nachgiebig — die Gesamtauflagerkraft wird durch verteilte Kräfte aufgebracht — und andererseits als starr — durch entsprechende Randbedingungen in Axialrichtung $u = 0$ entlang der Lagerbreite d in Umfangsrichtung und der Höhe h_S in Meridianrichtung — berücksichtigt.

7.2.4.1 Unendlich nachgiebige Auflagerung

Bei nachgiebiger Lagerung wird bei der Durchführung der MNA-Berechnungen in zwei Schritten vorgegangen, und zwar:

- im ersten Berechnungsschritt wird der Schaft alternativ mit der Teilaflagerkraft F_Z (bezeichnet mit MNA (F_Z) in Bild 7-9) oder der Teilaflagerkraft F_S (bezeichnet mit MNA (F_S) in Bild 7-9) belastet
- im zweiten Berechnungsschritt wird die aufnehmbare Teilaflagerkraft F_S oder F_Z berechnet

In Bild 7-8 ist die Interaktion der beiden Auflagerkrafteinleitungsmechanismen dargestellt. Die Interaktion ist quadratisch, da wie bereits erwähnt (Kap. 7.2.3) die Einleitung der Teilaflagerkräfte zum einen über Meridianrandkräfte bzw. zum anderen über Schubkräfte erfolgt. Die vereinfachte Berechnung entsprechend Kap. 7.2.3 zeigt eine sehr gute Approximation der MNA-Resultate. In einfacher Art und Weise kann der Interaktionsbereich auch durch eine tri-lineare Grenzlinie abgegrenzt werden.

In Bild 7-9 sind die Tragfähigkeitswerte der MNA-Berechnungen für die vorgegebenen Teilaflagerkräfte in dimensionsloser Form dargestellt. Als Bezugsgröße für die Gesamtauflagerkraft dient die Summe der vollplastischen Teiltragfähigkeiten ($F_{Z,y} + F_{S,y}$).

In Bild 7-9 erfolgt auch der Vergleich mit den vereinfachten Berechnungen nach Kap. 7.2.3 in Abhängigkeit des Ausnutzungsfaktors Λ_Z der Auflagerkrafteinleitung über die lokale Randlagerung des Schaftes (=Zargenaflagerung). Der Ausnutzungsfaktor Λ_Z ergibt sich aus dem Aufteilungsfaktor α in Gl. (7-4e).

Die optimale Aufteilung der Gesamtlagerkraft ergibt sich für das vorliegende Berechnungsmodell zufolge der vereinfachten Berechnungen (Handrechnungen) aufgrund der geometrischen Verhältnisse der Auflagerung mit einem Aufteilungsfaktor von $\alpha = 0,316$. Die Lagerkräfte erreichen dabei folgende, auf die vollplastischen Teiltragfähigkeiten bezogene Werte:

$$F_Z/F_{Z,y} = 0,562 \quad (7-5a)$$

$$F_S/F_{S,y} = 0,827 \quad (7-5b)$$

Für die Gesamttragfähigkeit ergibt sich bei Bezug auf die Summe der plastischen Teiltragfähigkeiten

folgender Wert in Gl. (7-6). Dabei ist ersichtlich, daß aufgrund der Interaktionseffekte nicht die Summe der vollplastischen Teiltragfähigkeiten erreicht werden kann.

$$(F_Z + F_S)/(F_{Z,y} + F_{S,y}) = 0,720 \quad (7-6)$$

7.2.4.2 Starre Auflagerung

Bei starrer Lagerung stellen sich im vollplastischen Grenzzustand die Teilauflagerkräfte automatisch ein. Bild 7-7 zeigt die Ergebnisse der MNA-Berechnungen bei Erreichen der plastischen Tragfähigkeit. Die resultierenden Teillagerkräfte und die Verteilung der Axial- und Schubspannungen sind in Bild 7-7 dargestellt.

Die Gesamttragfähigkeit bei starrer Lagerung ergibt sich in Gl. (7-7) bei Bezug der rückgerechneten resultierenden Teillagerkräfte (siehe Bild 7-7) auf die Summe der plastischen Auflagerkraftteiltragfähigkeiten. Dieser Tragfähigkeitswert wird in Bild 7-9 dargestellt.

$$\frac{0,91F_{Z,y} + 0,64F_{S,y}}{F_{Z,y} + F_{S,y}} = 0,750 \quad (7-7)$$

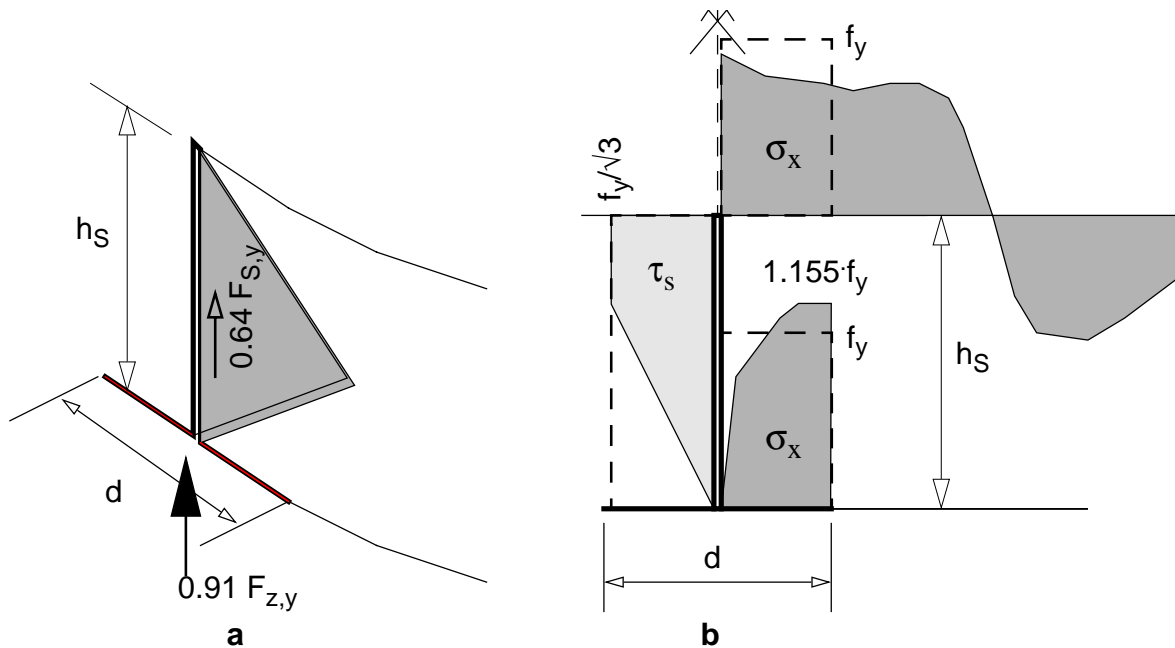


Bild 7-7 Auflagerkrafteinleitung in das Schaft-System bei starrer Lagerung — **a.** resultierende Auflagerkräfte und **b.** Meridian- und Schubspannungsverteilungen im Auflagerbereich

7.2.4.3 Zusammenfassender Vergleich

In Bild 7-8 sind die Interaktionseffekte der beiden Teilaflagerkräfte F_Z und F_S im Bezug auf ihre vollplastischen Tragfähigkeiten $F_{Z,y}$ bzw. $F_{S,y}$ für den Fall einer unendlich nachgiebigen Auflagerung

dargestellt. Die Interaktion ist quadratisch, da wie bereits erwähnt die Einleitung der Teilauflegerkräfte zum einen über Meridianrandkräfte bzw. zum anderen über Schubkräfte erfolgt. Die daraus resultierende Interaktionsformel zeigt gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der MNA-Berechnungen, bei denen einmal die Teilauflegerkraft F_Z als Vorlaststufe aufgebracht wird und die zugehörige Teilauflegerkraft F_S bestimmt wird (MNA F_Z in Bild 7-8) bzw. die Teilauflegerkraft F_S als Vorlaststufe aufgebracht wird und die zugehörige Teilauflegerkraft F_Z bestimmt wird (MNA F_S in Bild 7-8).

Der Interaktionsbereich der Teilauflegerkräfte kann für weitergehende praktische Überlegungen auf einfache Art und Weise durch eine tri-lineare Grenzlinie in Bild 7-8 eingegrenzt werden:

$$\frac{F_S}{F_{S,y}} \leq \begin{cases} 1 \\ 1,15 - 0,75 \frac{F_Z}{F_{Z,y}} \text{ und } \frac{F_Z}{F_{Z,y}} \leq 1 \end{cases} \quad (7-8)$$

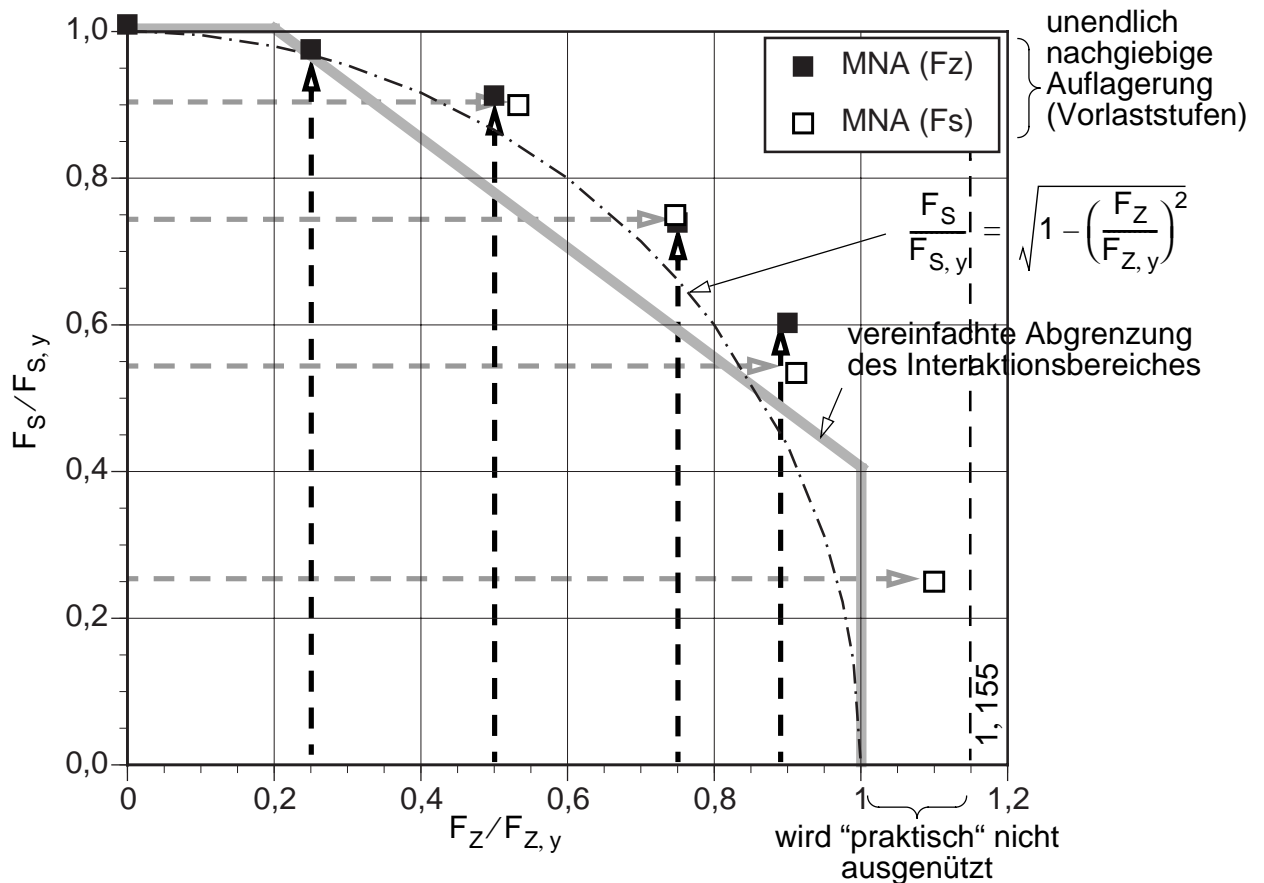


Bild 7-8 Interaktionseffekte von Teilauflegerkraft F_Z (=Zargenauflegerung) und Teilauflegerkraft F_S (=Schottblechlagerung)

In Bild 7-9 sind die Tragfähigkeiten der MNA-Berechnungen für starre und nachgiebige Auflagerung mit den Tragfähigkeiten der vereinfachten Berechnungen nach Kap. 7.2.3 verglichen. Auf der Abszisse ist die Ausnutzung der lokalen Randlagerung in Umfangsrichtung aufgetragen (Ausnutzungsfaktor Λ_Z). Auf der Ordinate ist die Gesamttragfähigkeit in dimensionsloser Form durch Bezug auf die Summe der plastischen Teiltragfähigkeiten ($F_{Z,y} + F_{S,y}$) dargestellt.

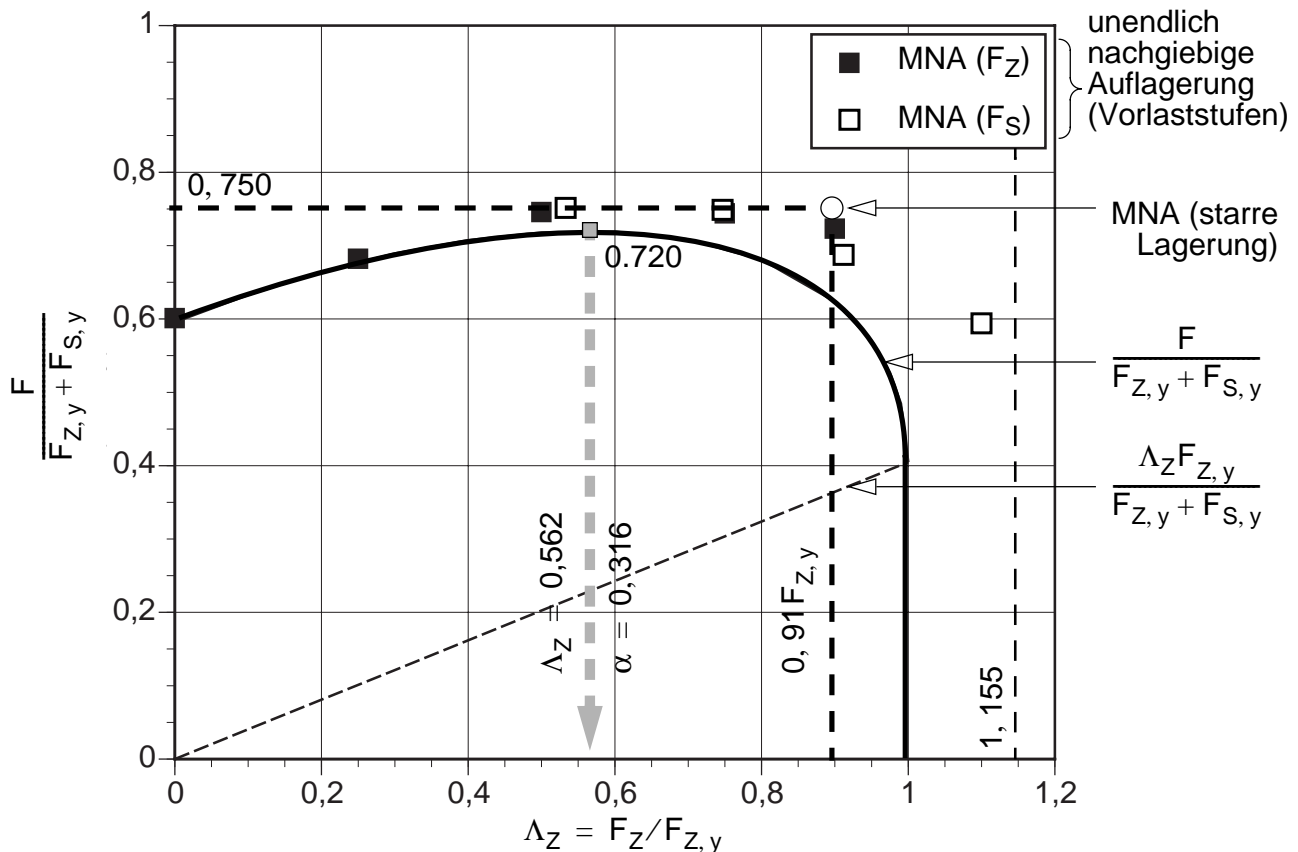


Bild 7-9 Plastische Tragfähigkeit der Auflagerkräfteinleitung in das Schaftsystem

In Bild 7-9 zeigt sich eine gute Übereinstimmung der MNA-Berechnungen mit den vereinfachten Berechnungen (Handrechnung zur Bestimmung der optimale Auflagerkraftaufteilung). Die vereinfachten Berechnungen liefern somit eine sichtlich genaue Wiedergabe der Interaktionseffekte im Auflagerbereich.

- Die Tragfähigkeiten der materiell nichtlinearen Berechnungen in Bild 7-9 sind dabei etwas höher als jene der vereinfachten Berechnungen. Dies resultiert aus den ungleichförmigen Spannungsverteilungen im Auflagerbereich, die bei den vereinfachten Berechnungen durch die Vorgabe konstanter Spannungsfelder nicht berücksichtigt werden. Zusätzlich kann im Grenzfall die Lagerkraft F_Z einen Wert von $1,155F_{Z,y}$ erreichen. Dies ergibt sich aus dem Mises-Vergleichsspannungskriterium, wenn die Umfangsspannungen im plastischen Grenzzustand sich mit dem halben Wert der Meridianspannungen einspielen.
- Qualitativ zeigen die vereinfachten Berechnungen und die MNA-Berechnungen für nachgiebige Lagerung eine gute Übereinstimmung der Tragfähigkeiten in Abhängigkeit des Ausnutzungsfaktors Λ_Z bzw. Aufteilungsfaktors α . Die maximalen Gesamttragfähigkeiten werden bei nahezu identen Aufteilungsfaktoren erreicht.
- Bei starrer Lagerung wird die höchste Tragfähigkeit erreicht. Die Aufteilung der Lagerkräfte ist entsprechend den Ergebnissen der MNA-Berechnungen in Bild 7-9 dargestellt. Verglichen mit den zum optimalen Aufteilungsverhältnis der nachgiebigen Lagerung zugehörigen Teillagerkräften ergeben sich doch unterschiedliche Teillagerkräfte.

7.3 Zusammenfassung von Kap. 7

Die angestellten Untersuchungen zeigen Folgendes:

- Im Auflagerbereich müssen die Interaktionseffekte verschiedener Teilauflegerkräfte (Auflagerkräfteinleitungsmechanismen) berücksichtigt werden.
- Dies gelingt durchaus anhand einfacher Überlegungen in guter Übereinstimmung mit materiell nichtlinearen FE-Berechnungen durch die Superposition der maßgebenden Auflagerspannungen, hier waren dies die Meridianspannungen bzw. Schubspannungen der Teilauflegerkräfte.
- Die vereinfachte Superposition der Auflagerspannungen kann überdies dazu verwendet werden das optimale Aufteilungsverhältnis der Auflagerkräfte vorweg zu bestimmen.

Weitergehend sind noch notwendige Untersuchungen ausstehend:

- Im Auflagerbereich müssen auch die Basisringträgerbeanspruchungen mitberücksichtigt werden.
- Analoges gilt auch für die axialsymmetrischen Beanspruchungen im Bereich des Trichter-Schaft-Überganges. Dort wurde die Interaktion mit globalen Schalenwandmembrangrundbeanspruchungen miteinfaßt (Kap. 5). Offen bleibt jedoch die Frage, wie das Zusammenwirken modifizierter Trichter-Schaft-Beanspruchungen mit den lokalen Beanspruchungen im Auflagerkräfteinleitungsbereich beschaffen ist. Es muß damit gerechnet werden, daß sich die genannten Tragmechanismen bei gewissen kritischen Lastkombinationen gegenseitig schwächen.

8

SCHAFT-LÄNGSSTEIFEN- SYSTEM

Inhalt von Kapitel 8:

- 8.1 Teiltragsystem — Schaft und Auflagerlängssteife**
- 8.2 Vollständige linear-elastische Systemberechnung**
- 8.3 Anwendungsbeispiel**
- 8.4 Plastische Grenztragfähigkeit der Auflagerlängssteife und der Schalenwand**
- 8.5 Effekt der elastischen Nachgiebigkeit der Schraubstöße**

8.1 Teiltragsystem — Schaft und Auflagerlängssteife

Das Teiltragsystem Schaft und Auflagerlängssteife ist in (Bild 8-1) dargestellt. In den weiteren Ausführungen wird es als (kombiniertes) Schaft-Längssteifen-System bezeichnet.

Die diskreten Auflagerlängssteifen erstrecken sich über die volle Höhe des Schaftes. Der Schaft selbst kann im einfachsten Fall mit konstanter Wanddicke oder mit abgestuftem Wanddickenverlauf ausgeführt sein. Am oberen und unteren Rand schließen der Dachkonus bzw. das Basisringblech an. Diese die Schafränder stützenden Bauelemente werden vereinfacht durch Randbedingungen $v = w = 0$ wiedergegeben. Alternativ können sie in praktischen Anwendungen durch einen unteren und oberen Randring realisiert sein.

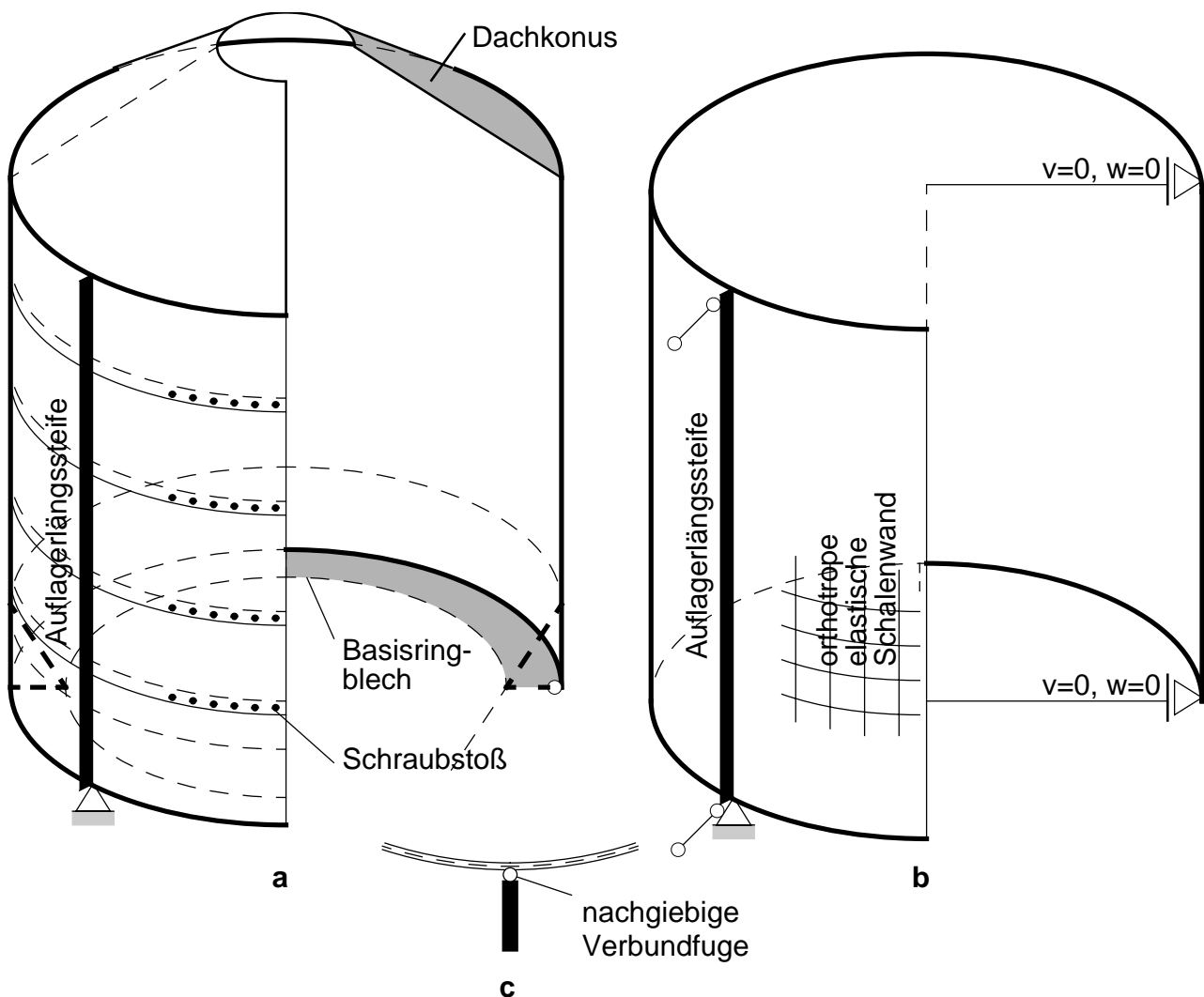


Bild 8-1 a. Schaft mit horizontalen Schraubstößen und durchgehenden Auflagerlängssteife, b. Schaft-Längssteifen-System und c. nachgiebige Verbundfuge zwischen Schaft und Auflagerlängssteife

Zusammenwirken von Längssteife und Schaft

Am kombinierten Schaft-Längssteifen-System kommt es bei sämtlichen Beanspruchungen zu einem kraft- und formschlüssigen Zusammenwirken. Dies wird im folgenden exakt elastizitätstheoretisch untersucht.

Eine weitere Zerlegung führt auf die Einzelkomponentensysteme:

- Schaftsystem
- Auflagerlängssteifensystem

In diesem einfacheren Fall wird nur die statische Kompatibilität zwischen Schaft und Auflagerlängssteife durch wechselweise wirkende Kräftegleichgewichtsgruppen vollständig berücksichtigt (siehe Kap. 1.1.4). Am kombinierten Schaft-Längssteifen-System entstehen hingegen ungleichförmig verteilte Koppelschubkräfte zwischen Längssteife und Schaft, welche zu einer Biegebeanspruchung der Längssteife führen.

Dies ergibt sich aus Kompatibilitätsgründen zwischen Schaft und Auflagerlängssteife und hat die Störung des idealen Membranzustandes zur Folge. Die Ursache der ungleichförmig verteilten Schubkräfte zeigt sich an den isoliert betrachteten Einzelkomponenten Schaft und Längssteife, die herausgelöste Gleichgewichtssysteme darstellen. Zuzufolge verschiedener Kraftwirkungen werden Differenzverschiebungszustände zwischen Schale und Längssteife beobachtet. Diese Inkompatibilitäten sind am Gesamtsystem geschlossen. Wesentlich ist vor allem die Kompatibilität in axialer Richtung, sie wird primär durch Schubkräfte zwischen Längssteife und Schale hergestellt.

Übersicht von Kap. 8

Für das kombinierte Schaft-Längssteifen-System werden folgende Untersuchungen angestellt:

- Linear-elastische Systemberechnung inklusive Stabilitätseffekten (Theorie 2. Ordnung) — analytische Lösung durch die Anwendung von Doppelfourierreihenansätzen
- Entwicklung eines baustatischen Analogiemodells — Verbundbalken mit elastischer Verbundfuge
- Bestimmung der Knicklast der Längssteife (Anwendung des Verbundbalkenmodells)
- Sukzessive Anwendung von FE-Berechnungsverfahren zunehmender Darstellungsqualität und Vergleich mit der analytischen Lösung anhand eines Anwendungsbeispiels
- Plastische Grenztragfähigkeit der Auflagerlängssteife und der Schalenwand
- Berücksichtigung und Auswirkung der elastischen Nachgiebigkeit von Schraubstößen

Die Beurteilung der Tragfähigkeit des Schaft-Längssteifen-Systems kann nicht vereinfacht, wie bereits erwähnt, durch Beurteilung der Teiltragfähigkeiten herausgelöster Einzelkomponenten erfolgen (siehe Kap. 1.1.4). Es wird hierbei auf die kinematische Kompatibilität von Schale und Längssteife nicht eingegangen, die statischen Wechselwirkungen der beteiligten Systemkomponenten werden aber

konsequent und konsistent berücksichtigt. Dies geschieht im Sinne des unteren Grenzwerttheorems der plastischen Grenztraglastanalyse. Im späteren (Kap. 8.3) zeigt sich, daß dieses Vorgehen hinsichtlich der Tragfähigkeit der Längssteife, selbst wenn Stabilitätseffekte außer Acht gelassen werden, im allgemeinen unzulässig ist. Die kinematische Kompatibilität ist von Relevanz, es entsteht eine zusätzliche Normalkraft-Biegemomentenbeanspruchung, die im allgemeinen zum vorzeitigen Versagen der Längssteife führt.

Selbst bei Vertikalbelastung kann bei zentrischer Lagerung der Längssteife — zentrische Lagerkraft F_L und gegenwirkende Wandschubbelastung des Schaftes — das Tragverhalten mithilfe eines reinen Membranschubspannungszustandes im Schaft und folglich einer linear veränderlichen Normalkraft in der Längssteife nicht wiedergegeben werden (siehe Kap. 1.1.4). Die Dimensionierung der Einzelteile auf Basis dieses Gleichgewichtsystemes ist im allgemeinen nicht zulässig. Plastische Grenztraglastberechnungen (materiell nichtlineare FE-Berechnungen) zeigen, daß sich dieser Membranschubspannungszustand im plastischen Traglastzustand ausbilden kann, wobei aber sehr hohe plastische Dehnungen in der Schalenwand auftreten. Dies setzt jedoch eine unbegrenzt biegeelastische Auflagerlängssteife voraus, was in praktischen Anwendungen nicht gegeben ist. Im voll ausgebildeten Membrangrenz Zustand würden die Auflagerlängssteifen dann keine Biegemomentenbeanspruchung mehr aufweisen. Eingehende Untersuchungen dazu erfolgen in Kap. 8.4.

Zur linear-elastischen Berechnung des Schaft-Längssteifen-Systems wird ein Rechenmodell entwickelt (Kap. 8.2) und in einem Programm mit dem matrixorientierten Mathematikprogramm MATLAB (1997) umgesetzt. Die Systemberechnungen erfolgen analytisch mittels Doppelfourierreihenansätzen. Durch die Berücksichtigung von Stabilitätseffekten gelingt es, für ein konkretes Anwendungsbeispiel in Kap. 8.3 die elasto-plastische Tragfähigkeit der Auflagerlängssteife, mit Ausbildung eines Fließgelenkes im stärksten beanspruchten Querschnitt, nach Theorie 2. Ordnung in sehr guter Approximation der genauen GMNA-Tragfähigkeiten (ABAQUS (1997)), zu bestimmen.

Das Tragverhalten des Schaft-Längssteifen-Systems kann sodann in einem baustatischen Analogiemodell (Kap. 8.2.2) durch einen zweiteiligen Verbundbalken mit nachgiebiger Verbundfuge mechanisch exakt dargestellt werden. Anhand dieses Modelles wird eine umfassende Parameterstudie zur Erklärung des Tragverhaltens durchgeführt. Mit dem Doppelbalken-Analogiemodell kann auch die Knicklast der Längssteife unter Berücksichtigung der stützenden Wirkung der Schale bestimmt werden und es wird außerdem dadurch das stete Auftreten der einwelligen Knickform der Auflagerlängssteife einsichtig.

Wird das vorzeitige plastische Versagen der Längssteife ausgeschlossen, dann wird die plastische Grenztragfähigkeit der Schalenwand der maßgebende Versagenszustand (Kap. 8.4), bzw. das Beulversagen der Schalenwand. Mit geometrisch nichtlinearen Berechnungen wird untersucht, ob bei Annahme einer zentrischen Auflagerkrafteinleitung in die Auflagerlängssteife die plastische Grenztragfähigkeit der Schale tatsächlich erreicht werden kann oder ob (erwartungsgemäß) vorzeitiges Beulversagen der Schalenwand maßgebend wird.

Horizontale und vertikale Schraubstöße werden mit ihrer linear elastischen Nachgiebigkeit berücksichtigt. Die horizontalen in Umfangsrichtung verlaufenden, geschraubten Stöße der einzelnen Wandsegmente werden hierbei alternativ auch näherungsweise durch orthotrope Ersatzsteifigkeiten der Schalenwandung erfaßt. Die Tragfähigkeiten des Schaft-Längssteifen-Systems werden auch in diesen Fällen wiederum mit nichtlinearen FE-Berechnungen verglichen (Kap. 8.5).

8.2 Vollständige linear-elastische Systemberechnung

8.2.1 Rechenmodell inklusive Stabilitätseffekten

Die Berechnung von unversteiften bzw. versteiften Zylinderschalen in Bild 8-2 kann unter gewissen Voraussetzungen durch die Anwendung von Einfach- bzw. Doppelfourierreihenansätzen erfolgen.

Unversteifte Kreiszyinderschale

Entsprechend den vorliegenden Randbedingungen am oberen und unteren Rand ($v = w = 0$) und durch Doppelreihenentwicklung der Verschiebungen und der Belastungen ist die analytische Lösung für eine Zylinderschale ohne Versteifungen möglich. Als Einschränkungen bezüglich der Anwendbarkeit sind dabei die konstante Wanddicke der Schale und die vorliegenden Randbedingungen zu nennen. Exemplarische Lösungen dazu sind von Flügge (1960) aufbereitet (Bild 8-2.a).

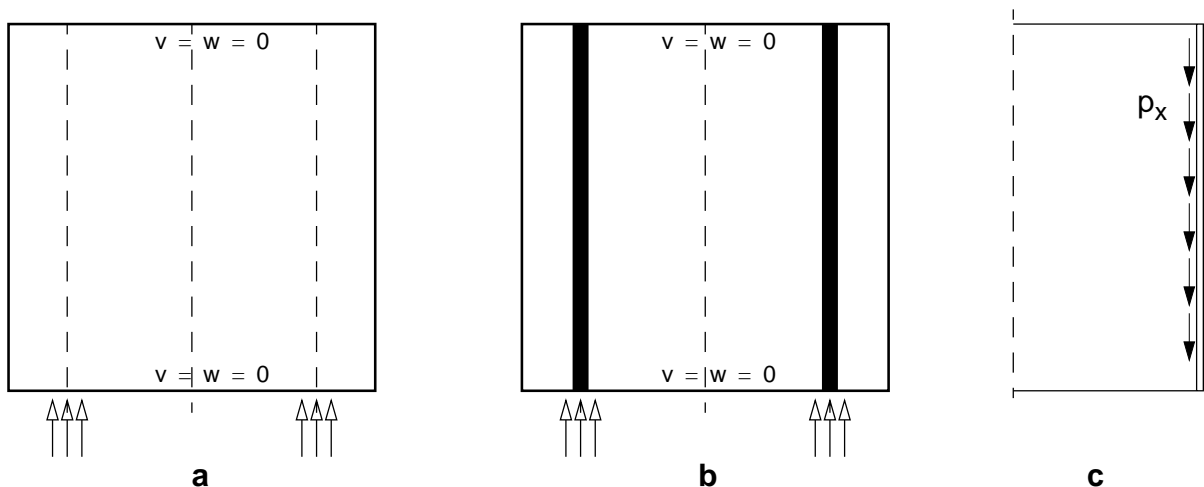


Bild 8-2 Lösung mit Doppelreihenentwicklung — **a.** unversteifte Kreiszyinderschale, **b.** Kreiszyinderschale mit diskreten Längssteifen und **c.** (exemplarische) Wandschubbelastung

Längsversteifte Kreiszyinderschale

Die Zylinderschale ist in Längsrichtung über die volle Länge diskret versteift, es liegt ein System aus Schalensegmenten und Versteifungsträgern vor. Durch die Randbedingungen $v = w = 0$ entspricht das resultierende Tragverhalten demjenigen der klassischen Tonnenschale. Die Randbedingungen repräsentieren starre Endquerscheiben. Die Lösungsmethodik der Tonnenschale durch Fourierreihenansatz in Längsrichtung (Bild 8-3) bewirkt mathematisch die Reduktion auf ein 1D-Problem, welches für jede Längswellenzahl n in Umfangsrichtung separat zu lösen ist.

Das Berechnungsmodell in Bild 8-3 enthält folgende Strukturelemente:

- Längssteifen
- Tonnenschalensegmente
- Verbundfugenelement zwischen Schale und Längssteife

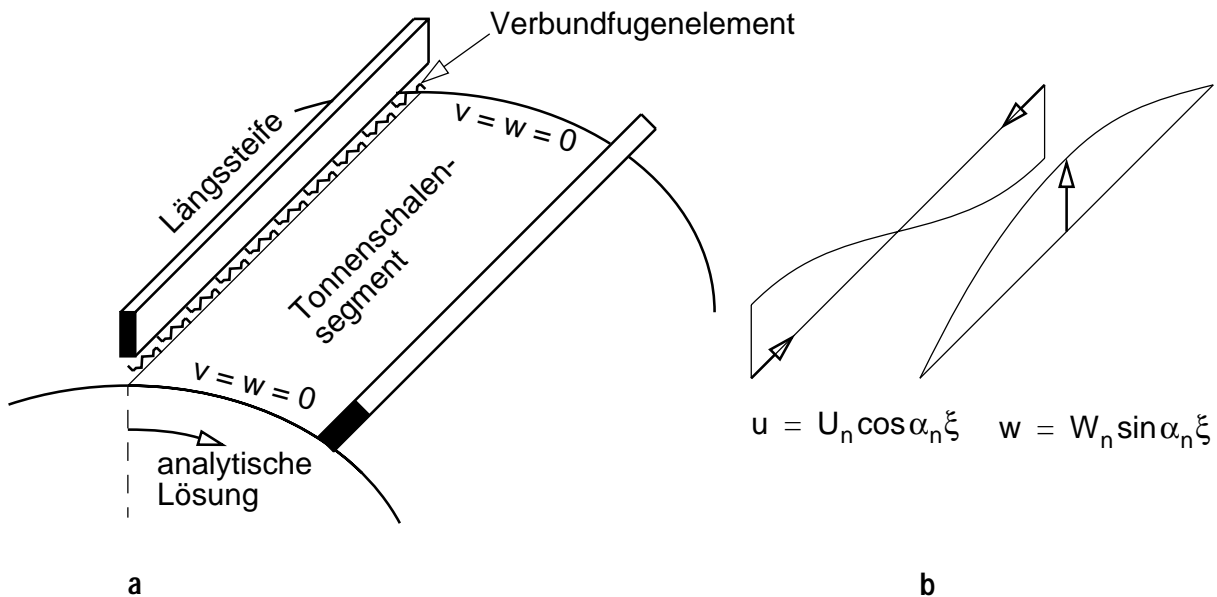


Bild 8-3 Lösungsmethodik der Tonnenschale — **a.** Strukturelemente und **b.** Fourierreihenansatz in Längsrichtung für die Verbundfugenverschiebungen

In der baustatischen Problembehandlung wird die Längssteife als schubnachgiebiger Biegebalken, die Kreiszylinderschale als schwach gekrümmte und transversal schubstarre Schale modelliert. Das Verbundfugenelement besteht aus linienförmig verteilten entkoppelten elastischen Axial- und Transversalfedersteifigkeiten.

Verbindung von Längssteife und Schale im Rechenmodell

Die tatsächliche konstruktive Verbindung von Schale und Längssteife erfolgt entweder geschraubt oder geschweißt (Bild 8-4). Dabei liegen zwei zum Längssteifenmeridian exzentrische Anschlußlinien vor. Im Rechenmodell liegt die theoretische Anschlußlinie durch die im folgenden beschriebene Bestimmung der Steifigkeitsmatrix der Schale (siehe Kap. 8.2.1.1) über die Flexibilitätsmatrix zufolge von Einheitskräften idealisiert im Auflagerlängssteifenmeridian.

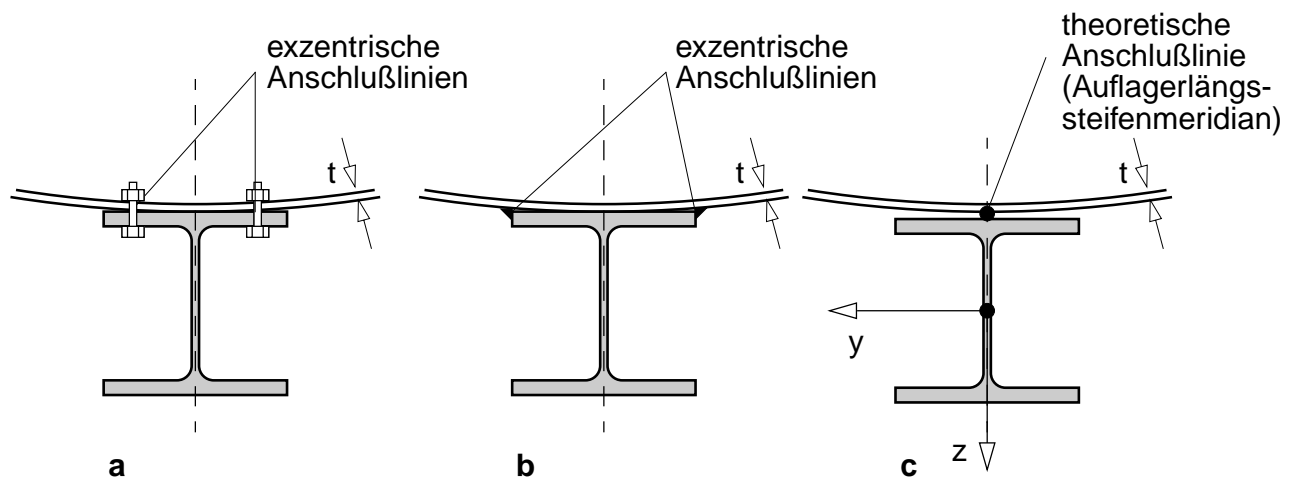


Bild 8-4 Lage der Anschlußlinie — **a.** bei geschraubter Verbindung bzw. **b.** geschweißter Verbindung und **b.** Idealisierung des Rechenmodelles bei außenbündiger Auflagerlängssteifenanordnung

8.2.1.1 Analytische Lösungsmethodik mit Doppelfourierreihenansätzen

Die Reihenentwicklung in Längsrichtung wird für alle Verschiebungs-, Schnittkraft- und Belastungskomponenten vorgenommen. In Umfangsrichtung liegt nun für jedes Glied n eine gewöhnliche Differentialgleichung 8. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor, welche exakt gelöst werden kann. Die Lösungsmethodik entspricht der klassischen Tonnenschalenlösung (siehe Anhang A.1).

Durch die Spezialisierung auf den Fall diskreter äquidistanter Längssteifen und die Voraussetzung von Symmetriebedingungen in den Auflagerlängssteifenmeridianen und den Schalenmittenmeridianen gelingt es jedoch auch in Umfangsrichtung die analytische Lösung zu umgehen.

Die analytische Lösung in Umfangsrichtung kann nämlich unter diesen Voraussetzungen ebenfalls durch einen Fourierreihenansatz dargestellt werden, was in Summe daher auf eine Lösungsmethodik mittels Fourierdoppelreihenentwicklung für die Schale und Fouriereinfachreihenentwicklung für die Längssteife hinausläuft.

Semi-analytische Lösung durch Doppel-Fourierreihenentwicklung

Das Zusammenwirken von Schale und Längssteifen erfolgt in den äquidistant angeordneten Auflagerlängssteifenmeridianen. Für die Lösung mittels Deformationsmethode muß die Steifigkeitsmatrix der Schale für jedes Glied n der Reihenentwicklung in Längsrichtung bestimmt werden.

Die Gesamtlösung wird in einem zweistufigen Vorgang bestimmt. Zunächst werden Einheitskontaktkraftverläufe (Bild 8-5) in Axialrichtung bzw. Radialrichtung aufgebracht. Die zugehörigen Verformungen (Bild 8-6) in den Längssteifenmeridianen ergeben die Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} der Schale. Durch Invertierung folgt die Steifigkeitsmatrix der Schale $\mathbf{K}_{S,n}$ bezüglich der Einheitskontaktkraftverläufe längs der Längssteifenmeridiane, und zwar separat für jedes Reihenglied n in Axialrichtung.

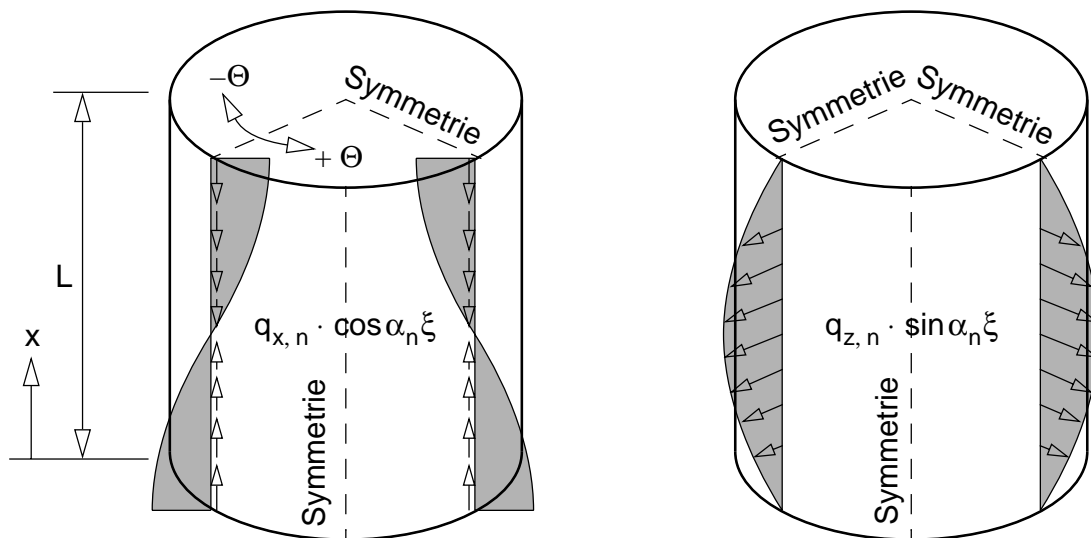


Bild 8-5 Einheitskontaktkraftverläufe in Axial- und Radialrichtung zwischen Längssteifen und Schale

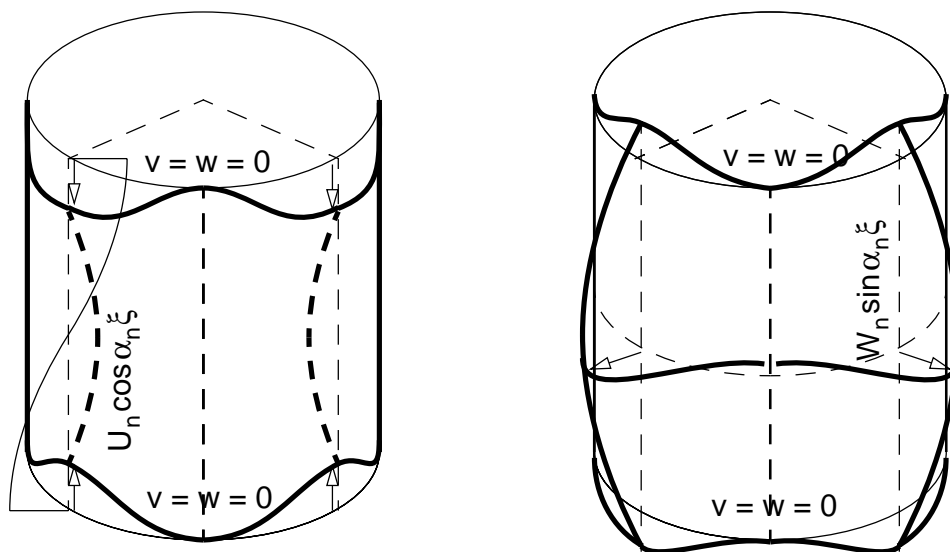


Bild 8-6 Verformungen der Schalenwand zufolge der Einheitskontaktkraftverläufe

Gesucht ist die Steifigkeitsmatrix der Schalenwand für die Einheitskontaktkraftverläufe $q_{x,n}$ und $q_{z,n}$ bezüglich der Einheitsverformungen U_n bzw. W_n - Verformungsvektor $\mathbf{u}_n = [U_n ; W_n]^T$ — entlang der Längssteifenmeridiane:

$$\mathbf{K}_{s,n} \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{r} \quad (8-1)$$

Der Kontaktkraftamplitudenvektor \mathbf{r} enthält die in den Längssteifenmeridianen angreifenden Amplituden der Schneidenlasten in Axial- und Radialrichtung (Bild 8-5):

$$\mathbf{r} = [q_{x,n} ; q_{z,n}]^T \quad (8-2)$$

Zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrix nach der hier gewählten Methodik muß vorab die Flexibilitätsmatrix der Schale bestimmt werden.

Bestimmung der Flexibilitätsmatrix

Die Bestimmung der Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} erfolgt durch die Reihenentwicklung der Einheitskräfte $q_{x,n}$ bzw. $q_{z,n}$ und der Verschiebungsgrößen U_n bzw. W_n (Gl. (8-3a) und Gl. (8-3b)) in Umfangsrichtung. In der Flexibilitätsmatrix Gl. (8-3c) werden die Axial- und Radialverschiebungsamplituden im Längssteifenmeridian der Umfangsreihenentwicklung aufsummiert (Gl. (8-3c)). Die Tangentialverschiebung V_n wird aufgrund der angenommenen Symmetriebedingungen und der entsprechenden Doppelfourierreihenansätze in den Längssteifenmeridianen ($\Theta = 0 / \pi/n_{St} / 2\pi/n_{St} / \dots$) zu null.

$$q_{x,n} = \sum_m q_{x,n,m} \cos m\Theta \quad (8-3a)$$

$$q_{z,n} = \sum_m q_{z,n,m} \cos m\Theta$$

$$U_n = \sum_m U_{n,m} \cos m\Theta$$

$$V_n = \sum_m V_{n,m} \sin m\Theta \quad (8-3b)$$

$$W_n = \sum_m W_{n,m} \cos m\Theta$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix}_{q_{x,n}} ; \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix}_{q_{z,n}} = \begin{bmatrix} \sum_m U_{n,m} \\ \sum_m W_{n,m} \end{bmatrix}_{q_{x,n,m}} ; \begin{bmatrix} U_{n,m} \\ W_{n,m} \end{bmatrix}_{q_{z,n,m}} \quad (8-3c)$$

Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix für jedes Glied n der Hauptreihenentwicklung in Axialrichtung folgt durch Invertierung der Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} .

Im vorliegenden Fall wird die Schale in Axial- und Radialrichtung durch die Einheitskontaktkräfte $q_{x,n}$ bzw. $q_{z,n}$ belastet. Die Flexibilitätsmatrix $\mathbf{F}_{S,n}$, in der die auftretenden Verschiebungsamplituden des Auflagerlängssteifenmeridians einsortiert werden, ist eine 3x2 Matrix (3 Verschiebungsgrößen bei 2 Kontaktkräften) wobei die Umfangsverschiebungsamplituden V_n aufgrund der Verschiebungsannahmen stets zu Null werden. Die Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} enthält die erste und dritte Zeile von $\mathbf{F}_{S,n}$ und stellt somit die reduzierte Flexibilitätsmatrix $\mathbf{F}_{S,n,red}$ in Gl. (8-4b) dar.

Die Flexibilitätsmatrix $\mathbf{F}_{S,n}$ der Schale für das aktuelle Reihenglied n ergibt sich durch die Aufsummation der Nachgiebigkeiten $\mathbf{F}_{S,n,m}$ der Umfangsreihenentwicklung. Die Nachgiebigkeit $\mathbf{F}_{S,n}$ für ein bestimmtes Reihenglied n ergibt sich durch Multiplikation der invertierten

Schalensteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S,n,m}$ mit den Einheitskontaktkraftvektoren $\mathbf{q}_{x,n,m}$ und $\mathbf{q}_{z,n,m}$ und der Aufsummierung dieser Matrixprodukte (Gl. (8-4a)).

$$\mathbf{F}_{S,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{F}_{S,n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{K}_{S,n,m}^{-1} \cdot \left[\mathbf{q}_{x,n,m} \quad ; \quad \mathbf{q}_{z,n,m} \right] \quad (8-4a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{S,n, \text{red}} \quad (8-4b)$$

$$\mathbf{K}_{S,n} = \mathbf{F}^{-1} \quad (8-4c)$$

8.2.1.2 Last- und Verschiebungsansätze der Schale

Die Verschiebungsansätze der Schale sind in Bild 8-7 nochmals dargestellt. Die Reihenentwicklung der Schalenverschiebungen und der zugehörigen Belastungen erfolgt mittels Doppelfourierreihen durch Reihenentwicklung in Axialrichtung und in Umfangsrichtung:

$$\begin{aligned} u &= \sum_n \sum_m U_{n,m} \cdot \cos m\Theta \cdot \cos \alpha_n \xi & p_x &= \sum_n \sum_m p_{x,n,m} \cdot \cos m\Theta \cdot \cos \alpha_n \xi \\ v &= \sum_n \sum_m V_{n,m} \cdot \sin m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi & p_\Theta &= \sum_n \sum_m p_{\Theta,n,m} \cdot \sin m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi \\ w &= \sum_n \sum_m W_{n,m} \cdot \cos m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi & p_n &= \sum_n \sum_m p_{n,n,m} \cdot \cos m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi \end{aligned} \quad (8-5)$$

Die Schalenschnittgrößen werden in entsprechend zugehörige Doppelfourierreihen entwickelt:

$$\begin{aligned} n_x &= \sum_n \sum_m n_{x,n,m} \cdot \cos m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi \\ n_\Theta &= \sum_n \sum_m n_{\Theta,n,m} \cdot \sin m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi \\ n_{x\Theta} &= \sum_n \sum_m n_{x\Theta,n,m} \cdot \sin m\Theta \cdot \cos \alpha_n \xi \\ m_x &= \sum_n \sum_m m_{x,n,m} \cdot \cos m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi \\ m_\Theta &= \sum_n \sum_m m_{\Theta,n,m} \cdot \sin m\Theta \cdot \sin \alpha_n \xi \\ m_{x\Theta} &= \sum_n \sum_m m_{x\Theta,n,m} \cdot \sin m\Theta \cdot \cos \alpha_n \xi \end{aligned} \quad (8-6)$$

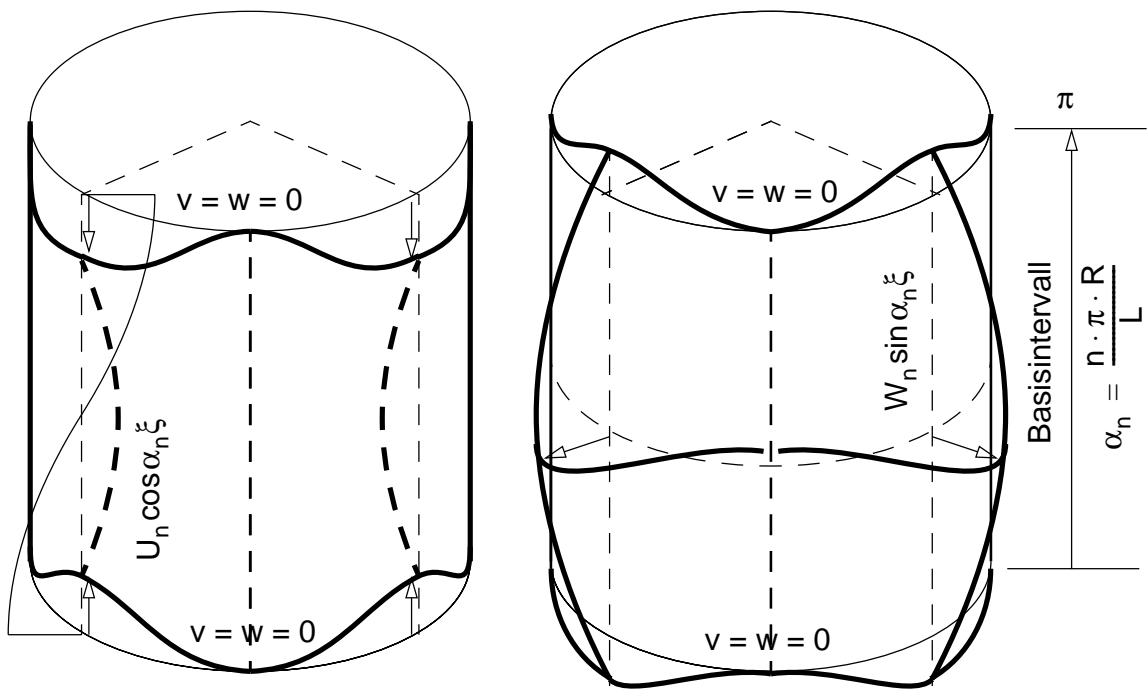


Bild 8-7 Verschiebungsansatz in den Längsteifenmeridianen

8.2.1.3 Grundgleichungen der Schale bei Doppelfourierreihenlösung

Die Schale wird als transversal querschubstarre orthotrope Kreiszyinderschale berücksichtigt. Ausgangspunkt zur Bestimmung der Schalensteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S,n}$ ist die Steifigkeits-differentialoperatormatrix \mathbf{K}_S (entsprechend Anhang A.1) für die orthotrope Kreiszyinderschale.

Die Bezugswerte der Materialsteifigkeiten sind die axiale Dehnsteifigkeit D_x und die Umfangsbiegesteifigkeit K_Θ , die restlichen Materialsteifigkeiten sind durch die bezogenen Steifigkeitsparameter $\nu = D_\nu/D_x$, $\rho = D_\Theta/D_x$, $\eta = D_{x\Theta}/D_x$ bzw. $\lambda = K_x/K_\Theta$, $\mu = K_\nu/K_\Theta$, $\zeta = K_{x\Theta}/K_\Theta$ definiert.

$$\mathbf{K}_S = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} ()_{,\xi\xi} + \eta ()_{,\Theta\Theta} & ()_{,\xi\Theta}(\eta + \nu) & \nu ()_{,\xi} \\ (\eta + \nu)()_{,\xi\Theta} & \eta ()_{,\xi\xi} + \rho ()_{,\Theta\Theta} & \rho ()_{,\Theta} \\ -\nu ()_{,\xi} & -\rho ()_{,\Theta} & -\rho \end{bmatrix} + \frac{K_\Theta}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta ()_{,\xi\xi} + ()_{,\Theta\Theta} & -((2\zeta + \mu)(()_{,\xi\xi\Theta} + ()_{,\Theta\Theta})) \\ 0 & (2\zeta + \mu)(()_{,\xi\xi\Theta} + ()_{,\Theta\Theta}) & -\lambda ()_{,\Theta} - 2((2\zeta + \mu)()_{,\Theta\Theta})()_{,\xi\xi} - ()_{,\Theta\Theta} \end{bmatrix} \quad (8-7)$$

Nach Einsetzen der Verschiebungs- und Lastansätze (Gl. (8-5)) in das Differentialgleichungssystem $\mathbf{K}_S \cdot \mathbf{u} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$ entsteht die algebraische Schalensteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S, mn}$ für die Wellenkombination (m, n) . Der dimensionslose Faktor k ist dabei die auf D_x bezogene Umfangsbiegesteifigkeit K_Θ der Kreiszyinderschale.

$$k = K_\Theta / (D_x \cdot R^2) \tag{8-8a}$$

$$-\mathbf{K}_{S, mn} = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} \alpha_n^2 + \eta m^2 & -\alpha_n m(v + \eta) & -\alpha_n v \\ -\alpha_n m(v + \eta) & m^2(\rho + k) + (\alpha_n^2 \eta + \zeta k) & m(\rho + m^2 k) + \alpha_n^2 m k(\mu + 2\zeta) \\ -\alpha_n v & m(\rho + m^2 k) + \alpha_n^2 m k(\mu + 2\zeta) & \rho + m^4 k + \alpha_n^4 \lambda k + 2\alpha_n^2 m^2 k(\mu + 2\zeta) \end{bmatrix} \tag{8-8b}$$

Stabilitätseffekte (Theorie 2. Ordnung)

Stabilitätseffekte nach Theorie 2. Ordnung werden in klassischer Form analog der späteren Vorgehensweise für die Längssteife zufolge konstanter Axial- und Umfangsmembrankräfte berücksichtigt. In das Gleichgewicht am verformten System gehen die Abtriebsterme von Axialmembrankräften n_x und Umfangsmembrankräften n_Θ ein. Die geometrische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S, g}$ ist von Flügge (1960) übernommen, die Abtriebsterme stammen von konstanten Initialspannungen $n_{x, init}$ und $n_{\Theta, init}$ (siehe Bild 8-8).

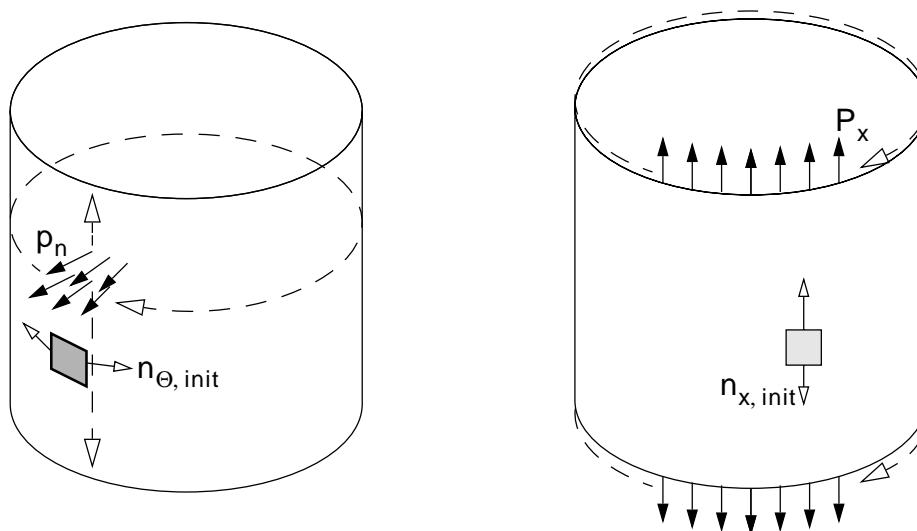


Bild 8-8 Initialspannungen der Kreiszyinderschale

Der geometrische Steifigkeitsoperator $\mathbf{K}_{s,g}$ besteht aus den zwei Anteilen zugehörig zu den beiden Initialspannungen. Zu beachten ist die Unsymmetrie zufolge der Umfangskräfte $n_{\theta,init}$ (Gl. (8-9) nach Flügge (1960)). Es fehlt jener Abtriebsterm (markiert mit \times in Gl. (8-9)) zufolge Radialdruck p_n , der am verformten Schalenelement durch die Radialverschiebung w in Axialrichtung hervorgerufen wird (Bild 8-9.b).

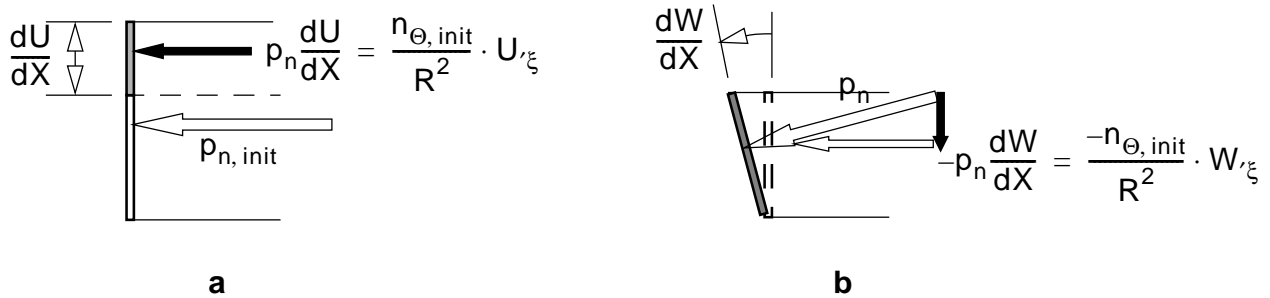


Bild 8-9 Abtriebskräfte am verformten Schalenelement bei hydrostatischer Radialdruckbelastung p_n — **a.** Radialbelastung durch axiale und **b.** Axialbelastung durch die radiale Schalenverformung

$$\mathbf{K}_{s,g} = \frac{n_{x,init}}{R^2} \cdot \begin{bmatrix} ()_{,\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & ()_{,\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 & ()_{,\xi\xi} \end{bmatrix} + \frac{n_{\theta,init}}{R^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & ()_{,\theta\theta} & ()_{,\theta} \\ ()_{,\xi} & -()_{,\theta} & ()_{,\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (8-9)$$

Für die Doppelreihenlösung ergibt sich die Differenzsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{s,g,n,m}$, dabei erfolgt eine bewußte Vernachlässigung des Gliedes mit der Ableitung $()_{,\xi}$ (grau markiert in Gl. (8-9)) zufolge der Umfangsmembrankraft $n_{\theta,init}$ um eine symmetrische Abtriebsmatrix zu erhalten. Die geometrische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{s,g,n,m}$ nach Theorie 2. Ordnung ist in Gl. (8-10) dargestellt.

$$-\mathbf{K}_{s,g,n,m} = \frac{n_{x,init}}{R^2} \cdot \alpha_n^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{n_{\theta,init}}{R^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 & m \\ 0 & m & m^2 \end{bmatrix} \quad (8-10)$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{s,II,n,m} = \mathbf{K}_{s,n,m} + \mathbf{K}_{s,g,n,m}$ nach Theorie 2. Ordnung ist in Gl. (8-11) dargestellt. Die geometrischen Anteile der Steifigkeitsmatrix sind dabei grau hinterlegt.

$$-\mathbf{K}_{S, II, n, m} = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} \alpha_n^2 + \eta m^2 + \frac{n_{x, \text{init}}}{D_x} \alpha_n^2 & -\alpha_n m (v + \eta) & -\alpha_n v \\ -\alpha_n m (v + \eta) & m^2 (\rho + k) + (\alpha_n^2 \eta + \zeta k) + \frac{n_{x, \text{init}}}{D_x} \alpha_n^2 + \frac{n_{\Theta, \text{init}}}{D_x} m^2 & m(\rho + m^2 k) + \alpha_n^2 m k (\mu + 2\zeta) + \frac{n_{\Theta, \text{init}}}{D_x} m \\ -\alpha_n v & m(\rho + m^2 k) + \alpha_n^2 m k (\mu + 2\zeta) + \frac{n_{\Theta, \text{init}}}{D_x} m & \rho + m^4 k + \alpha_n^4 \lambda k + 2\alpha_n^2 m^2 k (\mu + 2\zeta) + \frac{n_{x, \text{init}}}{D_x} \alpha_n^2 + \frac{n_{\Theta, \text{init}}}{D_x} m^2 \end{bmatrix} \quad (8-11)$$

8.2.1.4 Steifigkeitsmatrix der Schale für eine Axialwellenzahl n

Die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix erfolgt, wie bereits zuvor eingehend beschrieben, in einem zweistufigen Vorgang. Zuerst werden in den äquidistanten Längssteifenmeridianen die Einheitskräfte der aktuellen Wellenzahl n aufgebracht. Die Einheitskräfte werden in eine Fourierreihe (Cosinusreihe) in Umfangsrichtung entwickelt. Die Koeffizienten der Reihenentwicklung ergeben sich wie folgt:

$$\sum_m a_m \cdot \cos m\Theta = \frac{n_{St}}{2\pi} + \sum_m \frac{n_{St}}{\pi} \cdot \cos m\Theta \quad (8-12)$$

Daraus resultiert durch Aufsummieren der Verformungen in Umfangsrichtung die Flexibilitätsmatrix für die Einheitskraftzustände.

Flexibilitätsmatrix

Die Flexibilitätsmatrix \mathbf{F} zufolge den Einheitskräften $q_{x, n}$ bzw. $q_{z, n}$ in den Längssteifenmeridianen ($\Theta = 0^\circ, 2\pi/n_{st}, \dots$) erfolgt durch Aufsummation der Verformungen der einzelnen Reihenglieder. Die Verformungen für ein Umfangsreihenglied ergeben sich aus der Multiplikation der inversen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S, n, m}^{-1}$ mit dem Reihenkoeffizient a_m und dem jeweiligen Einheitskraftvektor in Gl. (8-13b) und Gl. (8-13c).

$$\mathbf{F}_{S, n, \text{red}} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (8-13a)$$

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ 0 \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum U_{n,m} \\ 0 \\ \sum W_{n,m} \end{bmatrix}_{q_x} = \sum_m \mathbf{K}_{S,n,m}^{-1} \cdot \mathbf{a}_m \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-13b)$$

$$\begin{bmatrix} F_{12} \\ 0 \\ F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum U_{n,m} \\ 0 \\ \sum W_{n,m} \end{bmatrix}_{q_z} = \sum_m \mathbf{K}_{S,n,m}^{-1} \cdot \mathbf{a}_m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8-13c)$$

Steifigkeitsmatrix nach Theorie 1. und 2. Ordnung

Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S,II,n}$ nach Theorie 2. Ordnung wird durch Invertierung der Flexibilitätsmatrix $\mathbf{F}_{S,II,n}$ nach Theorie 2. Ordnung bestimmt, sie kann nicht direkt aus der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S,n}$ nach Theorie 1. Ordnung und einer geometrischen Steifigkeitsmatrix bestimmt werden (siehe Gl. (8-15)).

$$\mathbf{F}_{S,II,n} = \sum_m \underbrace{\mathbf{K}_{S,II,n,m}^{-1}}_{\mathbf{K}_{S,n,m} + \mathbf{K}_{S,g,n,m}} \cdot \mathbf{a}_m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-14a)$$

$$\mathbf{K}_{S,II,n} = \mathbf{F}_{S,II,n,red}^{-1} \quad (8-14b)$$

Die geometrische Differenzsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{S,g,n}$ kann jetzt aus der Differenz von Steifigkeitsmatrix nach 1. und 2. Ordnung bestimmt werden:

$$\mathbf{K}_{S,g,n} = \mathbf{K}_{S,II,n} - \mathbf{K}_{S,n} = \mathbf{F}_{S,II,n,red}^{-1} - \mathbf{F}_{S,n,red}^{-1} \quad (8-15)$$

Im erstellten Berechnungsprogramm wird die Steifigkeitsmatrix der Schale je nach Erfordernis nach Theorie 1. bzw. 2. Ordnung bestimmt. Eine gesonderte Berechnung der geometrischen Steifigkeitsmatrix erfolgt nicht, da dies für die weitere Durchführung der Berechnung nicht erforderlich ist.

8.2.1.5 Last- und Verschiebungsansätze der Längssteife

Schubnachgiebiger Biegebalken

Die Verschiebungsansätze der Längssteife sind in Bild 8-10 dargestellt. Die Längssteife wird als schubnachgiebiger Biegebalken erfaßt, die 3 Verformungsgrößen Axial- und Transversalverschiebung (U , W) bzw. der Querschnittsdrehwinkel β_y sind mittels Fourierreihenentwicklung wiedergegeben.

$$\begin{aligned} U &= \sum_n U_n \cdot \cos \alpha_n \xi \\ W &= \sum_n W_n \sin \alpha_n \xi \\ \beta_y &= \sum_n \beta_{y,n} \cdot \cos \alpha_n \xi \end{aligned} \quad (8-16)$$

Die Axialverschiebung und der Drehwinkel werden mittels einer Cosinusreihe und die Transversalverschiebung mittels einer Sinusreihe wiedergegeben. Die bezogene Längsordinate $\xi = x/R$ liegt zwischen 0 und L/R , daraus ergibt sich der Reihenkoeffizient α_n :

$$\alpha_n = \frac{n \cdot \pi \cdot R}{L} \quad (8-17)$$

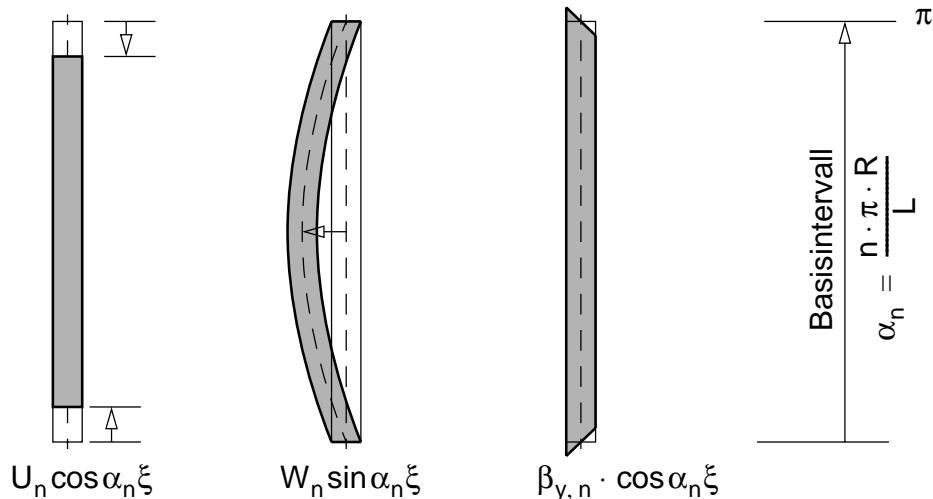


Bild 8-10 Verschiebungsansätze der Längssteife

Mit den Verschiebungsansätzen verbunden sind die Reihenentwicklungen der Belastungs- und Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} q_x &= \sum_n q_{x,n} \cdot \cos \alpha_n \xi & N &= \sum_n N_n \cdot \sin \alpha_n \xi \\ q_z &= \sum_n q_{z,n} \cdot \sin \alpha_n \xi & Q &= \sum_n Q_n \cdot \cos \alpha_n \xi \\ m &= \sum_n m_n \cdot \cos \alpha_n \xi & M &= \sum_n M_n \cdot \sin \alpha_n \xi \end{aligned} \quad (8-18)$$

8.2.1.6 Grundgleichungen der Längssteife bei Einfachfourierreihenlösung

Schubnachgiebiger Biegebalken

Die Tragwirkung der Längssteife liegt aufgrund der angenommenen Symmetriebedingungen im Längssteifenmeridian als 2D-Biegebalken mit Berücksichtigung der Normalkraft- und Schubverformung vor. Das Zusammenwirken von Längssteife, Kreiszylinderschale und Fugenelement erfolgt in der exzentrischen Anschlußfuge A, die Transformation der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors der Längssteife ist im weiteren notwendig.

Im folgenden sind die drei Grundgleichungen für diesen Balken dargestellt. Alle Größen sind auf die Schwerpunktslinie des Balkens bezogen.

Die Beschreibung der Kinematik erfolgt mit zwei Verschiebungsparametern U und W und dem Drehparameter β_y in Bild 8-11. Die Verschiebungen — die Verschiebung v senkrecht zur Balkenebene ist Null — eines beliebigen Punktes der Längssteife sind in Gl. (8-19) beschrieben.

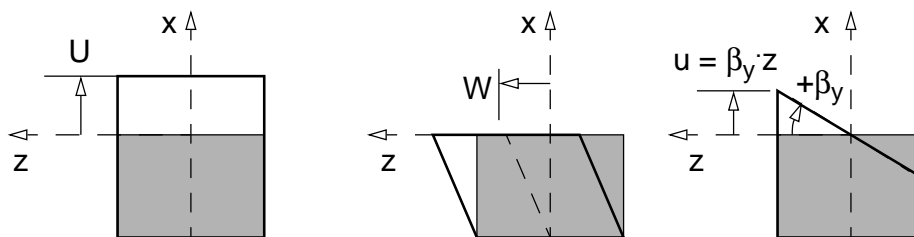


Bild 8-11 Kinematik des Balkenelementes

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ W \\ \beta_y \end{bmatrix} \tag{8-19}$$

In den folgenden Gleichungen erfolgen die Ableitungen nach der bezogenen Laufvariablen $\xi = x/R$.

$$\left(\cdot \right)_\xi = \frac{\partial}{\partial x/R} \tag{8-20}$$

Die Darstellung aller Gleichungen erfolgt dimensionsrein. Der Drehwinkel β_y und die Biegekrümmung κ_y sind mit dem Radius R multipliziert, somit sind alle Einträge im Dehnungsvektor \mathbf{e} dimensionslos und jene im Verschiebungsvektor \mathbf{u} weisen die Dimension [m] der Längeneinheit auf. Das Biegemoment M bzw. die Momentenbelastung m werden durch den Radius R dividiert, die Einträge im Schnittkraftvektor \mathbf{n} haben die Dimension [N] der Kräfteinheit. Die Materialmatrix \mathbf{D} ist ebenfalls mit der Dimension [N] behaftet.

Die Verzerrungsvektor \mathbf{e} des Balkens (Gl. (8-21)) ergibt sich durch Anwendung der Verzerrungsdifferentialoperatormatrix \mathbf{B} auf den Verschiebungsvektor \mathbf{u} in Gl. (8-21).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa_y \cdot R \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} = \frac{1}{R} \underbrace{\begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\xi} & 1 \\ 0 & 0 & ()'_{\xi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \\ \beta_y \cdot R \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (8-21)$$

Die zugehörigen Materialgleichungen (Gl. (8-22)) beschreiben den Zusammenhang von Schnittgrößen und Verzerrungen mittels der Materialmatrix **D**.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M/R \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA_s & 0 \\ 0 & 0 & EI_{zz}/R^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa_y \cdot R \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} \quad (8-22)$$

Die Gleichgewichtsbeziehungen am infinitesimalen Balkenelement sind in Bild 8-12 graphisch dargestellt und in Matrixform in Gl. (8-23) wiedergegeben.

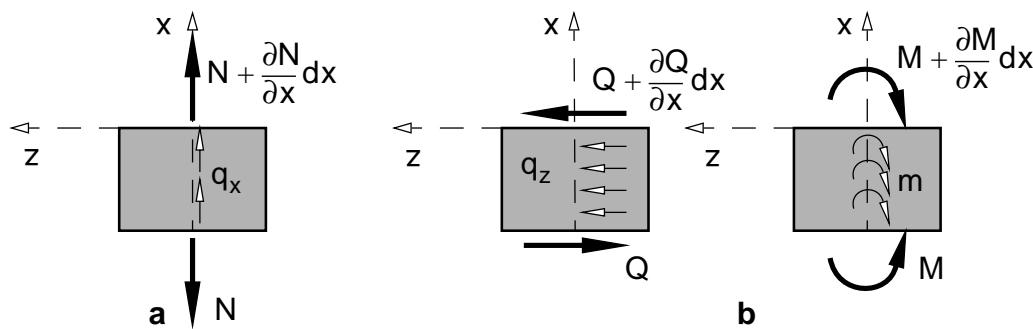


Bild 8-12 a. Längsgleichgewicht und b. Transversal- und Momentengleichgewicht am Balkenelement

$$\underbrace{\frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & -1 & ()'_{\xi} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M/R \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} + \underbrace{\begin{bmatrix} q_x \\ q_z \\ m \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8-23)$$

Die Verknüpfung der drei Grundgleichungen liefert die Grundgleichung der Deformationsmethode in Gl. (8-24). Dabei ist $\mathbf{K}_B = \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$ die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix des Balkenelementes.

$$\mathbf{K}_B = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} EA()'_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & GA_s()'_{\xi\xi} & GA_s()'_{\xi} \\ 0 & -GA_s()'_{\xi} & \left(\frac{EI_{zz}}{R^2}()'_{\xi\xi\xi} - GA_s \right) \end{bmatrix} \quad (8-24)$$

Die Anwendung des Verschiebungsansatzes für ein Reihenglied n liefert die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{B,n}$ der Längssteife in Gl. (8-25). Dabei ist zu beachten, daß diese Steifigkeitsmatrix zur Gänze negative Glieder enthält.

$$-\mathbf{K}_{B,n} = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} EA \cdot \alpha_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & GA_s \cdot \alpha_n^2 & GA_s \cdot \alpha_n \\ 0 & GA_s \cdot \alpha_n & \left(\frac{EI_{zz}}{R^2} \alpha_n^2 + GA_s \right) \end{bmatrix} \quad (8-25)$$

Berücksichtigung von Stabilitätseffekten (Theorie 2.Ordnung)

Effekte Theorie 2. Ordnung, also das Gleichgewicht am verformten System wird in vereinfachter Form — also in Form der klassischen Theorie 2. Ordnung — insofern berücksichtigt, als die Abtriebssterme bezüglich einer über die Balkenlänge konstanten mittleren Normalkraft N_{init} (Initialnormalkraft bzw. Vorspannkraft) anstelle der am gekoppelten Schale-Steife-System beträchtlich veränderlich wirksamen Normalkraftverteilung in der Längssteife berücksichtigt werden.

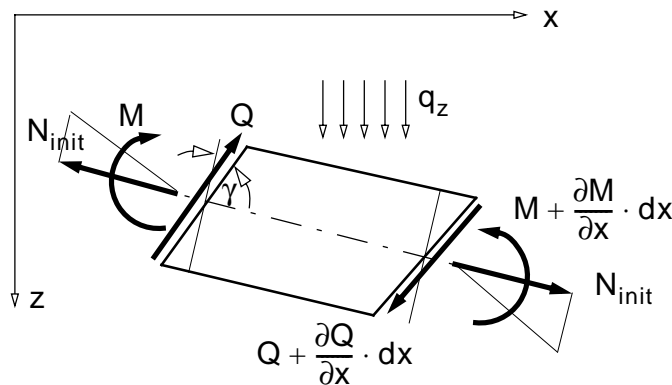


Bild 8-13 Gleichgewicht am verformten Balkenelement

Der Abtriebsterm in Bild 8-13, der durch die Normalkraft N_{init} hervorgerufen wird, ist im transversalen Kräftegleichgewicht enthalten. Die Transversalkraft T hängt von Querkraft Q , Normalkraft N_{init} und der Neigung w_x des Querschnittes ab.

$$T = Q - N_{init} \cdot w_x \quad (8-26a)$$

$$T_x + q_z = 0 \quad (8-26b)$$

$$Q' - N_{init} \cdot w_{xx} + q_z = 0 \quad (8-26c)$$

Der Steifigkeitsterm zufolge Theorie 2. Ordnung-Effekte (“Abtriebsterm“) wird in der Grundgleichung der Deformationsmethode durch die geometrische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{B,g}$ in Gl. (8-27a) inkludiert.

$$(\mathbf{K}_B + \mathbf{K}_{B,g}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (8-27a)$$

$$\mathbf{K}_{B,g} = \frac{N_{init}}{R^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-27b)$$

Für den Verschiebungsansatz in Längsrichtung (siehe Gl. (8-16)) und nach Einarbeiten der Vorzeichenkorrektur folgt für ein Glied n der Reihenentwicklung die Differenzsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{B,g,n}$ in Gl. (8-28).

$$-\mathbf{K}_{B,g,n} = \frac{N_{init}}{R^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-28)$$

Die vollständige Steifigkeitsmatrix nach Theorie 2. Ordnung für das Balkenelement hat damit folgenden Aufbau:

$$-\mathbf{K}_{B,II,n} = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} EA \cdot \alpha_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & GA_s \cdot \alpha_n^2 & GA_s \cdot \alpha_n \\ 0 & GA_s \cdot \alpha_n & \frac{EI_{zz}}{R^2} \alpha_n^2 + GA_s \end{bmatrix} + \frac{N_{init}}{R^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-29)$$

$$-\mathbf{K}_{B,II,n} = \underbrace{\hspace{15em}}_{-\mathbf{K}_{B,n}} + \underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{K}_{B,g,n}}$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix (Berücksichtigung der exzentrischen Verbundfuge)

Das Zusammenwirken mit der Schale bzw. dem Fugenelement erfolgt in der exzentrischen Faser A (Anschlußfuge). Die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{B,A}$ bezüglich dieser exzentrisch zur Schwerpunktslinie gelegenen Faser A erfordert einerseits die Transformation des Kräftegleichgewichtes und andererseits die Verwendung der Verformungen dieser Anschlußfuge.

$$\mathbf{K}_{B,A} \cdot \mathbf{u}_A + \mathbf{p}_A = \mathbf{0} \quad (8-30)$$

Der Zusammenhang der Verschiebungen der Schwerpunktslinie und der Anschlußfuge A, der aus der Kinematik des Balkenelementes folgt, ist durch die Transformationsmatrix \mathbf{T} in Gl. (8-31a) gegeben, die Transformation des Kräftegleichgewichtes durch die transponierte Transformationsmatrix \mathbf{T}^T in Gl. (8-31b). Der Abstand e der Anschlußfuge ist positiv definiert von der Schwerpunktslinie in Richtung der lokalen z -Achse des Balkenelementes. Die Zusammenhänge sind in graphischer Form in Bild 8-14 und Bild 8-15 dargestellt. Durch die Anwendung von \mathbf{T}^T und \mathbf{T} auf die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_B wird die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{B,A}$ und durch die Anwendung von \mathbf{T}^T der Lastvektor von \mathbf{p}_A in Gl. (8-31c) bestimmt.

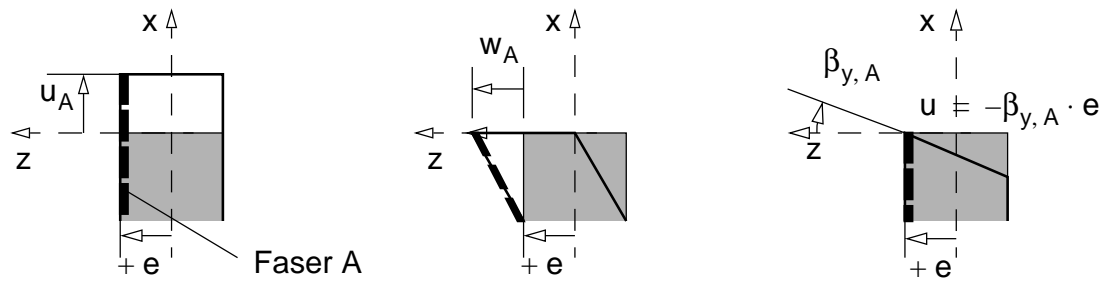


Bild 8-14 Transformation der Verschiebungen

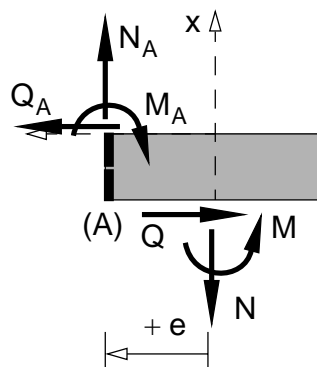


Bild 8-15 Transformation des Kräftegleichgewichtes

Die Transformation der Verschiebungen und des Kräftegleichgewichtes ist entsprechend Bild 8-14 bzw. Bild 8-15 in Gl. (8-31a) und Gl. (8-31b) dargestellt. Die Transformation der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors durch Anwendung der Transformationsmatrizen \mathbf{T}^T und \mathbf{T} ist in Gl. (8-31c) dargestellt.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \\ \beta_y \cdot R \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{e}{R} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \\ \beta_y \cdot R \end{bmatrix}_A}_{\mathbf{u}_A} \quad (8-31a)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M/R \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}_A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{e}{R} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \\ \beta_y \cdot R \end{bmatrix}_A}_{\mathbf{n}} \quad (8-31b)$$

$$\underbrace{\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_B \cdot \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_{B,A}} \cdot \mathbf{u}_A + \underbrace{\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{p}}_{\mathbf{p}_A} = \mathbf{0} \quad (8-31c)$$

$$\mathbf{K}_{B,A} \cdot \mathbf{u}_A + \mathbf{p}_A = \mathbf{0}$$

Die Steifigkeitsmatrix des Balkenelements in der Anschlußfuge A (Gl. (8-32)) für ein Reihenglied n weist nun eine durch den "Steiner"-Anteil modifizierte Biegesteifigkeit auf, weiters ergeben sich die Koppelsteifigkeiten in den Nebendiagonalgliedern. Der geometrische Steifigkeitsanteil wird nicht transformiert, da er nur im transversalen Kräftegleichgewicht eingeht.

$$-\mathbf{K}_{B, A, n} = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} EA \cdot \alpha_n^2 & 0 & \frac{-EA \cdot e}{R} \\ 0 & GA_s \cdot \alpha_n^2 & GA_s \cdot \alpha_n \\ \frac{-EA \cdot e}{R} & GA_s \cdot \alpha_n & \frac{E(I_{zz} + A \cdot e^2)}{R^2} \alpha_n^2 + GA_s \end{bmatrix} + \frac{N_{init}}{R^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-32)$$

Einfache Alternative — Schubstarrer Biegebalken

In Kap. 8.2.2 wird ein baustatisches Analogiemodell erarbeitet werden. Das Tragverhalten des Gesamtsystems wird hierbei anhand eines Doppelbalkenmodelles mit elastischer Verbundfuge veranschaulicht. Dabei werden die Längssteife als auch die Schale vereinfacht als schubstarre Biegebalken betrachtet.

Die Einführung der Normalenhypothese bezweckt, daß die Schubverformung zu Null wird ($\gamma = 0$). Dadurch ergibt sich die Abhängigkeit des Drehparameters β_y von der Transversalverschiebung W :

$$\beta_y \cdot R = -W_{,\xi} \quad (8-33)$$

Die modifizierten Grundgleichungen für den schubstarreren Biegebalken bei Berücksichtigung der Effekte nach Theorie 2. Ordnung sind nachfolgend angegeben. Durch die Verknüpfung der Grundgleichungen und die Implementierung des Verschiebungsansatzes folgt die Steifigkeitsmatrix für ein Reihenglied n in Gl. (8-34d).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \cdot R \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()_{,\xi} & 0 \\ 0 & -()_{,\xi\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \quad (8-34a)$$

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()_{,\xi} & 0 \\ 0 & -()_{,\xi\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M/R \end{bmatrix} - N_{init} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ()_{,\xi\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_z + m_{,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-34b)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M/R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI_{zz}/R^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \cdot R \end{bmatrix} \quad (8-34c)$$

$$-\mathbf{K}_{B, II, n} = \frac{\alpha_n^2}{R^2} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & \frac{EI_{zz} \cdot \alpha_n^2}{R^2} \end{bmatrix} + \frac{N_{init}}{R^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n^2 \end{bmatrix} \quad (8-34d)$$

Die Bestimmung der Transformationsmatrix \mathbf{T} erfolgt durch den Einbau der in den kinematischen Gleichungen (Gl. (8-35a)) gegebenen Zusammenhänge. Die Axialverschiebung der Anschlußfuge ergibt sich aus der Axialverschiebung der Schwerpunktslinie und der Ableitung der Transversalverschiebung. Die Transformationsmatrix \mathbf{T} enthält nun einen Differentialoperator, dieser wird folglich durch den Koeffizient α_n der Reihenentwicklung ersetzt.

$$U_A = U + e \cdot \beta_y = u - \frac{e \cdot W_{,\xi}}{R} \quad (8-35a)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{-e}{R} \cdot \alpha_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-e \cdot \alpha_n}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_A \quad (8-35b)$$

Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{B, II, n, A}$ nach Theorie 2. Ordnung bezüglich der exzentrischen Anschlußfuge A in Gl. (8-36) für ein Reihenglied n enthält die um den "Steiner"-Anteil modifizierte Biegesteifigkeit und die Koppelsteifigkeiten in den Nebendiagonalgliedern. Der geometrische Anteil der Steifigkeitsmatrix bleibt wiederum unbeeinflusst.

$$-\mathbf{K}_{B, II, n, A} = \frac{EA\alpha_n^2}{R^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-e\alpha_n}{R} \\ \frac{-e\alpha_n}{R} & \frac{(i_{zz}^2 + e^2)\alpha_n^2}{R^2} \end{bmatrix} + \frac{N_{init}}{R^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n^2 \end{bmatrix} \quad (8-36)$$

Dabei ist $i_{zz} = \sqrt{I_{zz}/A}$ der Trägheitsradius der Längssteife.

8.2.1.7 Elastischer nachgiebiger Verbund von Schale und Längssteife

Die Verbindung zwischen Längssteife und Kreiszylinderschaft erfolgt entweder geschraubt oder geschweißt. Um die Nachgiebigkeit dieser Verbundfuge zu berücksichtigen, wird zusätzlich ein Verbundfugenelement im Rechenmodell implementiert. Dabei wird sowohl eine Nachgiebigkeit in Längsrichtung der Verbundfuge als auch in transversaler Richtung ermöglicht (siehe Bild 8-16).

Es ist zu beachten, daß dieses Verbundfugenelement zwischen dem Längssteifenmeridian des Schaftes und der zur Balkenschwerlinie exzentrisch liegenden Anschlußlinie wirkt.

Die Koppelfedern der Verbundfuge werden bei Vorliegen von Differenzverschiebungen zwischen Schalenmeridian und der exzentrischen Anschlußlinie des Balkens aktiviert (Indizes "B, A" bzw. "S").

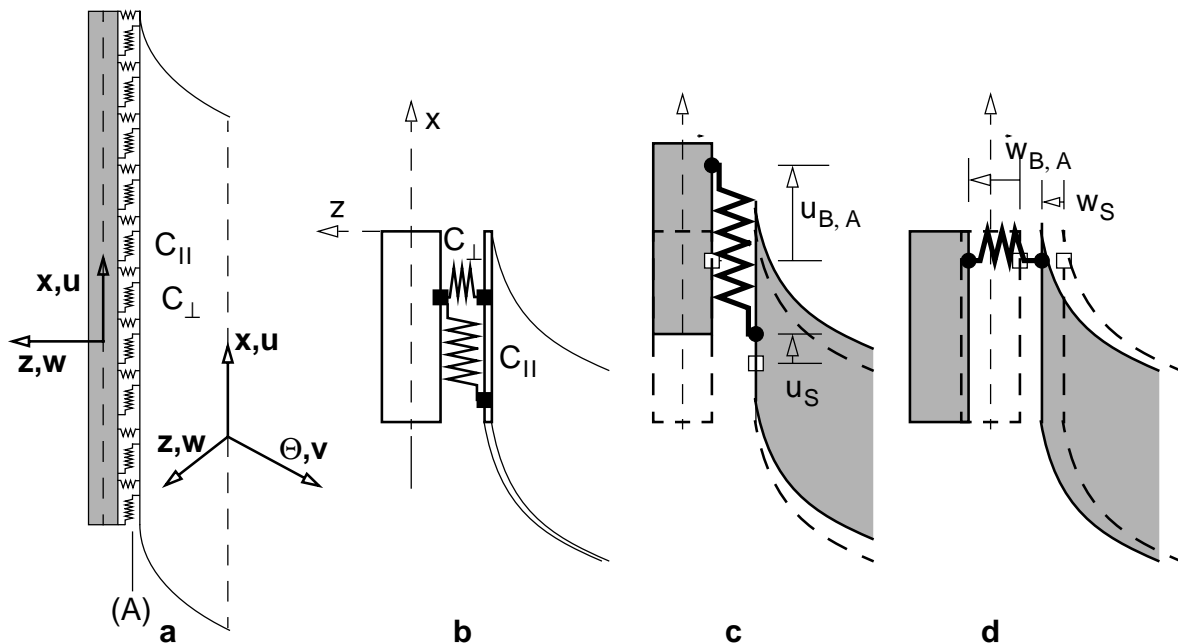


Bild 8-16 a. Verbundfuge, b. Federn der Verbundfuge und c. Wirkungsweise der Axialfedern bzw. d. Wirkungsweise der Transversalfedern

Die Axialfedern C_{II} und die Transversalfedern C_{\perp} sind unabhängig voneinander aktiv:

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_{B,A} - U_S \\ \Delta W &= W_{B,A} - W_S\end{aligned}\quad (8-37)$$

Die Wirkungsweise der Einzelfedern ist in der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_C des Verbundfugenelementes berücksichtigt:

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} C_{II} & 0 & 0 & -C_{II} & 0 \\ 0 & C_{\perp} & 0 & 0 & -C_{\perp} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{II} & 0 & 0 & C_{II} & 0 \\ 0 & -C_{\perp} & 0 & 0 & C_{\perp} \end{bmatrix}\quad (8-38)$$

Dabei liegt der folgende Verschiebungskomponentenvektor in Gl. (8-39), der die Balkenverschiebungskomponenten der exzentrischen Anschlußlinie A und die Schalenverschiebungskomponenten des Auflagerlängssteifenmeridians enthält, zugrunde:

$$\mathbf{u} = [U_{B,A} \quad W_{B,A} \quad \beta_{y,B} R \quad U_S \quad W_S]^T\quad (8-39)$$

Dieser Verschiebungskomponentenvektor wird im folgenden auch für Assemblierung der Einzelsteifigkeitsmatrizen der beteiligten Systemkomponenten in Kap. 8.2.1.8 verwendet.

8.2.1.8 Assemblierung der Einzelsteifigkeitsmatrizen der beteiligten Systemkomponenten

Im folgenden wird die linke Seite des Gleichungssystems der Deformationsmethode ($\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{p}$) dargestellt, und zwar für:

- Allgemeiner nachgiebiger Verbund zwischen dem schubnachgiebigen Auflagerlängssteifenbalken und der Schale
- Querschubstarre Auflagerlängssteifenbalken
- Tangentialer Verbund, das heißt nachgiebiger Verbund in Axialrichtung und starre Koppelung von Auflagerlängssteife und Schale in Transversalrichtung

Allgemeiner nachgiebiger Verbund (\perp und II)

Der Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix ist für das Gesamtsystem bestehend aus Längssteife (schubnachgiebiger Biegebalken), Schalenelement und Fugenelement in Gl. (8-40b) dargestellt. Dabei liegen, wie bereits in Gl. (8-39) dargestellt, 5 Verformungsunbekannte vor. Die Verformungsgrößen der Längssteife sind jene der exzentrischen Anschlußfuge A. Zur besseren Orientierung wird der Verschiebungskomponentenvektor nochmals vorweg dargestellt:

$$\mathbf{u} = [U_{B,A} \quad W_{B,A} \quad \beta_{y,BR} \quad U_S \quad W_S]^T \tag{8-40a}$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{K}_{B,n} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \mathbf{K}_{S,n} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}}_{\cup \mathbf{K}_{B,n} + \mathbf{K}_{S,n}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{II} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \mathbf{C}_{\perp} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_C} \right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_{B,A} \\ W_{B,A} \\ \beta_{y,BR} \\ U_S \\ W_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{red}} \tag{8-40b}$$

Hiebei bedeutet \cup den Assemblieroperator, welcher von seiner Leistungsfähigkeit über den konventionellen "Summenoperator \sum " hinausgeht und zusätzlich die Positionierung der Submatrizen in der Gesamtmatrix berücksichtigt. Im Sonderfall übereinstimmender Dimensionen von Submatrizen und Gesamtmatrix degeneriert der Assemblieroperator \cup zum gewöhnlichen Summenoperator \sum .

Querschubstarre Auflagerlängssteifenbalken

Die Normalenhypothese bedingt den Entfall des Drehwinkels $\beta_{y,B}$ in Gl. (8-41b), der Verschiebungskomponentenvektor liegt nun in reduzierter Form vor:

$$\mathbf{u}_{red} = \begin{bmatrix} U_{B,A} & W_{B,A} & U_S & W_S \end{bmatrix}^T \tag{8-41a}$$

$$\mathbf{K}_{red} \cdot \mathbf{u}_{red} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{B,n} & & & \\ & & & \\ & & \mathbf{K}_{S,n} & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\cup \mathbf{K}_{B,n,red} + \mathbf{K}_{S,n}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{II} & & -C_{II} & \\ & C_{\perp} & & -C_{\perp} \\ -C_{II} & & C_{II} & \\ & -C_{\perp} & & C_{\perp} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{C,red}} \right) \cdot \begin{bmatrix} U_{B,A} \\ W_{B,A} \\ U_S \\ W_S \end{bmatrix} \tag{8-41b}$$

Tangentialer Verbund (starre Koppelung in Transversalrichtung)

Setzt man zusätzlich voraus, daß die Transversalfeder unendlich steif ist ($C_{\perp} = \infty$), so sind die Transversalverschiebungen von Längssteife und Schale $W_S = W_{B,A}$ ident. Die Realisierung der starren Verbundwirkung erfolgt mittels direkter Elimination von abhängigen Freiheitsgraden in Gl. (8-42b). der zugrundeliegende Verschiebungskomponentenvektor wird wiederum vorweg dargestellt:

$$\mathbf{u}_{red} = \begin{bmatrix} U_{B,A} & W_S & U_S \end{bmatrix}^T \tag{8-42a}$$

$$\mathbf{K}_{red} \cdot \mathbf{u}_{red} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{B,n} & & \\ & & \\ & & \mathbf{K}_{S,n} \end{bmatrix}}_{\cup \mathbf{K}_{B,n,red} + \mathbf{K}_{S,n}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{II} & & -C_{II} \\ & & \\ -C_{II} & & C_{II} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{C,red}} \right) \cdot \begin{bmatrix} U_{B,A} \\ W_S \\ U_S \end{bmatrix} \tag{8-42b}$$

8.2.1.9 Algorithmische Assemblierung der Einzelsteifigkeitsmatrizen bei Verwendung von Zwangsbedingungen

Die algorithmische Umsetzung im Berechnungsprogramm erfolgt alternativ durch Verwendung von Zwangsgleichungen nach der Lagrange-Multiplikator-Methode. Hierbei werden die Systemfreiheitsgrade in sekundäre (abhängige) oder Sklaven-Freiheitsgrade und sogenannte primäre (unabhängige) Master-Freiheitsgrade unterteilt. Der Zusammenhang zwischen Sklaven- und Master-Freiheitsgraden wird über Zwangsbedingungen beschrieben.

Im Berechnungsprogramm wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix durch Verwendung der Verformungen der Schwerpunktslinie der Längssteife — Verformungskomponentenvektor \mathbf{u}_B — der Verformungen der Schale im Längssteifenmeridian \mathbf{u}_S und den Verformungen $\mathbf{u}_{B,A}$ der exzentrisch liegenden Anschlußlinie generiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_B &= [\mathbf{U}_B \quad W_B \quad \beta_{y,B}R]^T \\ \mathbf{u}_S &= [\mathbf{U}_S \quad W_S]^T \\ \mathbf{u}_{B,A} &= [\mathbf{U}_{B,A} \quad W_{B,A}]^T \end{aligned} \tag{8-43a}$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_B \quad \mathbf{u}_S \quad \mathbf{u}_{B,A}]^T = [\mathbf{U}_B \quad W_B \quad \beta_{y,B}R \quad \mathbf{U}_S \quad W_S \quad \mathbf{U}_{B,A} \quad W_{B,A}]^T \tag{8-43b}$$

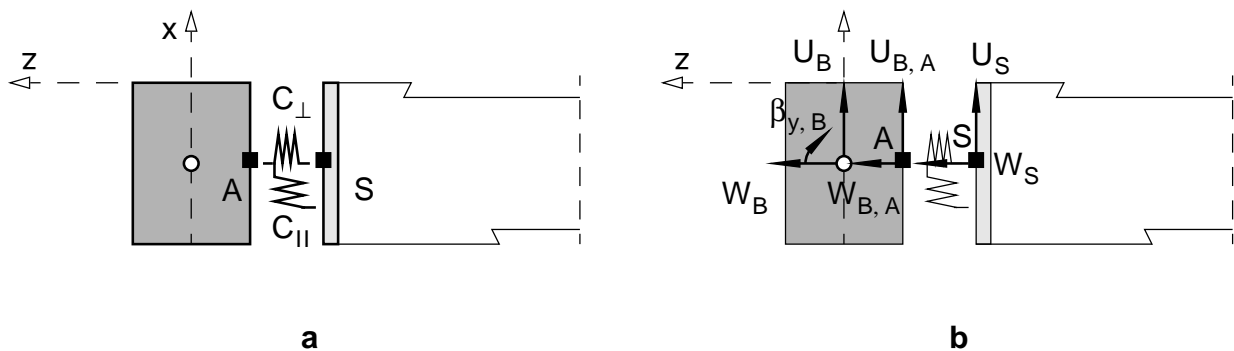


Bild 8-17 Längs und transversal nachgiebige Verbundfuge —
a. exzentrischer Anschlußpunkt A der Längssteife, Schalenanschlußpunkt S und Federn der Verbundfuge bzw. **b.** Verschiebungskomponenten

Die Verformungen $\mathbf{u}_{B,A}$ der exzentrisch liegenden Anschlußlinie ergeben sich durch die kinematischen Annahmen aus jenen der Schwerpunktslinie der Auflagerlängssteife \mathbf{u}_B .

Liegt lediglich tangentialer Verbund vor, dann sind die Transversal- bzw. Radialverschiebungen $W_{B,A}$ und W_S ident.

Liegt starrer Verbund vor, so sind die Verformungskomponentenvektoren \mathbf{u}_S der Schale und $\mathbf{u}_{B,A}$ der exzentrischen Balkenanschlußlinie der Auflagerlängssteife ident.

Allgemeine Verwendung von Zwangsbedingungen

Für die endgültige Lösung wird das Gleichungssystem um die Koppelungsbedingungen zwischen Master- und Sklaven-Freiheitsgraden und den zugehörigen Koppelkräften entsprechend der Lagrange-Multiplikator-Methode erweitert. Das Gesamtgleichungssystem wird für die Lösung entsprechend partitioniert. Eine analoge Darstellung der Vorgehensweise findet sich in der Anwendung auf Koppelung von beliebigen Systemfreiheitsgraden bei nichtlinearen Stabsystemen bei Salzgeber (1998, 2000).

Die Partitionierung in Gl. (8-44) der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} erfolgt in die Teilmatrizen \mathbf{K}_{11} , zugehörig den Masterfreiheitsgraden $\mathbf{u}_{\text{master}}$ und \mathbf{K}_{22} zugehörig den Sklaven-Freiheitsgraden $\mathbf{u}_{\text{slave}}$. Die Teilmatrix \mathbf{K}_{12} stellt die Koppelung in der Steifigkeitsmatrix zwischen Master- und Sklaven-Freiheitsgraden dar. Die Zwangsbedingungen sind in die Matrizen \mathbf{C}_K und \mathbf{L}_K eingearbeitet. \mathbf{C}_K beschreibt den Zusammenhang von $\mathbf{u}_{\text{master}}$ und $\mathbf{u}_{\text{slave}}$. \mathbf{L}_K ist eine obere Dreiecksmatrix und beschreibt die Verknüpfung der Sklaven-Freiheitsgrade untereinander. Der Lastvektor besteht aus dem Teilvektor \mathbf{r} , der die externen Lasten bzw. die Starreinspannkkräfte an den Masterfreiheitsgraden enthält und dem Teilvektor $\mathbf{r}_{\text{slave}}$, der die externen Lasten bzw. die Starreinspannkkräfte an den Sklaven-Freiheitsgraden enthält.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{C}_K & \mathbf{u}_{\text{master}} & \mathbf{r} \\
 \hline
 \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{L}_K & \mathbf{u}_{\text{slave}} & \mathbf{r}_{\text{slave}} \\
 \hline
 \mathbf{C}_K^T & \mathbf{L}_K^T & \mathbf{0} & \mathbf{r}_K & \mathbf{0} \\
 \hline
 \end{array} \cdot = \quad (8-44)$$

Für die endgültige Lösung muß nun das Gleichungssystem bis auf die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^* und dem zugehörigen Lastvektor \mathbf{r}^* bezüglich der Masterfreiheitsgrade kondensiert werden. Dies erfolgt durch sukzessives Auflösen des Gleichungssystems. Zuerst erhält man die Verknüpfung von Sklaven- und Masterfreiheitsgraden, danach die Koppelkräfte \mathbf{r}_K und letztendlich den modifizierten Lastvektor \mathbf{r}^* und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^* :

$$\mathbf{u}_{\text{slave}} = -\mathbf{L}_K^{-T} \cdot \mathbf{C}_K^T \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (8-45a)$$

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{L}_K^{-1} \cdot \mathbf{r}_{\text{slave}} + \mathbf{L}_K^{-1} \cdot (\mathbf{K}_{22} \cdot \mathbf{L}_K^{-T} \cdot \mathbf{C}_K^T - \mathbf{K}_{12}^T) \cdot \mathbf{u}_{\text{master}} \quad (8-45b)$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{L}_K^{-1} \cdot \mathbf{r}_{\text{slave}} \quad (8-45c)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{L}_K^{-T} \cdot \mathbf{C}_K^T + \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{L}_K^{-1} \cdot (\mathbf{K}_{22} \cdot \mathbf{L}_K^{-T} \cdot \mathbf{C}_K^T - \mathbf{K}_{12}^T) \quad (8-45d)$$

Nun können die unbekanntenen Verschiebungsgrößen bestimmt werden:

$$\mathbf{u}_{\text{master}} = \mathbf{K}^{*-1} \cdot \mathbf{r}^* \tag{8-46}$$

Die Koppelkräfte, die Verschiebungsgrößen der Sklaven-Freiheitsgrade werden durch sukzessives Rückeinsetzen ermittelt.

Realisierung des allgemeinen nachgiebigen Verbundes

Die Verschiebungen der Anschlußlinie in Gl. (8-47) stellen hier die sekundären (abhängigen) Sklaven-Freiheitsgrade dar, sie sind über die kinematischen Annahmen des Balkenelementes mit den Verformungen der Schwerpunktslinie — den sogenannten primären (unabhängigen) Master-Freiheitsgraden — gekoppelt. Der Zusammenhang wird über Zwangsbedingungen beschrieben.

$$\mathbf{u}_{\text{slave}} = \mathbf{u}_{B, A} \tag{8-47}$$

Die Masterfreiheitsgrade beinhalten die Verformungen der Längssteife und der Schale:

$$\mathbf{u}_{\text{master}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B & \mathbf{u}_S \end{bmatrix}^T \tag{8-48}$$

Die Partitionierung des Gleichungssystems ergibt sich entsprechend der vorliegenden Zuordnung zu Master- und Sklaven-Freiheitsgraden. Dabei wird jener Anteil des Gesamtgleichungssystems in Gl. (8-44), in dem die Einzelsteifigkeitsmatrizen von Schale, Auflagerlängssteife (Balkenelement) und Verbundfugenelement und die Koppelungsmatrizen \mathbf{C}_K bzw. \mathbf{L}_K assembliert werden, hinsichtlich der Zugehörigkeit zu den Master- und Sklavenfreiheitsgraden dargestellt:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \\ \hline \mathbf{C}_K^T & \mathbf{L}_K^T \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{u}_{\text{master}} \\ \mathbf{u}_{\text{slave}} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{K}_B & & \\ \hline & \mathbf{K}_S & \\ \hline & & \mathbf{K}_C \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_{B, A} \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 & e/R & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \end{array}$$

(8-49)

Im hier vorliegenden Fall besteht der Vektor mit den Masterfreiheitsgraden $\mathbf{u}_{\text{master}}$ aus den Verschiebungsgrößen des Balkens und der Schale, der Vektor mit den Sklaven-Freiheitsgraden $\mathbf{u}_{\text{slave}}$ beinhaltet die Verschiebungsgrößen der exzentrischen Anschlußfuge des Balkens. Die Koppelungsmatrizen \mathbf{C}_K und \mathbf{L}_K sind in Gl. (8-50) und Gl. (8-51) dargestellt. \mathbf{C}_K erhält man aus der Kinematik des Balkenelementes, die Matrix \mathbf{L}_K beschreibt die Verknüpfung der Sklaven-Freiheitsgrade untereinander und ist hier eine Einheitsmatrix.

Die Verknüpfung mit den Verschiebungen der Balkenachse erfolgt über die Transformationsmatrix \mathbf{T} , die mit der Kinematik des Balkens bestimmt ist. Es ist zu beachten, daß im vorliegenden Fall keine Zwangsbedingungen zwischen den Verschiebungen der Anschlußlinie und den Verschiebungen der Schale vorliegen. Somit ist die Koppelungsmatrix \mathbf{C}_K definiert (Gl. (8-50)):

$$\mathbf{C}_K^T = - \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & e/R & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (8-50)$$

\mathbf{T}

Die Sklavenfreiheitsgrade sind untereinander nicht verkoppelt, die Matrix \mathbf{L}_K ist somit, wie bereits in Gl. (8-49) ersichtlich, eine Einheitsmatrix:

$$\mathbf{L}_K^T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad (8-51)$$

Damit läßt sich das Gesamtgleichungssystem (Gl. (8-44)) aufbauen.

Realisierung des starren Verbundes

Die Verschiebungen der Anschlußfuge sind durch die Annahme des starren Verbundes mit jenen der Schale ident ($\mathbf{u}_{B,A} = \mathbf{u}_S$). Die Master-Freiheitsgrade beinhalten nur mehr die Verformungen der Längssteife (Gl. (8-53)).

Die Verschiebungen der Anschlußlinie in Gl. (8-47) und die Verschiebungen der Schale stellen hier die sekundären (abhängigen) Sklaven-Freiheitsgrade dar, sie sind über die kinematischen Annahmen des Balkenelementes mit den Verformungen der Schwerpunktslinie — den sogenannten primären (unabhängigen) Master-Freiheitsgraden — gekoppelt. Die Koppelungsreihenfolge der Sklavenfreiheitsgrade untereinander ist die Koppelung der Verschiebungskomponenten der exzentrischen Balkenanschlußlinie ($\mathbf{u}_{B,A}$) an die Verschiebungskomponenten der Schale (\mathbf{u}_S) gegeben.

$$\mathbf{u}_{\text{slave}} = \left[\mathbf{u}_S \quad \mathbf{u}_{B,A} \right]^T \quad (8-52)$$

Die Masterfreiheitsgrade beinhalten die Verformungskomponenten der Auflagerlängssteife:

$$\mathbf{u}_{\text{master}} = \mathbf{u}_B \quad (8-53)$$

Die Partitionierung des Gleichungssystems ergibt sich entsprechend der vorliegenden Zuordnung zu Master- und Sklaven-Freiheitsgraden. Dabei wird wiederum jener Anteil des Gesamtgleichungssystems in Gl. (8-44), in dem die Einzelsteifigkeitsmatrizen von Schale und Auflagerlängssteife (Balkenelement) und die Koppelungsmatrizen \mathbf{C}_K bzw. \mathbf{L}_K assembliert werden, hinsichtlich der Zugehörigkeit zu den Master- und Sklavenfreiheitsgraden dargestellt. Gegenüber dem Gleichungssystem des allgemeinen Verbundes wird die Steifigkeitsmatrix des Verbundfugenelementes \mathbf{K}_C nicht mehr berücksichtigt, den Verschiebungskomponenten der exzentrischen Auflagerlängssteifenanschlußlinie sind somit keine Steifigkeiten zugeordnet. Im vorliegenden Fall in Gl. (8-54) ist an Stelle der Verbundfugensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_C eine $\mathbf{0}$ -Matrix im Gleichungssystem.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{u}_{\text{master}} \\ \hline \mathbf{u}_{\text{slave}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{K}_B & & \\ \hline & \mathbf{K}_S & \\ \hline & & \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{u}_B \\ \hline \mathbf{u}_S \\ \hline \mathbf{u}_{B,A} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{C}_K^T & \mathbf{L}_K^T \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 & e/R \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{8-54}$$

Im hier vorliegenden Fall besteht der Vektor mit den Masterfreiheitsgraden $\mathbf{u}_{\text{master}}$ aus den Verschiebungskomponenten des Balkens, der Vektor mit den Sklaven-Freiheitsgraden $\mathbf{u}_{\text{slave}}$ beinhaltet die Verschiebungskomponenten der Schale und der exzentrischen Anschlußfuge des Balkens. Die Koppelungsmatrizen \mathbf{C}_K und \mathbf{L}_K sind in Gl. (8-55) und Gl. (8-56) dargestellt.

Die Verknüpfung mit den Verschiebungen der Balkenachse erfolgt über die Transformationsmatrix \mathbf{T} , die mit der Kinematik des Balkens bestimmt ist. Somit ist die Koppelungsmatrix \mathbf{C}_K direkt durch die Transformationsmatrix \mathbf{T} , definiert (Gl. (8-55)):

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & e/R \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{8-55}$$

Die Sklavenfreiheitsgrade sind untereinander durch die Voraussetzung des starren Verbundes verknüpft.

In die Matrix \mathbf{L}_K wird eingearbeitet, daß die Verschiebungen von Balkenanschlußlinie und Schale ident sind ($\mathbf{u}_{B,A} = \mathbf{u}_S$), die Abhängigkeiten in Gl. (8-54) ersichtlich. Die Elemente der Matrix \mathbf{L}_K ergeben sich aus der Koppelungsreihenfolge der Sklavenfreiheitsgrade. Zuerst werden, wie bereits eingangs erwähnt, die Verschiebungskomponenten der exzentrischen Balkenanschlußlinie ($\mathbf{u}_{B,A}$) an die Verschiebungskomponenten der Schale (\mathbf{u}_S) gekoppelt.

$$\mathbf{L}_K^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-56)$$

Damit läßt sich das Gesamtgleichungssystem (Gl. (8-44)) aufbauen.

8.2.1.10 Belastungen und Starreinspannkkräfte

Prinzipiell ist die Doppelreihenentwicklung für alle Lastbilder möglich. Die Lastbilder werden durch die Multiplikation der Koeffizienten von Reihenentwicklungen in Axialrichtung und Reihenentwicklungen in Umfangsrichtung wiedergegeben. Das Basisintervall der Reihenentwicklung in Axialrichtung ist durch den unteren und oberen Rand der Schale definiert. Daraus ergibt sich der Koeffizient α_n der Reihe in Axialrichtung. Dieses Basisintervall stellt die Hälfte des Integrationsgebietes ($0 \leq \alpha_n \xi \leq 2\pi$) dar. Aufgrund der Antimetriebedingungen des oberen und unteren Randes ergibt sich die Fortsetzung der Lastbildes außerhalb der Schale. In Umfangsrichtung sind aufgrund der zyklischen Bedingungen das Basisintervall und das Integrationsgebiet ident ($0 \leq m\Theta \leq 2\pi$).

Die Axialbelastungen werden mit einer Cosinus-Doppelreihe, die Tangentialbelastungen mit einer Sinus-Doppelreihe und die Radialbelastungen mit einer Sinusreihe in der Axial- und einer Cosinusreihe in der Umfangsreihenentwicklung abgebildet. Für den Fall, daß die Längssteife belastet wird, muß nur die Reihenentwicklung in Axialrichtung durchgeführt werden.

Es werden für folgende Lastbilder exemplarisch die Reihenentwicklungen angegeben:

Belastung der Längssteife:

- entgegengesetzt gerichtete Einzelkräfte
- Einzelkraft und entgegengesetzt gerichtete konstant verteilte Schubkraftbelastung

Belastung der Zylinderschale:

- konstanter Radialdruck
- lokale Auflagerkrafteinleitung mit entgegengesetzt gerichteter konstanter Wandschubbelastung

Belastung der Längssteife

Die Entwicklung der anreifenden Axialkräfte erfolgt entsprechend den vorliegenden Randbedingungen in eine Cosinusreihe für die Axialbelastung der Längssteife (Gl. (8-57)). Da beide Lastbilder für sich eine Gleichgewichtsgruppe darstellen, wird das Reihenglied für $n=0$ zu Null.

$$q_x = \sum_{n=1, \dots} a_n \cdot \cos \alpha_n \xi \tag{8-57}$$

Um eine besser konvergierende Reihenentwicklung zu ermöglichen, werden die Einzelkräfte über die kleine Länge L_1 verteilt angenommen (siehe Bild 8-18).

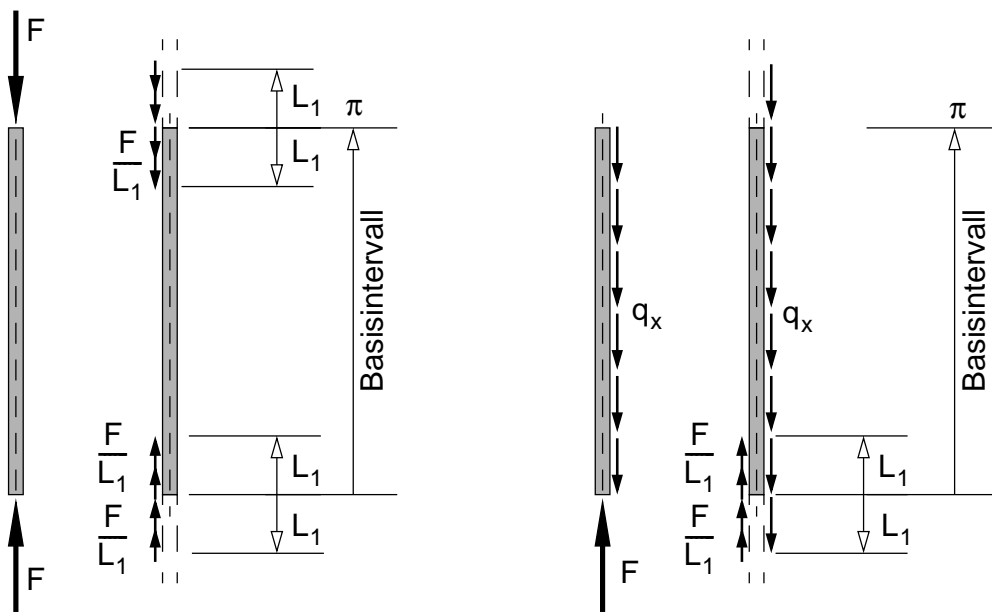


Bild 8-18 Reihenentwicklung der Längsbelastung der Längssteife

Die Reihenkoeffizienten a_n für die entgegengesetzt gerichteten Einzelkräfte ergeben sich damit zu:

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{N}{L_1} \cdot \sin \frac{nL_1}{L} \cdot (1 - \cos n\pi) \tag{8-58}$$

Die Reihenkoeffizienten a_n für einseitigen Einzelkraftangriff mit entgegengesetzt gerichteten konstanten Schubkräften ergeben sich zu:

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{F}{L_1} \cdot \sin \frac{nL_1}{L} \tag{8-59}$$

Belastung des Zylinderschaftes

Wird der Schaft mit konstantem Radialdruck belastet, so muß eine Reihenentwicklung in Längsrichtung vorgenommen werden. Entsprechend den vorliegenden Randbedingungen am oberen und unteren Rand ($v = w = 0$) wirkt der Radialdruck innerhalb der Basisintervalle (0 bis π , π bis 2π u.s.w) alternierend nach außen (positiv) bzw. nach innen (negativ). Dies ist in Bild 8-19 dargestellt. Die Entwicklung erfolgt für diese Lastart in eine Sinusreihe:

$$p_n = \sum_{n=1, \dots} a_n \cdot \sin \alpha_n \xi \quad (8-60)$$

Der Reihenkoeffizient a_n ergibt sich dabei zu:

$$a_n = \frac{2p_n}{n\pi} \cdot (1 - \cos n\pi) \quad (8-61)$$

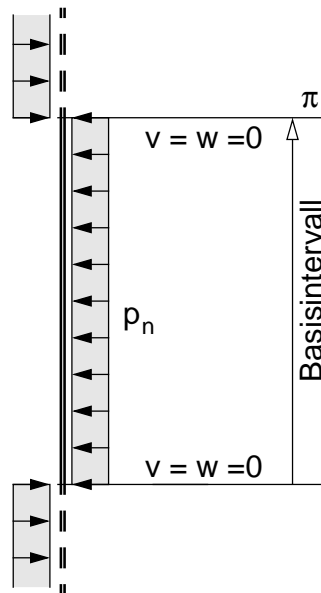


Bild 8-19 Reihenentwicklung der Radialdruckbelastung am Zylinderschaft

Bei Belastung des Zylinders durch eine lokale Randlast in Axialrichtung und eine entgegengesetzt gerichtete konstante Wandschubbelastung (Bild 8-20) erfolgt die Reihenentwicklung in eine Cosinus-Doppelreihe des Lastbildes, das heißt sowohl in Axial- als auch in Umfangsrichtung:

$$p_x = \sum_m a_m \cdot \sum_n a_n \cos \alpha_n \xi \cdot \cos m\Theta \quad (8-62)$$

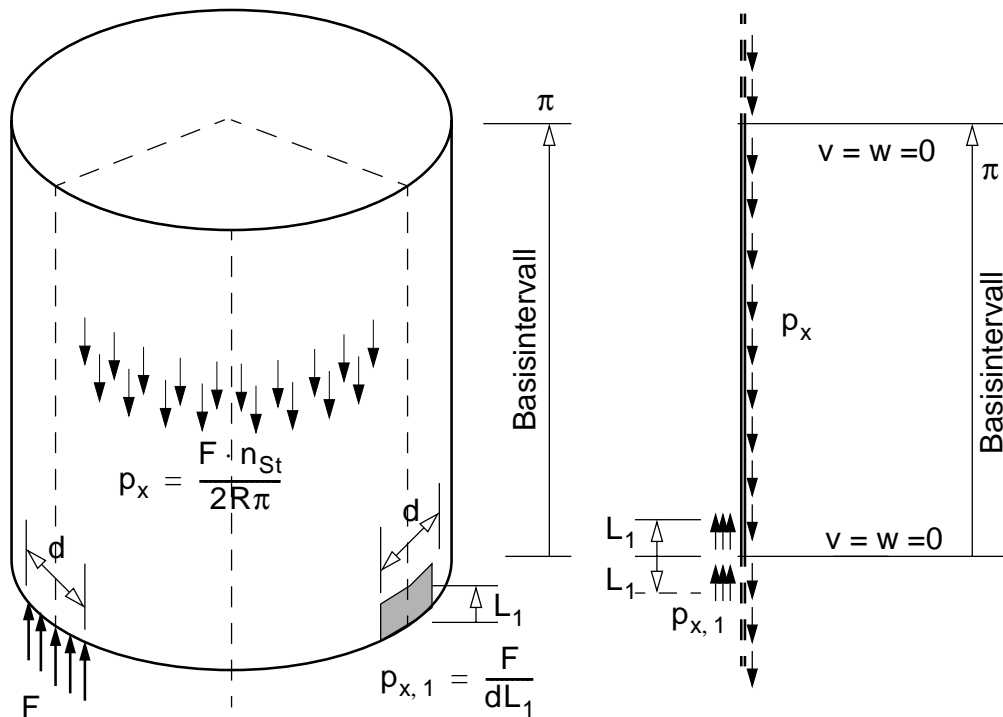


Bild 8-20 Lokale Randlast F und entgegengesetzt wirkende Wandschubbelastung am Zylinderschaft

Letztendlich läßt sich das Lastbild mit folgender Reihenentwicklung (Gl. (8-63)) wiedergeben. Das Produkt für die Glieder $m=0$ und $n=0$ wird zu Null — es liegt eine Gleichgewichtsgruppe als Last vor. Es verbleiben somit drei Anteile der Doppelreihe, zwei Anteile stellen die getrennte Reihenentwicklung in Axial- bzw. Umfangsrichtung dar, der dritte Anteil ist das Produkt der Entwicklung beider Richtungen.

$$\begin{aligned}
 p_x = \frac{F}{dL_1} \cdot \left(\frac{L_1}{L} \sum_{m=1, \dots} \frac{2n_{St}}{m\pi} \sin m\Theta_1 \cos m\Theta + \frac{n_{St}d}{2R\pi} \sum_{n=1, \dots} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{nL_1}{L} \cos \alpha_n \xi + \right. \\
 \left. + \sum_{m=1, \dots} \sum_{n=1, \dots} \frac{2n_{St}}{m\pi} \sin m\Theta_1 \frac{2}{n\pi} \sin \frac{nL_1}{L} \cos \alpha_n \xi \cos m\Theta \right) \quad (8-63)
 \end{aligned}$$

Starreinspannkkräfte

Die zugrundeliegenden partikulären Verschiebungen in den Längssteifenmeridianen können je nach Lastfall direkt bestimmt werden oder müssen durch Aufsummation für die Reihenentwicklung in Umfangsrichtung ermittelt werden. Hier sind es die Amplitudenwerte der Axialverschiebung U_n bzw. der Radialverschiebung W_n . Die entsprechenden Verschiebungen sind in Umfangsrichtung in eine Cosinusreihe entwickelt. Im Längssteifenmeridian ($\Theta = 0^\circ$) müssen die Amplitudenwerte aufsummiert werden:

$$\begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix}_{\text{Part}} = \sum_m \mathbf{K}_{s, n, m}^{-1} \cdot \mathbf{p}_{n, m} \quad (8-64)$$

Starreinspannkkräfte müssen für jene Belastungsfälle errechnet werden, bei denen der Zylinderschaft belastet wird. Die zugrundeliegenden Verschiebungen ergeben sich aufgrund der vorliegenden Randbedingungen am oberen und unteren Rand der Schale direkt aus der partikulären Lösung der Differentialgleichung der Kreiszyinderschale (siehe Anhang A.1).

Die Starreinspannkkräfte in Gl. (8-65) sind hier die Haltekräfte — eine wirkt in axialer, die andere in radialer Richtung — in den Längssteifenmeridianen. Sie schließen die Verschiebungen, die durch die herrschende Belastung entstehen, das heißt es liegt der Starreinspannzustand vor.

$$\mathbf{r}_{\text{Starr}} = -\mathbf{K}_{s,n} \cdot \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix}_{\text{Part}} \quad (8-65)$$

Der Starreinspannvектор $\mathbf{r}_{\text{Starr}}$ wird an der entsprechenden Stelle in den Lastvektor eingebaut.

8.2.1.11 Zusammenfassende Bemerkungen zum Rechenmodell

Die Einschränkungen des vorgestellten Rechenmodelles sind hinsichtlich Geometrie, Randbedingungen und Steifigkeiten nachfolgend in kompakter Form zusammenfassend aufgelistet:

- Starre Endquerscheiben am oberen und unteren Rand ($v = w = 0$)
- Konstante Wandstärke des Zylinderschaftes
- Äquidistant über den Umfang angeordnete Längssteifen mit über die ganze Höhe konstantem Querschnitt
- Symmetriebedingungen in den Längssteifenmeridianen und in den Schalenfeldmittenmeridianen

Dieses Rechenmodell kann weiters auf folgende fortgeschrittene Problemstellungen (Bild 8-21) angewendet werden:

- Approximative Modellierung horizontaler Schraubstöße zwischen Schalensegmenten durch mittlere äquivalente orthotrope Schalen-Ersatzsteifigkeiten (Bild 8-21.a)

$$D_{x,\text{eff}} = L / \left(\sum_i \frac{L_i}{E t_i} + \frac{1}{C_{x,i,i+1}} \right) \quad (8-66a)$$

$$S_{x\theta,\text{eff}} = L / \left(\sum_i \frac{L_i}{G t_i} + \frac{1}{C_{\theta,i,i+1}} \right) \quad (8-66b)$$

- Wanddickenabstufungen werden ebenfalls durch einen Mittelwert der Wanddicke berücksichtigt (Bild 8-21.b)

- Die Anwendung auf die statische Berechnung von Mehrkammersilos ist möglich (Bild 8-21.c). Dabei werden die Trennwände durch eine äquivalente wellenzahlabhängige Längssteife ersetzt bzw. direkt als 2D-Scheibe modelliert. Die vorausgesetzten Symmetriebedingungen erlauben es jedoch nicht, zumindest in der in dieser Arbeit vorgestellten Grundformulierung, Teilfüllzustände der Kammern zu behandeln. Diesbezüglich müßte eine Erweiterung des Rechenmodelles im Sinne der FINITE-STRIP-METHODE vorgenommen werden.

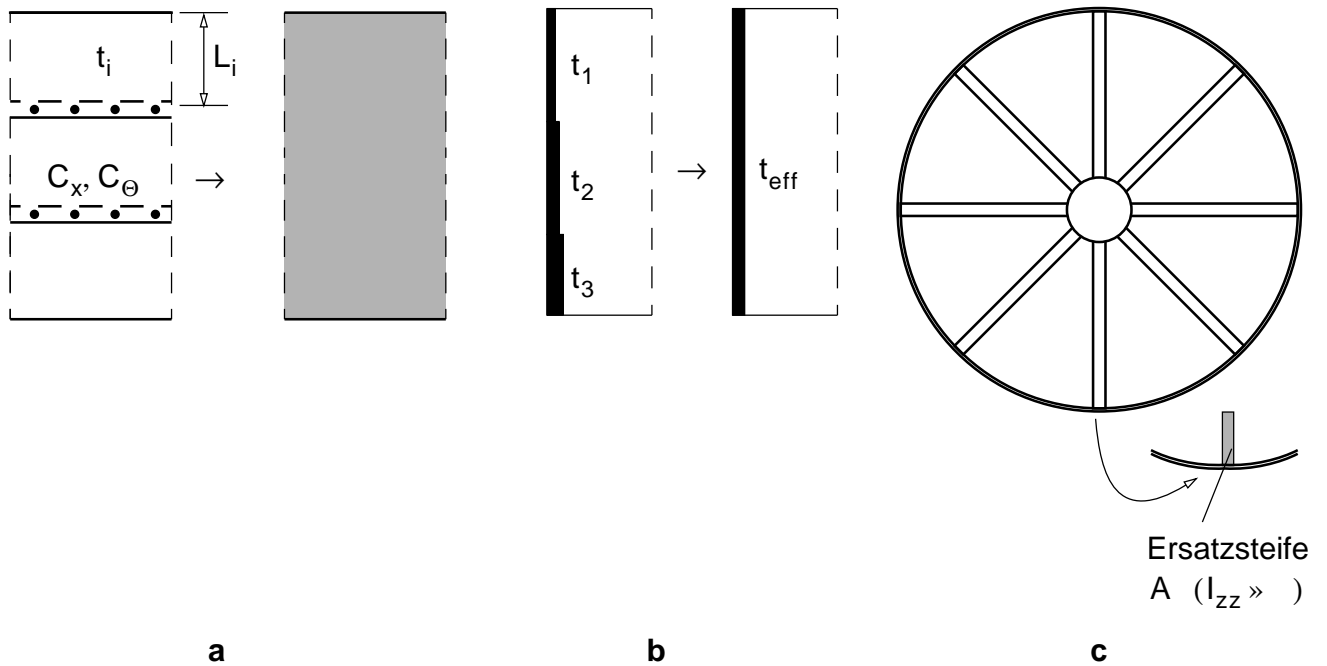


Bild 8-21 Erweiterte Anwendung des Rechenmodelles durch —
a. approximative Modellierung nachgiebiger horizontaler Schraubstöße verschmiert durch orthotrope Schalenersatzsteifigkeiten,
b. Modellierung abgestufter Wanddicken durch eine effektive Ersatzwanddicke und
c. Modellierung der Trennwände von Mehrkammersilos durch effektive äquivalente innere Längssteifen

8.2.2 Baustatisches Analogiemodell — Doppelbalken mit elastischer Verbundfuge

Zur Interpretation des Tragverhaltens wird die Schale durch ein äquivalentes baustatisches Ersatzmodell ersetzt. Dabei sollen alle Kraftwirkungen und die entstehenden Verformungen wiedergegeben werden können.

Es werden folgende, vereinfachende Annahmen getroffen:

- starre Koppelung von Schale und Längssteife in Transversalrichtung
- transversal schubstarre Längssteife (Bernoulli-Balken)

8.2.2.1 Suche nach möglichen baustatischen Analogiemodellen

Zur Bildung eines baustatischen Analogiemodells stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

- elastisches Bettungsmodell
- elastisches Verbundbalkenmodell

Einerseits könnte das Tragverhalten der Schale mittels eines elastischen Bettungsmodells durch Axial- und Transversalfedern $C_{s,x}$ bzw. $C_{s,z}$ simuliert werden (Bild 8-22). Im Gegensatz dazu steht das elastische Verbundbalkenmodell, dabei wird die Schale durch einen äquivalenten Ersatzbalken simuliert (Bild 8-23).

Elastisches Bettungsmodell

Das Tragverhalten der Schale (vollbesetzte 2x2-Steifigkeitsmatrix) kann in diesem Fall jedoch nur durch die zusätzliche Berücksichtigung einer Koppelfeder wiedergegeben werden. Die Anschaulichkeit dieses Analogiemodells ist deshalb nicht durchgängig gegeben. Vereinfacht könnte, wie in Gl. (8-67) dargestellt, nur durch Berücksichtigung der Hauptdiagonalglieder der Schalensteifigkeitsmatrix auf unvollständige Art und Weise das Tragverhalten der Schale durch das elastische Bettungsmodell wiedergegeben werden.

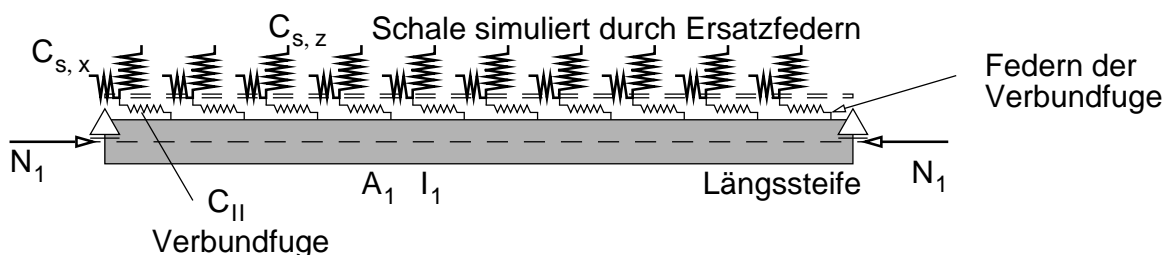


Bild 8-22 Elastisches Bettungsmodell

$$\begin{bmatrix} K_S(1, 1) & K_S(1, 2) \\ K_S(1, 2) & K_S(2, 2) \end{bmatrix}_n \longrightarrow \begin{bmatrix} C_x & ? \\ ? & C_z \end{bmatrix}_n \quad (8-67)$$

Elastisches Verbundbalkenmodell (Doppelbalkenanalogiemodell)

Im Gegensatz zum zuvor beschriebenen, einfachen Federmodell kann ein exzentrisch angeschlossener Ersatzbalken die Steifigkeitsmatrix der Schale vollständig modellhaft wiedergeben.

Somit liegt nun ein baustatisches, ‐ingenieurmäßig‐ anschauliches Ersatzmodell vor. Das Gesamtmodell besteht aus zwei exzentrisch angeordneten Balken. Die Verbundfuge ist in Längsrichtung nachgiebig (Axialfeder C_{II}), in transversaler Richtung der Balken erfolgt eine starre Kopplung der beiden Balken. Die beiden Balken werden als schubstarre Balken (Bernoulli-Balken) strukturmechanisch erfaßt.

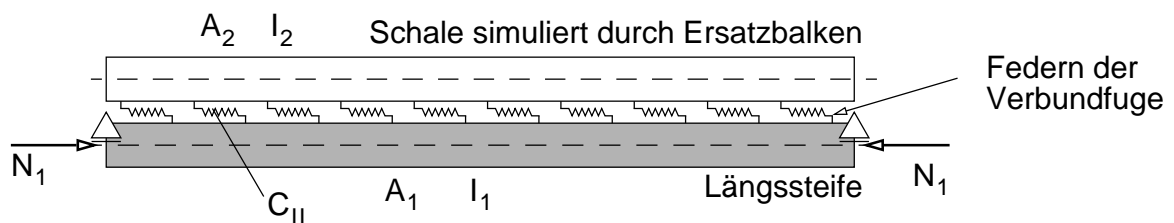


Bild 8-23 Elastisches Verbundbalkenmodell

8.2.2.2 Elastisches Verbundbalkenmodell

Das elastische Verbundbalkenmodell, bestehend aus Längssteife, Verbundfugenelement und Schalenersatzbalken, ist bereits in Bild 8-23 dargestellt. Die Querschnittsparameter des exzentrischen Schalenersatzbalkens — Fläche A_2 , Trägheitsmoment I_2 und Schwerpunktsabstand e_2 — müssen nun so festgelegt werden, daß die Steifigkeitsmatrix der Schale vollständig wiedergegeben wird.

Die Festlegung der Querschnittsparameter erfolgt somit in Gl. (8-68) direkt aus den Elementen der Steifigkeitsmatrix der Schale durch Gleichsetzen mit den Elementen der Steifigkeitsmatrix des Ersatzbalkens.

$$\begin{bmatrix} K_S(1, 1) & K_S(1, 2) \\ K_S(1, 2) & K_S(2, 2) \end{bmatrix}_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \begin{bmatrix} EA_2 & EA_2 \cdot \frac{e_2 \cdot n\pi}{L} \\ EA_2 \cdot \frac{e_2 \cdot n\pi}{L} & \frac{EI_2 \cdot n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{EA_2 \cdot e_2^2 \cdot n^2 \pi^2}{L^2} \end{bmatrix} \quad (8-68)$$

Die Steifigkeiten bzw. Querschnittsparameter des Schalenersatzbalkens sind in den nächsten drei Gleichungen angegeben. Zunächst kann die Fläche A_2 über $K_{S,n}(1, 1)$ direkt bestimmt werden. Sodann ist e_2 aus $K_{S,n}(1, 2)$ und $K_{S,n}(1, 1)$ berechenbar. Schließlich kann das Trägheitsmoment I_2 aus allen drei Schalensteifigkeiten bestimmt werden.

$$EA_2 = K_{S,n}(1, 1) \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \quad (8-69a)$$

$$e_2 = \frac{K_{S,n}(1, 2)}{K_{S,n}(1, 1)} \cdot \frac{L}{n\pi} \quad (8-69b)$$

$$EI_2 = \left(K_{S,n}(2, 2) - \frac{K_{S,n}(1, 2)^2}{K_{S,n}(1, 1)} \right) \frac{L^4}{n^4 \pi^4} \quad (8-69c)$$

Wahl der Querschnittsform des Schalenersatzbalkens

Die Wahl der Querschnittsform erfolgt in Bild 8-24 zur bestmöglichen Anpassung der Geometriewerte entweder als T-Querschnitt oder als 2-Punktquerschnitt. Zur Rückrechnung der Querschnittsteilflächen werden die Dicken der Gurte gleich der Wanddicke der Schale gesetzt.

In Tab. 8-1 sind für beide Querschnittsformen die Querschnittswerte dargestellt. Dabei werden aus den bereits in (8-69a) bis (8-69c) bestimmten Parametern des Schalenersatzbalkens (Fläche, Schwerpunktsabstand (=Exzentrizität zur Anschlußlinie), und Trägheitsmoment) die Querschnittshöhe und die Teilflächen des T-Querschnittes bzw. des 2-Punktquerschnittes ermittelt. Grundlage dafür ist in Tab. 8-1 das Verhältnis der Teilflächen, welches durch den Flächenverhältnisfaktor α beschrieben wird ($\alpha = A_{St}/A_{Fl}$ bzw. $\alpha = A_{Fl,2}/A_{Fl,1}$).

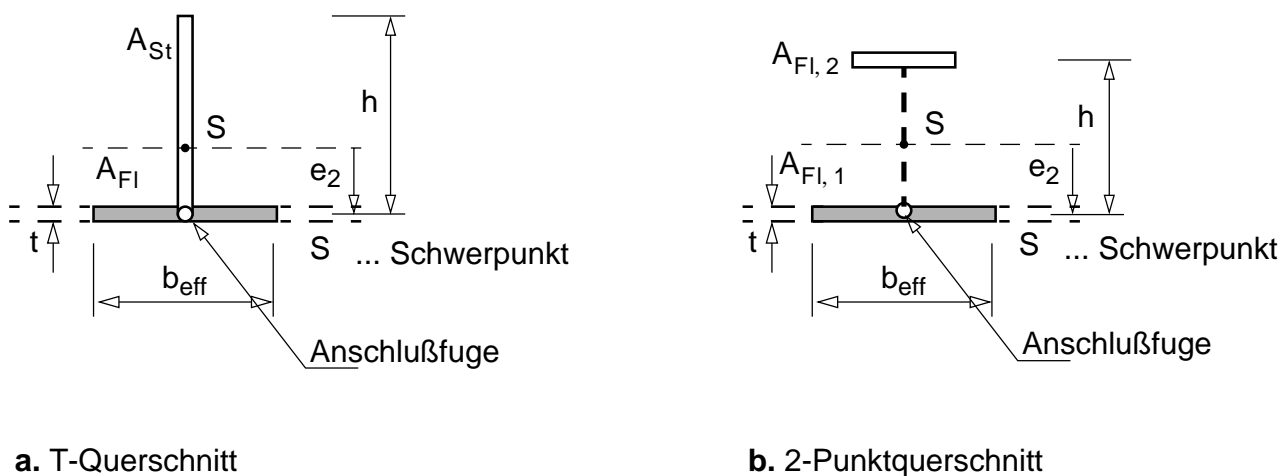


Bild 8-24 Alternative Querschnittsformen des Schalenersatzbalkens

Tab. 8-1 Alternative Querschnittsformen des Schalenersatzbalkens — **a.** T-Querschnitt des Ersatzbalkens oder **b.** 2-Punktquerschnitt des Ersatzbalkens

	a. T-Querschnitt	b. 2-Punktquerschnitt
Fläche	$A_2 = A_{FI} + A_{St}$	$A_2 = A_{FI,1} + A_{FI,2}$
Exzentrizität (Schwerpunktsabstand)	$e_2 = \frac{h \cdot A_{St}}{2(A_{FI} + A_{St})}$	$e_2 = \frac{A_{FI,2}h}{A_{FI,1} + A_{FI,2}}$
Trägheitsmoment	$I_2 = \frac{A_{St}(4A_{FI} + A_{St})h^2}{12(A_{FI} + A_{St})}$	$I_2 = \frac{A_{FI,1}A_{FI,2}h^2}{A_{FI,1} + A_{FI,2}}$
Flächenverhältnisfaktor	$\alpha = A_{St}/A_{FI}$ $\alpha = \frac{4A_2e_2^2}{3I_2 - A_2e_2^2}$	$\alpha = A_{FI,2}/A_{FI,1}$ $\alpha = \frac{A_2e_2^2}{I_2}$
Querschnittshöhe	$h = 2e_2 \cdot \frac{(1 + \alpha)}{\alpha}$	$h = e_2 \cdot \frac{(1 + \alpha)}{\alpha}$
Teilflächen	$A_{FI} = \frac{A_2}{1 + \alpha}$ $A_{St} = \frac{\alpha A_2}{1 + \alpha}$	$A_{FI,1} = \frac{A_2}{1 + \alpha}$ $A_{FI,2} = \frac{\alpha A_2}{1 + \alpha}$

Vorzeichens der Exzentrizität e_1 der Längssteife

Der Gesamtsystem des Analogiemodelles besteht aus dem Doppelbalken und der dazwischenliegenden, nachgiebigen Verbundfuge (Axialfeder C_{II}). Der Abstand e_1 der Längssteife ist in Bild 8-25 ab nun positiv definiert für den Fall der außenliegenden Längssteife. Dies trifft für einen Großteil der praktischen Anwendungsfälle zu. Weiters addieren sich im Fall der außenliegenden Längssteife die Steifigkeiten des Schalenersatzbalkens und der Längssteife.

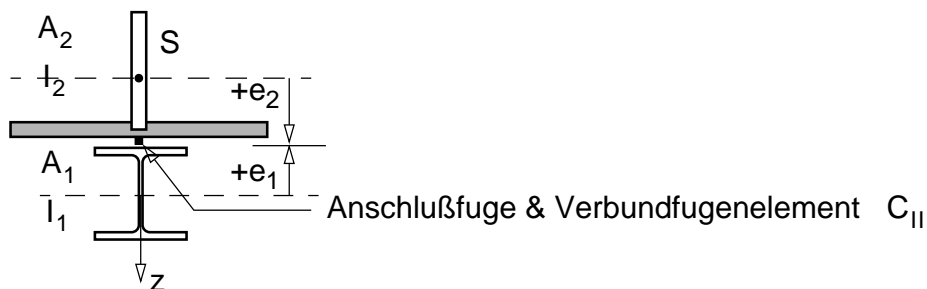


Bild 8-25 Gesamtsystem des Analogiemodelles und Vorzeichenkonvention für die Exzentrizität e_1 der Auflagerlängssteife

Effekte nach Theorie 2. Ordnung

In der Gesamtsteifigkeitsmatrix (zugehöriger Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = [u_A \quad w \quad u_S]^T$) werden die geometrischen Differenzsteifigkeiten nach Theorie 2. Ordnung berücksichtigt. Am Schalenersatzbalken kann dies nicht explizit erfolgen, sondern gelingt nur durch Differenzbildung der Steifigkeitsmatrizen nach Theorie 1. und 2. Ordnung. Im Regelfall ist die Differenzsteifigkeitsmatrix eine 2x2-Matrix. Mit anderen Worten, der Schalenersatzbalken enthält bereits direkt die Effekte nach Theorie 2. Ordnung aufgrund der veränderten Steifigkeitsparameter der Schale.

Der zugehörige Lastvektor besteht aus drei Belastungskomponenten — der Axialbelastung der Längssteife, der Summe der Transversalbelastungen und der Axialbelastung des Schalenersatzbalkens:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{x,A} & r_{z,A} + r_{z,S} & r_{x,S} \end{bmatrix}^T \quad (8-70)$$

Kompakte Darstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix ist in dimensionsreiner und kompakter Form mit den Dehnsteifigkeiten D_1 und D_2 , den Koppelsteifigkeiten S_1 und S_2 , den Biegesteifigkeiten K_1 und K_2 bzw. der Federsteifigkeit C in Gl. (8-72b) dargestellt. Die bezogenen Exzentrizitäten \bar{e}_1 und \bar{e}_2 sind dabei auf die Schalenlänge L bezogen:

$$\begin{aligned} D_1 &= EA_1 \\ D_2 &= EA_2 \end{aligned} \quad (8-71a)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= e_1 n \pi / L \\ \bar{e}_2 &= e_2 n \pi / L \end{aligned} \quad (8-71b)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= EA_1 \cdot e_1 n \pi / L = D_1 \cdot \bar{e}_1 \\ S_2 &= EA_2 \cdot e_2 n \pi / L = D_2 \cdot \bar{e}_2 \end{aligned} \quad (8-71c)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= EI_1 \cdot n^2 \pi^2 / L^2 \\ K_2 &= EI_2 \cdot n^2 \pi^2 / L^2 \end{aligned} \quad (8-71d)$$

$$C = C_{11} \cdot L^2 / (n^2 \pi^2) \quad (8-71e)$$

In Gl. (8-72a) und Gl. (8-72b) ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix in vollständiger und kompakter Form dargestellt.

$$\mathbf{K} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \begin{bmatrix} EA_1 + C_{II} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} & -EA_1 \cdot \frac{e_1 \cdot n\pi}{L} & -C_{II} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \\ -EA_1 \frac{e_1 \cdot n\pi}{L} & \frac{EI_1 \cdot n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{EA_1 \cdot e_1^2 \cdot n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{EI_2 \cdot n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{EA_2 \cdot e_2^2 \cdot n^2 \pi^2}{L^2} - N_1 & EA_2 \frac{e_2 \cdot n\pi}{L} \\ -C_{II} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} & EA_2 \cdot \frac{e_2 \cdot n\pi}{L} & EA_2 + C_{II} \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \end{bmatrix} \quad (8-72a)$$

$$\mathbf{K} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \begin{bmatrix} D_1 + C & -S_1 & -C \\ -S_1 & (K_1 - N_1) + D_1 \cdot \bar{e}_1^2 + K_2 + D_2 \cdot \bar{e}_2^2 & S_2 \\ -C & S_2 & D_2 + C \end{bmatrix} \quad (8-72b)$$

Der Effekt nach Theorie 2. Ordnung in der Längssteife — verminderte Biegesteifigkeit der Längssteife zufolge Drucknormalkraft N_1 — ist in (8-72a) und (8-72b) grau hinterlegt. In den folgenden Ausführungen der Parameterstudien (Kap. 8.2.3) ist er jedoch nicht enthalten. Er kann aber mit dem bekannten ‘‘Dischinger-Faktor‘‘ des aktuellen Reihengliedes n durch die modifizierte Biegesteifigkeit K_1^* zur Bestimmung der Verformungen erfaßt werden (Gl. (8-73)). Die Biegemomente werden entsprechend den Materialgleichungen mit der Biegesteifigkeit K_1 bestimmt.

$$K_1^* = (K_1 - N_1) = K_1 \left(1 - \frac{N_1 \cdot L^2}{EI \cdot n^2} \right) = K_1 \left(1 - \frac{N_1}{N_{CR,n}} \right) \quad (8-73)$$

8.2.2.3 Anwendungen des Doppelbalken-Analogiemodelles

Zur später durchgeführten Beurteilung von Kräfteumlagerungen am Gesamtsystem wird die Beanspruchungsumlagerung für Einheitslastfälle (aktuelles Glied n der Reihenentwicklung) in Abhängigkeit der Steifigkeiten von Längssteife, Schalenersatzbalken und Verbundfuge untersucht. Damit gelingt es, eine gute qualitative Aussage der entstehenden Kraftwirkungen und Verformungen zufolge der am Gesamtsystem wirkenden Gesamtbelastung zu erhalten.

Einheitslastfälle

Die Verformungsvektor $\mathbf{u}_A = [\mathbf{u}; \mathbf{w}]_A^T$ der exzentrischen Längssteifenfaser A und der Schnittkraftvektor $\mathbf{n} = [\mathbf{N}; \mathbf{M}]^T$ der Längssteife werden für folgende Einheitslastfälle (Bild 8-26) bestimmt:

- Lastfall 1 — Axialbelastung der Längssteife in der exzentrischen Anschlußfuge A
Dieser Lastfall entspricht einer exzentrischen Axialbelastung der Längssteife durch zwei Endkräfte bzw. durch eine exzentrische Lagerkraft und den zugehörigen, entgegengesetzt gerichteten konstanten Wandschubkräften an der Schale (Bild 8-26.b).
- Lastfall 2 — Axialbelastung des Schalenersatzbalkens
Dieser Lastfall entspricht der Belastung des Zylinders durch die lokale Lagerkraft F_Z . Im Fall einer starren Verbindungsfuge ($C \rightarrow \infty$) ist er mit Lastfall 1 ident (Bild 8-26.c).
- Lastfall 3 — Transversalbelastung des Ersatzbalkens bzw. der Längssteife
Dieser Lastfall entspricht durch die starre Koppelung in transversaler Richtung der Belastung von Zylinder oder Längssteife (Bild 8-26.d).
- Lastfall 4 — zentrische Axialbelastung der Längssteife
Dieser Lastfall entspricht einer zentrischen Axialbelastung der Längssteife durch zwei Endkräfte bzw. durch die zentrische Lagerkraft F_L der Längssteife und dem zugehörigen, entgegengesetzt gerichteten konstanten Wandschubkräften an der Schale (Bild 8-26.e).

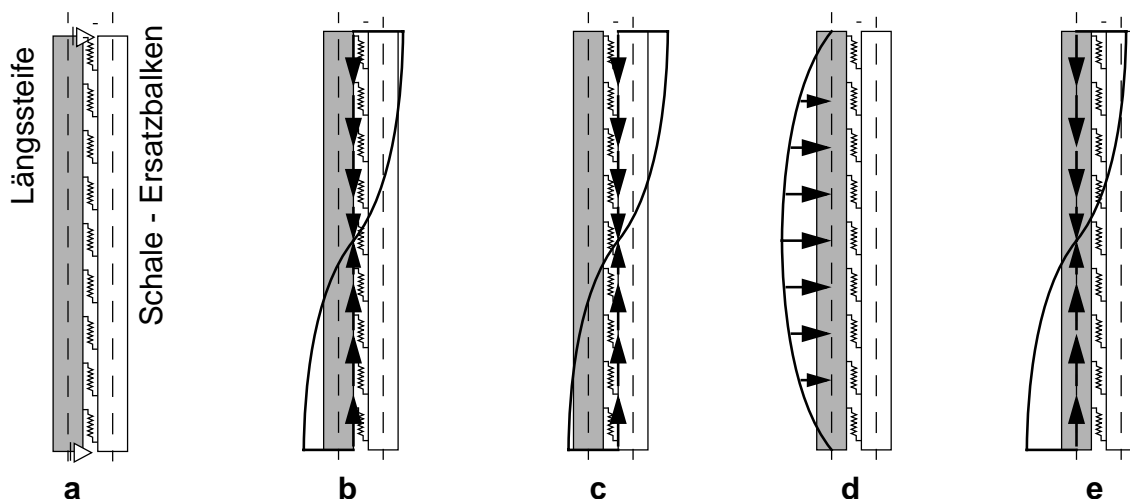


Bild 8-26 Einheitslastfälle — a. Doppelbalkenanalogiemodell und b. bis e. Einheitslastfälle 1 bis 4

Verformungen der Längssteife für die Einheitslastfälle 1 bis 4

Die Verformungen der Längssteife (bezüglich der exzentrischen Faser A) ergeben sich aus der Steifigkeitsmatrix des Doppelbalkenmodelles für den jeweiligen Einheitslastfall. In Gl. (8-74a) und Gl. (8-74b) sind die Verformungen in Kurzform dargestellt, die verwendeten Steifigkeitskoeffizienten α_u und α_w sind in Tab. 8-2 für allgemeine Steifigkeitsparameter der Einzelkomponenten dargestellt.

$$u_A = \alpha_u \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{K}} \tag{8-74a}$$

$$w_A = \alpha_w \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{K}} \tag{8-74b}$$

Beanspruchungen der Längssteife für die Einheitslastfälle 1 bis 4

Zur Bestimmung der Beanspruchungen der Längssteife müssen die Verformungen der Schwerpunktslinie berechnet werden. Dies geschieht entsprechend Kap. 8.2.1.6 durch Anwendung der Transformationsmatrix \mathbf{T} auf den Verformungsvektor \mathbf{u}_A der exzentrischen Anschlußfuge A.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\bar{e}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_A} \tag{8-75}$$

Der Schnittkraftvektor wird aus den Materialgleichungen bestimmt, die kompakte Darstellung erfolgt mit den Steifigkeitskoeffizienten α_N und α_M , wobei α_M ident mit α_w ist.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -D_1 \cdot \frac{n\pi}{L} & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -D_1 \cdot \frac{n\pi}{L} & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\bar{e}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_A} \tag{8-76a}$$

$$\frac{N}{D_1} = \alpha_N \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{K}} \tag{8-76b}$$

$$\frac{M}{K_1} = \alpha_M \cdot \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{K}} \tag{8-76c}$$

Im vorliegenden Fall allgemeiner Steifigkeitsverhältnisse werden $\det \mathbf{K}$ und K^* zu:

$$\det \mathbf{K} = C[(D_1 + D_2)(K_1 + K_2) + D_1 D_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2] + D_1 D_2(K_1 + K_2) \tag{8-77a}$$

$$K^* = K_1 + D_1 \cdot \bar{e}_1^2 + K_2 + D_2 \cdot \bar{e}_2^2 \tag{8-77b}$$

Die Verformungskoeffizienten α_u , α_w und Schnittkraftkoeffizienten α_N , α_M sind in Tab. 8-2 für allgemeine Steifigkeitsverhältnisse zusammengefaßt.

Tab. 8-2 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für Einheitslastfälle 1 bis 4

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
①	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$CK^* + D_2(K_1 + K_2 + D_1\bar{e}_1^2)$	$C(D_1\bar{e}_1 - D_2\bar{e}_2) + D_1D_2\bar{e}_1$	$-CD_1[D_2\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2] - D_1D_2(K_1 + K_2)$
②	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,S} = 1 \end{bmatrix}$	$CK^* - D_1D_2\bar{e}_1\bar{e}_2$	$C(D_1\bar{e}_1 - D_2\bar{e}_2) - D_1D_2\bar{e}_2$	$-CD_1[D_2\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2]$
③	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C(D_1\bar{e}_1 - D_2\bar{e}_2) + D_1D_2\bar{e}_1$	$C(D_1 + D_2) + D_1D_2$	$CD_1D_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$
④	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C[D_2\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2] + D_2(K_1 + K_2)$	$- CD_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$	$-CD_1[D_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2 + K_1 + K_2] - D_1D_2(K_1 + K_2)$
$\det \mathbf{K} = C[(D_1 + D_2)(K_1 + K_2) + D_1D_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2] + D_1D_2(K_1 + K_2)$				

Steifigkeitsgrenzfälle

Die Schnittkraftkoeffizienten sind nachfolgend zusätzlich für folgende Steifigkeitsgrenzfälle dargestellt:

- starre Verbindungsfuge ($C \rightarrow \infty$) (Tab. 8-3)
- unendlich nachgiebige Verbindungsfuge ($C = 0$) (Tab. 8-4)
- dehnstarre Auflagerlängssteife ($D_1 \rightarrow \infty$) (Tab. 8-5)
- biegestarke Auflagerlängssteife ($K_1 \rightarrow \infty$) (Tab. 8-6)
- dehn- und biegestarke Längssteife ($D_1 \rightarrow \infty$ und $K_1 \rightarrow \infty$) (siehe Tab. 8-7)
- dehnstarrer Schalenersatzbalken ($D_2 \rightarrow \infty$) (Tab. 8-8)
- biegestarrer Schalenersatzbalken ($K_2 \rightarrow \infty$) (Tab. 8-9)
- dehn- und biegestarrer Schalenersatzbalken ($D_2 \rightarrow \infty$ und $K_2 \rightarrow \infty$) (siehe Tab. 8-10)

Bei Zutreffen dieser Grenzfälle der Steifigkeitsannahmen kommt es zu einem teilweisen Entfall von Umlagerungseffekten. Dann ergeben sich die Schnittkraftkomponenten wie folgt.

Steifigkeitsgrenzfälle für die Verbundfuge: $C \rightarrow \infty$ bzw. $C = 0$

Im Fall der starren Verbundfuge ($C \rightarrow \infty$ siehe Tab. 8-3) erfolgt stets eine gemeinsame steifigkeitsproportionale Abtragung aller Lastfälle am Doppelbalken.

Durch die unendlich nachgiebige Verbindungsfuge ($C = 0$ siehe Tab. 8-4) kommt es zu einer Entkoppelung der Lastabtragung in axialer Richtung. Die Normalkräfte weisen somit keine Umlagerungseffekte auf, dies ist aus den Koeffizienten α_N für die Lastfälle 1 bis 4 ersichtlich. Für Lastfall 1 und 4, es wird die Längssteife belastet, ergeben sich keine Umlagerungseffekten der Normalkräfte von der Längssteife in die Schale. Für Lastfall 2 und 3, es wird die Schale belastet, verhält es sich genau umgekehrt.

Die Biegemomente sind entsprechend dem Analogiebalken, der in diesem Steifigkeitsgrenzfall der Verbundfuge aus zwei in Axialrichtung entkoppelten Balken besteht, biegesteifigkeitsproportional aufgeteilt. In den Koeffizienten α_M spiegelt sich die Größe und die Wirkungsrichtung der Momentenbelastung der einzelnen Lastfälle wieder. Für Lastfall 1 entsteht die Momentenbelastung zufolge der Exzentrizität \bar{e}_1 (Axialbelastung der Längssteife in der Anschlußfuge) bzw. Lastfall 2 zufolge der Exzentrizität \bar{e}_2 (Axialbelastung der Schale). Für Lastfall 3 liegt eine reine Transversalbelastung der Längssteife vor, daraus folgt der Nennerwert 1 für α_M .

Lastfall 4 stellt die zentrische Axialbelastung der Längssteife vor. Da hier keine Umlagerung der Normalkräfte erfolgt, entsteht keine Biegemomentenbeanspruchung in der Längssteife. In diesem Steifigkeitsgrenzfall entspricht Lastfall 4 durch die Vorgabe einer unendlich nachgiebigen Verbundfuge dem idealen Membranschubspannungszustand, der als Gleichgewichtssystem bei isolierter Betrachtung von Auflagerlängssteife und Schale zugrundeliegt (siehe Kap. 1.1.4.4).

Steifigkeitsgrenzfälle für die Längssteife: $D_1 \rightarrow \infty$ bzw. $K_1 \rightarrow \infty$

Im Fall der dehnstarrten Längssteife ($D_1 \rightarrow \infty$ siehe Tab. 8-5) kommt es nach wie vor zu Umlagerungen der Normalkräfte. Lediglich bei Lastfall 4 kommt es zu keiner Umlagerung der Normalkräfte von der Längssteife in die Schale.

In diesem Steifigkeitsgrenzfall entspricht Lastfall 4 durch die Vorgabe der unendlich dehnstarrten Längssteife dem idealen Membranschubspannungszustand (siehe Kap. 1.1.4.4). Dies begründet sich mit der isolierten Betrachtung von Auflagerlängssteife und Schale. Die dehnstarre Auflagerlängssteife weist keine Verformungen in Axialrichtung auf, somit entstehen keine Inkompatibilitäten zwischen Auflagerlängssteife und Schaft.

Der Fall der biegestarren Längssteife ($K_1 \rightarrow \infty$ siehe Tab. 8-6) bewirkt nur Lastfall 3 keine Umlagerungseffekte. Das Biegemoment, das durch die Transversalbelastung entsteht, wird erwartungsgemäß von der Längssteife alleine abgetragen. Bei allen anderen Lastfällen (1, 2 bzw. 4) resultieren steifigkeitsproportionale Aufteilungen der Biegemomentenbelastungen (Exzentrizitäten \bar{e}_1 bzw. \bar{e}_2), die im wesentlichen von der Gesamtbiegesteifigkeit des Doppelbalkens abhängen. Weiters entstehen für diese Lastfälle Normalkraftumlagerungen.

Liegt eine dehn- und biegestarre Längssteife ($D_1 \rightarrow \infty$ und $K_1 \rightarrow \infty$ siehe Tab. 8-7) vor, so treten für Lastfall 1, 3 und 4 keine Umlagerungseffekte hinsichtlich der Normalkräfte auf. Lediglich für Lastfall 2 kommt es zu einer Normalkraftumlagerung in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit. Die Biegemomentenbelastungen von Lastfall 1, 2 und 3 werden von der Längssteife alleine abgetragen.

Steifigkeitsgrenzfälle des Schalenersatzbalkens: $D_2 \rightarrow \infty$ bzw. $K_2 \rightarrow \infty$

Ist die Schale bzw. vielmehr der die Schale repräsentierende Schalenersatzbalken dehnstarr ($D_2 \rightarrow \infty$ siehe Tab. 8-8), so entstehen bei allen Lastfälle zu Umlagerungseffekten. Wesentlich Steifigkeitsparameter sind dabei die Dehnsteifigkeit D_1 der Längssteife und die Verbundfugensteifigkeit C .

Ist der Schalenersatzbalken biegestarr ($K_2 \rightarrow \infty$ siehe Tab. 8-9), so entstehen bei Lastfall 1, 2 und 4 Umlagerungen der Normalkräfte bzw. Biegemomente. Die Umlagerungen stellen sich wiederum entsprechend der Dehnsteifigkeit D_1 der Längssteife und der Verbundfugensteifigkeit C ein. Bei Lastfall 3 wird die Transversalbelastung erwartungsgemäß vom Schalenersatzbalken alleine abgetragen.

Liegt ein dehn- und biegestarrer Schalenersatzbalken vor ($D_2 \rightarrow \infty$ und $K_2 \rightarrow \infty$ siehe Tab. 8-10), so entstehen bei Lastfall 2 und 3 (Belastung der Schale) keine Umlagerungen. Bei Lastfall 1 und 4 ergeben sich Normalkraftumlagerungen entsprechend der Dehnsteifigkeit D_1 und der Verbundfugensteifigkeit C . Bei allen Lastfällen entstehen keine Biegemomentenbeanspruchungen in der Längssteife.

Tab. 8-3 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für eine starre Verbundfuge $C \rightarrow \infty$

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
①	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$K_1 + D_1 \cdot \bar{e}_1^2 + K_2 + D_2 \cdot \bar{e}_2^2$	$(D_1 \bar{e}_1 - D_2 \bar{e}_2)$	$- D_1 [D_2 \bar{e}_2 (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2]$
②	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,S} = 1 \end{bmatrix}$	$K_1 + D_1 \cdot \bar{e}_1^2 + K_2 + D_2 \cdot \bar{e}_2^2$	$(D_1 \bar{e}_1 - D_2 \bar{e}_2)$	$- D_1 [D_2 \bar{e}_2 (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2]$
③	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$D_1 \bar{e}_1 - D_2 \bar{e}_2$	$(D_1 + D_2)$	$D_1 D_2 (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$
④	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$D_2 \bar{e}_2 (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2$	$- D_2 (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$	$- D_1 [D_2 (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2 + K_1 + K_2]$
$\det \mathbf{K} = [(D_1 + D_2)(K_1 + K_2) + D_1 D_2 (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2]$				

Tab. 8-4 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für eine unendlich nachgiebige Verbundfuge $C = 0$

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
①	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{(K_1 + K_2 + D_1 \bar{e}_1^2)}{D_1(K_1 + K_2)}$	$\frac{\bar{e}_1}{(K_1 + K_2)}$	-1
②	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,s} = 1 \end{bmatrix}$	$\frac{-\bar{e}_1 \bar{e}_2}{(K_1 + K_2)}$	$\frac{-\bar{e}_2}{K_1 + K_2}$	0
③	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{\bar{e}_1}{K_1 + K_2}$	$\frac{1}{K_1 + K_2}$	0
④	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D_1}$	0	-1
$\det \mathbf{K} = 1$				

Tab. 8-5 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für eine dehnstarre Längssteife ($D_1 \rightarrow \infty$)

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
1	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$(C + D_2)\bar{e}_1^2$	$(C + D_2)\bar{e}_1$	$-C[D_2\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2] - D_2(K_1 + K_2)$
2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,S} = 1 \end{bmatrix}$	$(C\bar{e}_1^2 - D_2\bar{e}_1\bar{e}_2)$	$(C\bar{e}_1 - D_2\bar{e}_2)$	$-C [D_2\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2]$
3	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_{z,A} = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$(C + D_2)\bar{e}_1$	$(C + D_2)$	$CD_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$
4	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_{z,A} = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	$-C[D_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2 + K_1 + K_2] - D_2(K_1 + K_2)$ -detK
$\det\mathbf{K} = C[(K_1 + K_2) + D_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2] + D_2(K_1 + K_2)$				

Tab. 8-6 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für eine biegestarke Längssteife ($K_1 \rightarrow \infty$)

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
①	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C + D_2$	$\frac{C(D_1\bar{e}_1 - D_2\bar{e}_2) + D_1D_2\bar{e}_1}{K_1}$	$-D_1(C + D_2)$
②	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,s} = 1 \end{bmatrix}$	C	$\frac{C(D_1\bar{e}_1 - D_2\bar{e}_2) - D_1D_2\bar{e}_2}{K_1}$	$-CD_1$
③	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	$-\frac{C(D_1 + D_2) + D_1D_2}{K_1}$	0
④	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C + D_2$	$-\frac{CD_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)}{K_1}$	$-D_1(C + D_2)$
$\det \mathbf{K} = C(D_1 + D_2) + D_1D_2$				

Tab. 8-7 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für eine dehn- und biegestarke Längssteife ($D_1 \rightarrow \infty, K_1 \rightarrow \infty$)

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
1	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	$\frac{\bar{e}_1}{K_1}$	-1
2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,S} = 1 \end{bmatrix}$	0	$\frac{-\bar{e}_2}{K_1}$	-C
3	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	$\frac{1}{K_1}$	0
4	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	-1
detK = 1				

Tab. 8-8 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für einen dehnstarken Schalenersatzbalken ($D_2 \rightarrow \infty$)

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
①	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C\bar{e}_2^2 + K_1 + K_2 + D_1\bar{e}_1^2$	$-C\bar{e}_2 + D_1\bar{e}_1$	$-CD_1\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) - D_1(K_1 + K_2)$
②	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,s} = 1 \end{bmatrix}$	$C\bar{e}_2^2 - D_1\bar{e}_1\bar{e}_2$	$-(C + D_1)\bar{e}_2$	$-CD_1\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$
③	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$-C\bar{e}_2 + D_1\bar{e}_1$	$C + D_1$	$CD_1(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$
④	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C\bar{e}_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + K_1 + K_2$	$-C(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$	$-CD_1(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2 + D_1(K_1 + K_2)$
$\det \mathbf{K} = C[(K_1 + K_2) + D_1(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^2] + D_1(K_1 + K_2)$				

Tab. 8-9 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für einen biegestarren Schalenersatzbalken ($K_2 \rightarrow \infty$)

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
1	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C + D_2$	0	$- D_1(C + D_2)$
2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,S} = 1 \end{bmatrix}$	C	0	$-CD_1$
3	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	0
4	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$C + D_2$	0	$- D_1(C + D_2)$
$\det \mathbf{K} = C[(D_1 + D_2)] + D_1 D_2$				

Tab. 8-10 Verformungs- und Schnittkraftkoeffizienten für einen dehn- und biegestarren Schalenersatzbalken ($D_2 \rightarrow \infty$, $K_2 \rightarrow \infty$)

LF Nr.	Lastvektor	α_u	$\alpha_w = \alpha_M$	α_N
①	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	1	0	$-D_1$
②	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{x,s} = 1 \end{bmatrix}$	0	0	0
③	$\begin{bmatrix} 0 \\ q_z = 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	0	0	0
④	$\begin{bmatrix} q_{x,A} = 1 \\ q_z = -\bar{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	1	0	$-D_1$
$\det \mathbf{K} = C + D_1$				

8.2.3 Linear-elastische Parameterstudien

8.2.3.1 Geometrie und Belastung

Für die folgenden zwei Lastfälle wird das Tragverhalten hinsichtlich verschiedenster Steifigkeitsverhältnisse von Schale, Längssteife und Verbundfuge untersucht:

- zentrische Auflagerung der Längssteife (Lagerkraft F_L) (Bild 8-27.a)
- lokale Randauflagerung (=Zargenlagerung) der Zylinderschale (Lagerkraft F_Z) (Bild 8-27.b)

Die qualitative Beurteilung der Resultate erfolgt mithilfe des Doppelbalken–Analogiemodelles und der bereits erarbeiteten Schnittkraftkoeffizienten von Tab. 8-2 bis Tab. 8-10.

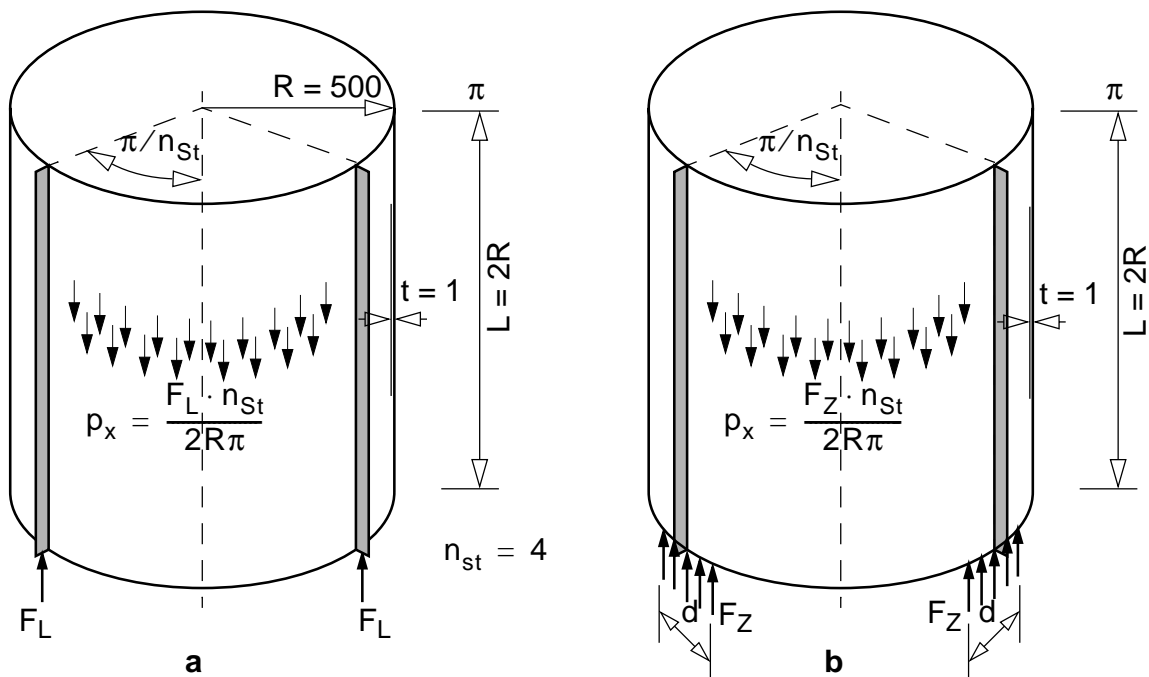


Bild 8-27 a. zentrische Auflagerung der Auflagerlängssteife und b. lokale Randauflagerung des Schaftes

Referenzbelastung und Referenzgeometrie

Die Referenzbelastung beträgt bei beiden Lastfällen ausgedrückt durch die Lagerkräfte:

$$F_L = F_Z = 1000 \text{ kN}$$

An der Zylinderwand wirkt jeweils konstante eine Wandschubbelastung. Die zentrische Lagerung der Auflagerlängssteife entspricht dem Einheitslastfall 4, die lokale Randlagerung des Zylinders entspricht dem Einheitslastfall 2 des Doppelbalkenmodelles (Kap. 8.2.2.3 — Tab. 8-2 bis Tab. 8-10).

Der Radius des Zylinderschafts beträgt $R = 500 \text{ cm}$ bzw. das Radius-Wanddickenverhältnis

$R/t = 500$ (also Wanddicke $t = 1,0 \text{ cm}$) und die Länge des Modelles $L = 2R$. Die lokale Lagerbreite der 4 Einzelauflagerungen beträgt $d = 78,5 \text{ cm}$. Die Materialkennwerte der Längssteife und der Zylinderschale entsprechen Baustahl St 37 (= S 235) mit den elastischen Materialkennwerten:

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2 \text{ und } \nu = 0,3$$

Doppelbalkenanalogiemodell

Der Schalenersatzbalken wird entsprechend Kap. 8.2.2.2 als T-Querschnitt erfaßt. Für die Referenzschale ist in Bild 8-28 für das Reihenglied $n = 1$ der Ersatzbalken dargestellt. Als Bezugsgröße wird die mitwirkende Fläche der unendlich breiten, ebenen Scheibe (Gl. (8-78)), die mittig durch cosinus-förmig verteilte Schubkräfte belastet wird verwendet.

$$b_{\text{eff}} = 0,370 \cdot L/n \tag{8-78}$$

$$A_{\text{eff}} = b_{\text{eff}} t$$

Die dimensionslose Darstellung in Bild 8-28 zeigt die Gesamtfläche und die Teilflächen des T-Querschnittes für die Referenzschale. Die Gurtfläche des Schalenersatzbalkens übersteigt mit steigender Wellenzahl n die mitwirkende Scheibenfläche A_{eff} aufgrund der Eigenbiegesteifigkeit der Kreiszylinderschale. Hingegen wird mit steigender Wellenzahl n die Stegfläche immer kleiner, letztendlich besteht der Querschnitt des Ersatzbalkens nur mehr aus der Gurtfläche.

Absolut gesehen wird der Querschnitt des Schalenersatzbalkens immer kleiner. Aus Bild 8-28 ist dies nicht ersichtlich, da die Darstellung in bezogener Form auf die wellenzahlabhängige mitwirkende Scheibenfläche A_{eff} erfolgt (Gl. (8-78)). A_{eff} nimmt aber umgekehrt proportional mit steigender Wellenzahl n ab. Aufgrund dieser abnehmenden Querschnittsgröße des Schalenersatzbalkens für höhere Reihenglieder, die zunehmend lokale Lastzustände repräsentieren, geht die Gesamlastabtragung allmählich ganz auf die Längssteife über.

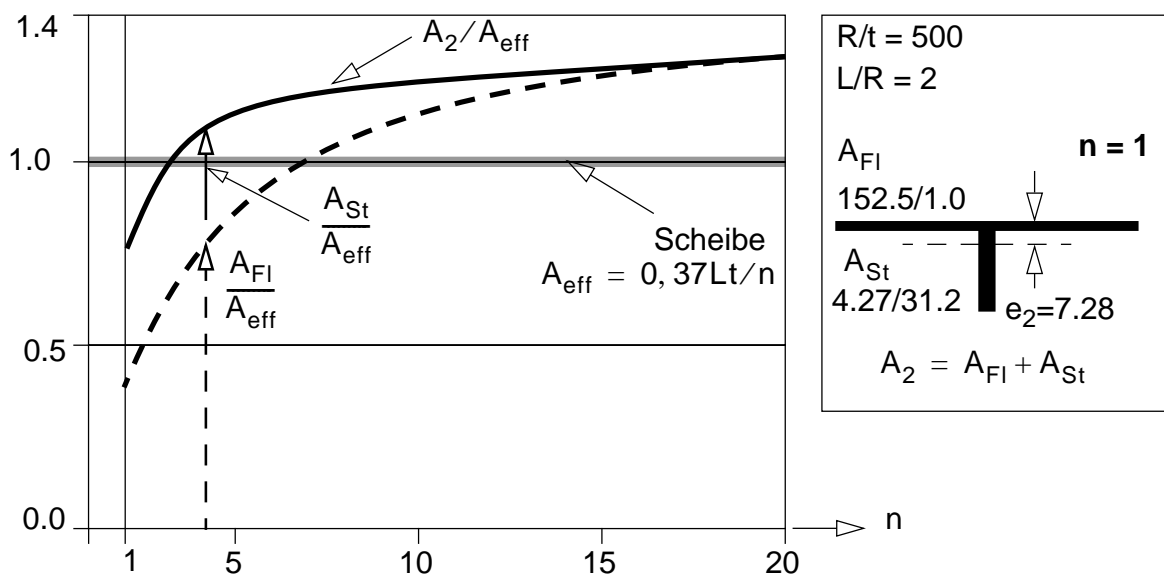


Bild 8-28 Bezogene Darstellung der Querschnittsparameter des Schalenersatzbalkens in Bezug auf die mitwirkende Fläche der unendlich breiten Scheibe in Abhängigkeit der Reihenzahl n

8.2.3.2 Übersicht durchgeführter Parameterstudien

Es werden folgende Parameter variiert:

- **Parameterstudie 1** (Kap. 8.2.3.3):
Längssteife — HEB 100 bis HEB 400
- **Parameterstudie 2** (Kap. 8.2.3.4):
Nachgiebigkeit der elastischen Verbundfuge (Steifigkeitsparameter C_{II})
- **Parameterstudie 3** (Kap. 8.2.3.5):
Bündigkeit der Längssteife (außenbündig, zentrisch oder innenbündig - Exzentrizität e_1)

Die Übersicht über die untersuchten Fälle ist in der folgenden Tabelle gegeben:

Tab. 8-11 Parameterkombinationen

Parameterstudie	Auflagerlängssteifenprofil	Verbundfuge	Bündigkeit (Exzentrizitätsmaß e_1)	Auflagerung	zugehörige Tabelle von Kap. 8.2.2.3
1	HEB 100 HEB 160 HEB 240 HEB 300 HEB 400	starr ($C_{II} \rightarrow \infty$)	$+(h+t)/2$	zentrische Lagerung der Auflagerlängssteife (Lagerkraft F_L) lokale Randlagerung der Zylinderschale (Lagerkraft F_Z)	Tab. 8-2, Tab. 8-3, bzw. Tab. 8-5
2	HEB 300	nachgiebig	$+(h+t)/2$		Tab. 8-2 bzw. Tab. 8-4
3	HEB 300	starr ($C_{II} \rightarrow \infty$)	0		Tab. 8-3
			$-(h+t)/2$		

Auflagerungsbedingungen

Wie bereits erwähnt, werden die Parameteruntersuchungen für folgende Auflagerungen des Schaft-Längssteifen-Systems angestellt:

- zentrische Auflagerung der Auflagerlängssteife (Lagerkraft F_L in Bild 8-29.a)
- lokale Randauflagerung (=Zargenlagerung) der Zylinderschale (Lagerkraft F_Z in Bild 8-29.b)

Die lokale Randlagerung (=Zargenauflagerung) des Zylinderschaftes kann dabei aus drei Kraftwirkungen zusammengesetzt werden:

- Anteil 1 — zentrische Auflagerkrafteinleitung in die Längssteife (Bild 8-29.b.1)
- Anteil 2 — Randmomentenbelastung der Längssteife, die durch die entgegengesetzt gerichteten Kräfte F_Z in der Längssteife und am Schaft mit dem Hebelsarm $e = (h + t)/2$ wirkt (Bild 8-29.b.2)
- Anteil 3 — lokale Kräftegleichgewichtsgruppe am unteren Schalenrand bestehend aus der diskreten Kraft F_Z und den entgegengesetzt gerichteten, konstant verteilten Auflagerkräften $p_x = F_Z/d$ (Bild 8-29.b.3)

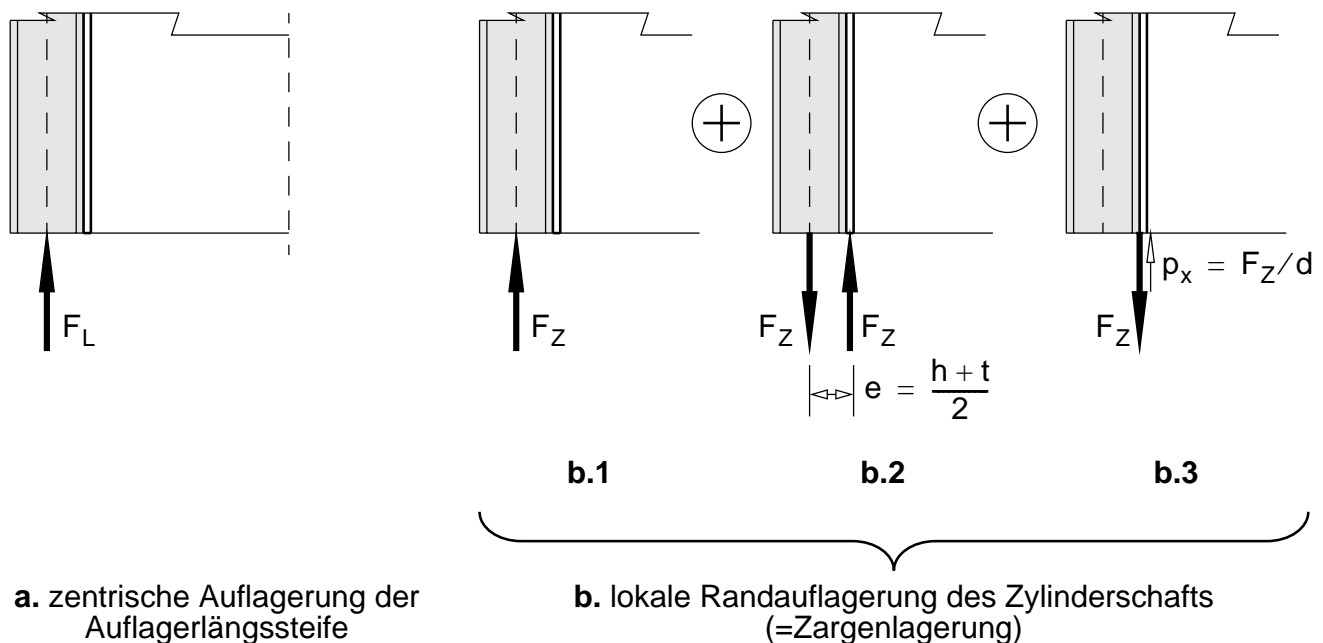


Bild 8-29 Auflagerungsbedingungen des Schaft-Längssteifen-Systems bei unendlich nachgiebiger Auflagerung und Aufteilung der lokalen Randlagerung des Zylinderschafts in drei Grundanteile

Darstellung der Ergebnisse

In den folgenden Abbildungen sind die folgenden Beanspruchungs- und Verformungsgrößen der Auflagerlängssteife und der Schale dargestellt:

- Normalkraft N und Biegemoment M der Auflagerlängssteife
- Axialkraft n_x der Schale entlang des Auflagerlängssteifenmeridianes
- Schubkraft $n_{x\theta}$ der Schale entlang des Auflagerlängssteifenmeridianes
- Umfangsbiegemoment m_θ der Schale entlang des Auflagerlängssteifenmeridianes
- Radialverformung w entlang des Auflagerlängssteifenmeridianes

Für die Doppelreihenlösung werden die Lagerkräfte über die Länge $L_1 = 0,01L$ verteilt. Die Sollrandwerte — Lagerkraft F_L bzw. die zur Lagerkraft F_z zugehörige Randaxialkraft $n_x = F_z/d$ — werden auf ihre theoretischen Werte hin interpoliert.

8.2.3.3 Parameterstudie 1 — Variation des Längssteife

Die Variation des Längssteife bedeutet, daß mit zunehmender Profilgröße die Dehnsteifigkeit (D_1), die Biegesteifigkeit (K_1) und die Profilhöhe h bzw. die Exzentrizität e_1 bei außenbündiger Anordnung der Längssteife zunehmen.

Zentrische Auflagerung der Längssteife mit exzentrischer Schaftanbindung

Die Grundlage zur qualitativen Beurteilung der entstehenden Normalkraft- und Biegemomentenverläufe der Längssteife bilden die Abhängigkeiten von den Steifigkeitsverhältnissen des Doppelbalken-analogiemodellens entsprechend Tab. 8-3.

Die Umlagerung der Normalkraft N der Auflagerlängssteife ist umso ausgeprägter, je geringer die Dehnsteifigkeit D_1 der Längssteife ist (Bild 8-30). Liegt im Grenzfall eine dehnstarre Längssteife vor, ergibt sich keine Umlagerung. Die Normalkraft ist dann linear veränderlich, das Biegemoment wird zu Null. In der Schale bildet sich somit der ideale Schubmembranspannungszustand aus (siehe Kap. 1.1.4.4).

Das Biegemoment M der Längssteife ist für die außenliegende, zentrisch belastete Auflagerlängssteife stets negativ, das heißt der außenliegende Gurt erhält Biegedruckspannungen (Bild 8-31). Dies gilt auch für die affine, nach innen gerichtete Radialverformung w des Auflagerlängssteifenmeridians (Bild 8-35). Die Radialverformung nimmt mit steigender Profilgröße ab. Die Größe des Biegemomentes entsteht aus zwei gegenläufigen Effekten. Die Biegebeanspruchungseffekte, die aus Kompatibilitätsgründen entstehen, sind bei kleinerer Dehnsteifigkeit der Auflagerlängssteife, also bei kleineren Profilen größer. Damit entsteht eine höhere Konzentration der Schubkräfte am unteren Rand der Schale (Bild 8-33). Mit steigender Dehnsteifigkeit nimmt die Konzentration der Schubkräfte ab. Im Gegenzug dazu steigt hingegen die Exzentrizität und die Biegesteifigkeit des Profils und damit ergibt sich eine Tendenz zur Erhöhung der Biegemomentenbeanspruchung.

Das Umfangsbiegemoment m_Θ der Kreiszyinderschale ist entsprechend der Radialverformung negativ, und nimmt ebenfalls mit steigender Profilgröße der Auflagerlängssteife ab (Bild 8-34).

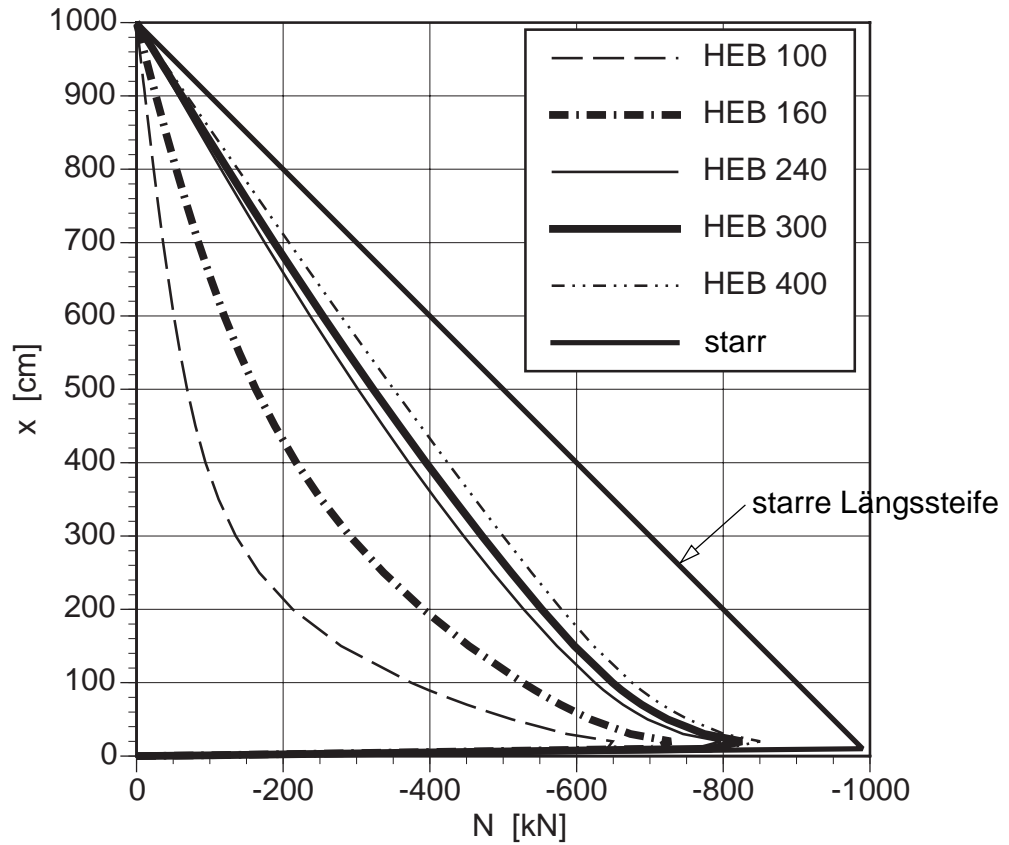


Bild 8-30 Normalkraft N in Abhängigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

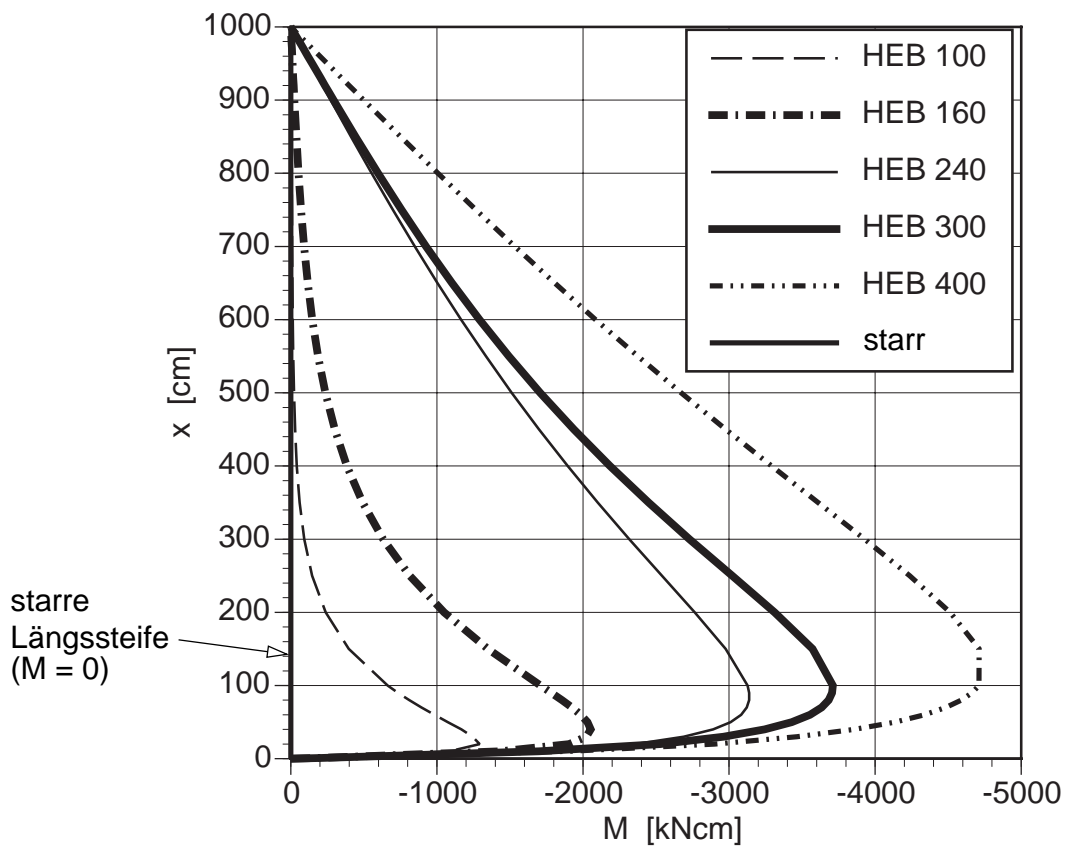


Bild 8-31 Biegemoment M in Abhängigkeit des Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

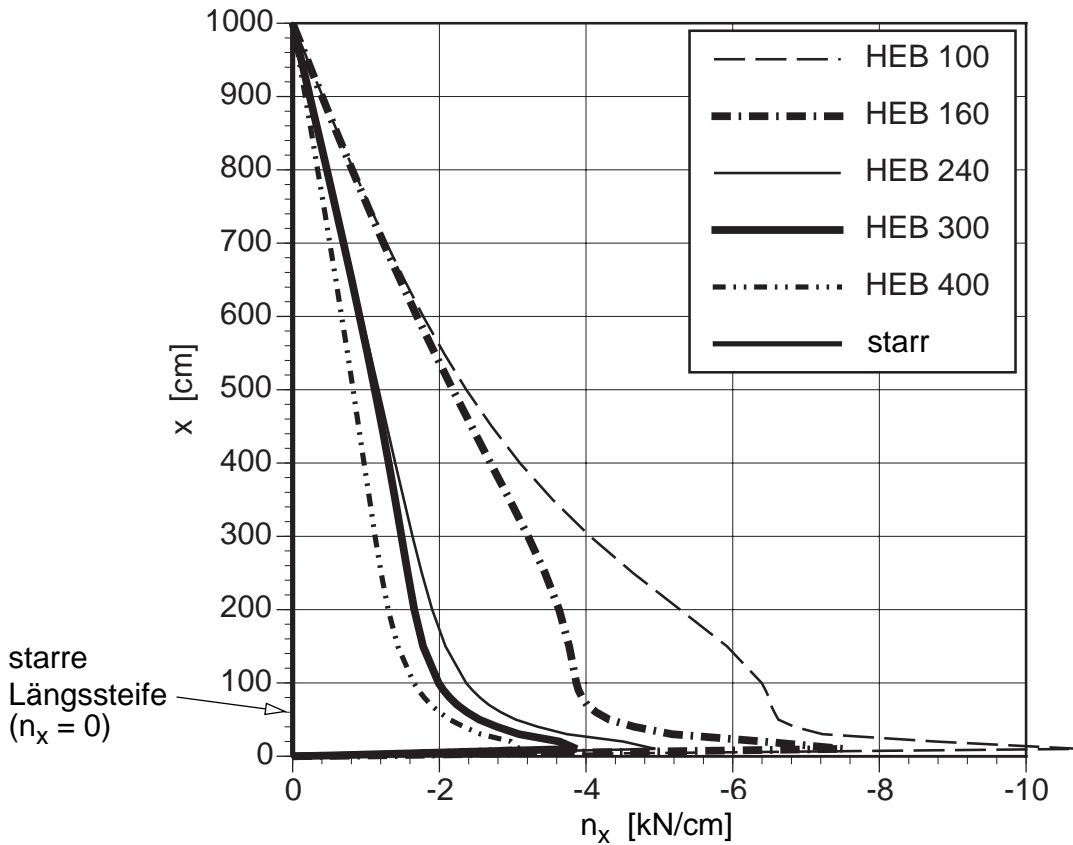


Bild 8-32 Schalenaxialkraft n_x in Abhängigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

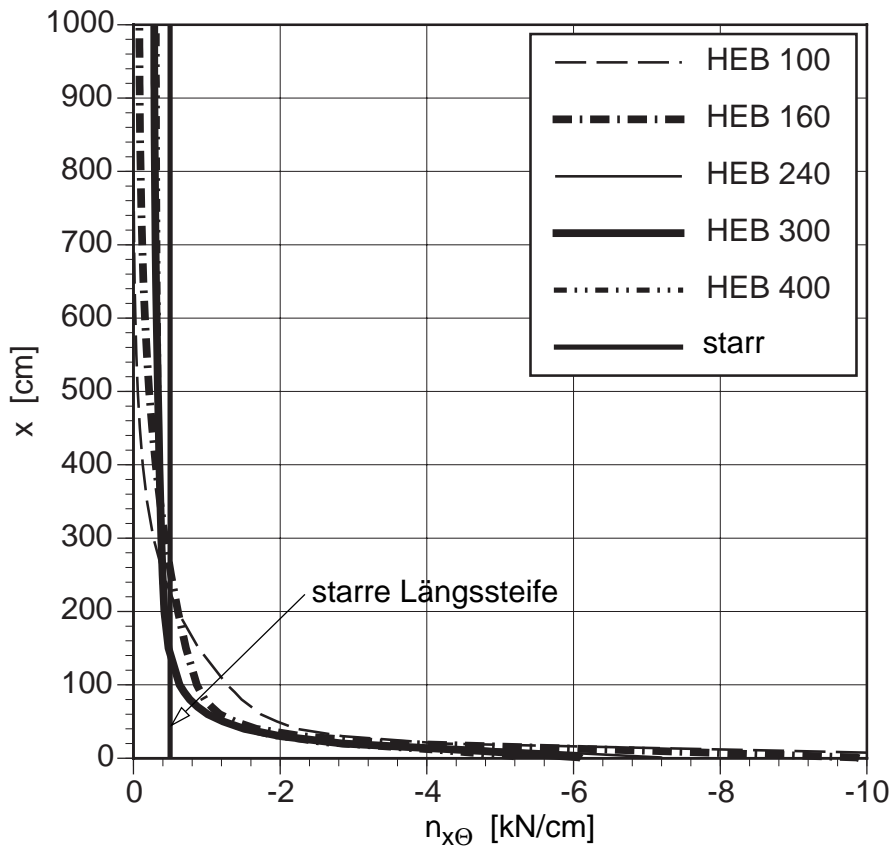


Bild 8-33 Schalenschubkraft $n_{x\theta}$ in Abhängigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

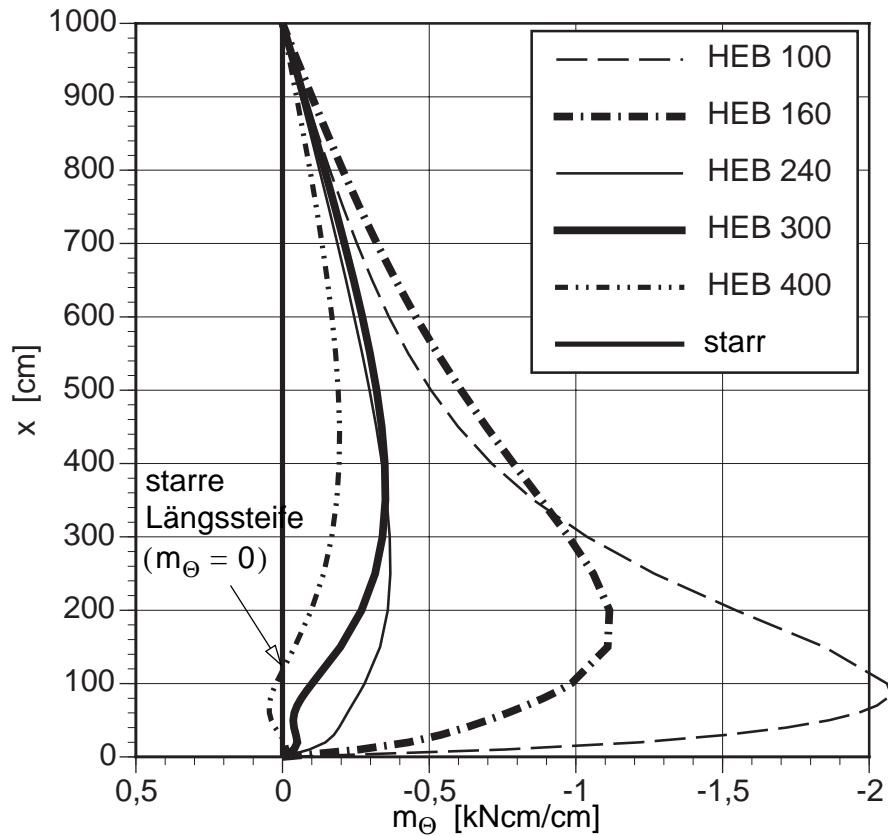


Bild 8-34 Schalenumfangsbiegemoment m_θ in Abhängigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

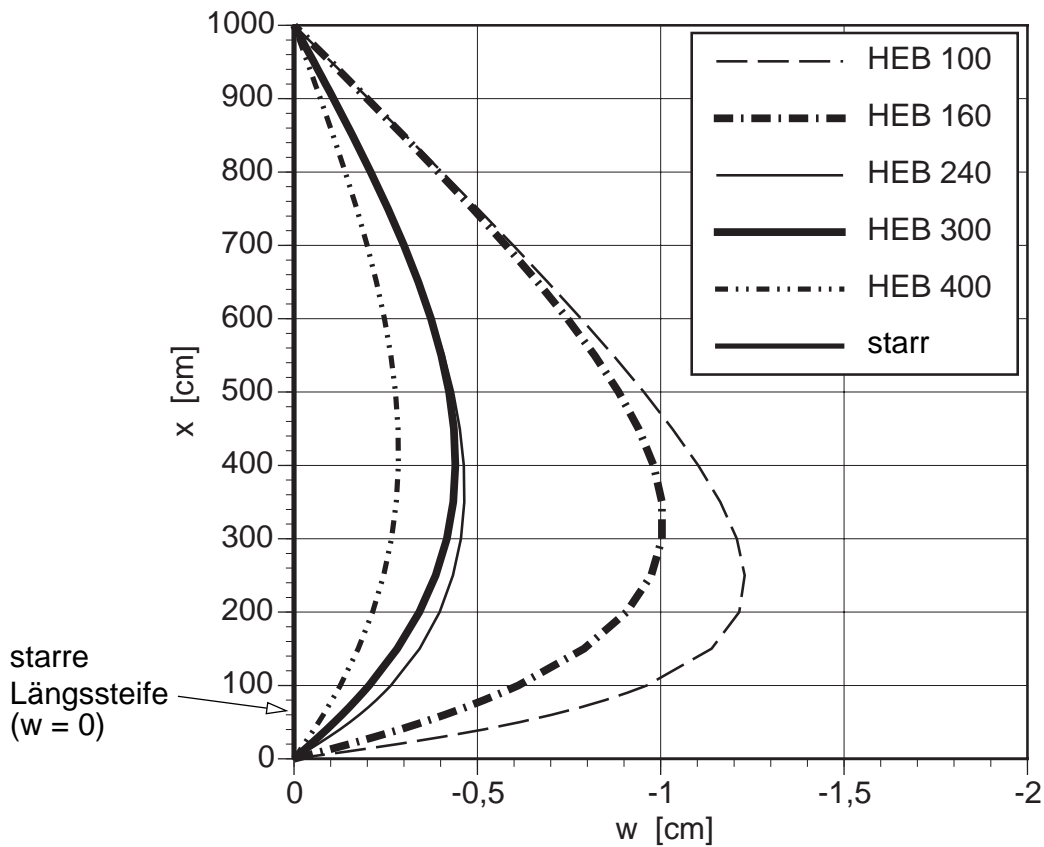


Bild 8-35 Radialverformung w der Längssteife in Abhängigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

Lokale Randauflagerung der Zylinderschale

Die Grundlage zur qualitativen Beurteilung bilden die folgenden Abhängigkeiten von den Steifigkeitsverhältnissen des Doppelbalkenmodelles entsprechend Tab. 8-3. Zum Vergleich sind die Axialkräfte, die Umfangsbiegemomente und die Radialverformungen mit jenen, die durch die Lastabtragung der Zylinderschale alleine (ohne Längssteife), gegenübergestellt.

Die Umlagerung von der Schale zur Längssteife steigt mit zunehmender Dehnsteifigkeit der Längssteife. Dies zeigt sich beim Normalkraftverlauf (Bild 8-36) und bei den Schalenkräften (Bild 8-38). Die entstehenden Biegemomente M der Längssteife sind positiv, das heißt der außenliegende Gurt wird gezogen (Bild 8-37). Dies folgt aus dem Doppelbalkenanalogiemodell durch den am Schalenersatzbalken liegenden Kraftangriff.

Mit steigender Profilgröße nimmt die Dehnsteifigkeit, die Biegesteifigkeit und das Exzentrizitätsmaß der Auflagerlängssteife zu. Durch die mit der Dehnsteifigkeit der Längssteife steigende Kräfteumlagerung von der Schale zur Längssteife ist gekennzeichnet durch die steigende Konzentration der Schubkräfte am unteren Schalenrand (Bild 8-39). Durch das mit der Profilgröße der Längssteife steigende Exzentrizitätsmaß steigen auch die Biegemomente der Längssteife an (Bild 8-37).

Bei kleineren Profilen ist die Radialverformung w des Längssteifenmeridians negativ, die Schale verformt sich somit in Radialrichtung nach innen. Am Doppelbalkenanalogiemodell liegt der Gesamtschwerpunkt, in Radialrichtung gesehen, noch innerhalb des Kraftangriffspunktes des Schalenersatzbalkens. Mit steigender Profilgröße der Längssteife wandert der Gesamtschwerpunkt in Richtung der außenbündigen Auflagerlängssteife, liegt der Gesamtschwerpunkt (in Radialrichtung gesehen) nun außerhalb des Kraftangriffspunktes, so ist die Radialverformung w des Auflagerlängssteifenmeridians letztendlich nach außen gerichtet (Bild 8-41).

Die Umfangsbiegemomente m_{θ} der Kreiszyinderschale sind für den Fall ohne Längssteife entsprechend der nach innen gerichteten Radialverformung negativ. Die Längssteife verhindert die Radialverformung, es entsteht somit eine rückhaltende Wirkung auf die Längssteife. Die Umfangsbiegemomente sind nun positiv.

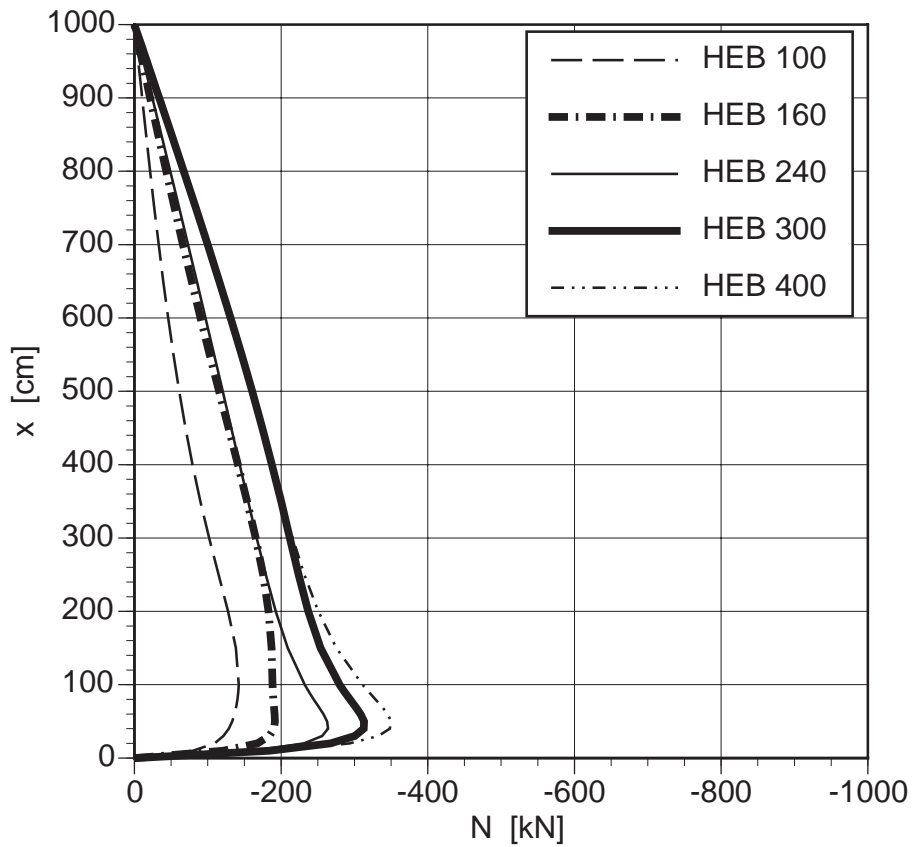


Bild 8-36 Normalkraft N in Abhängigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

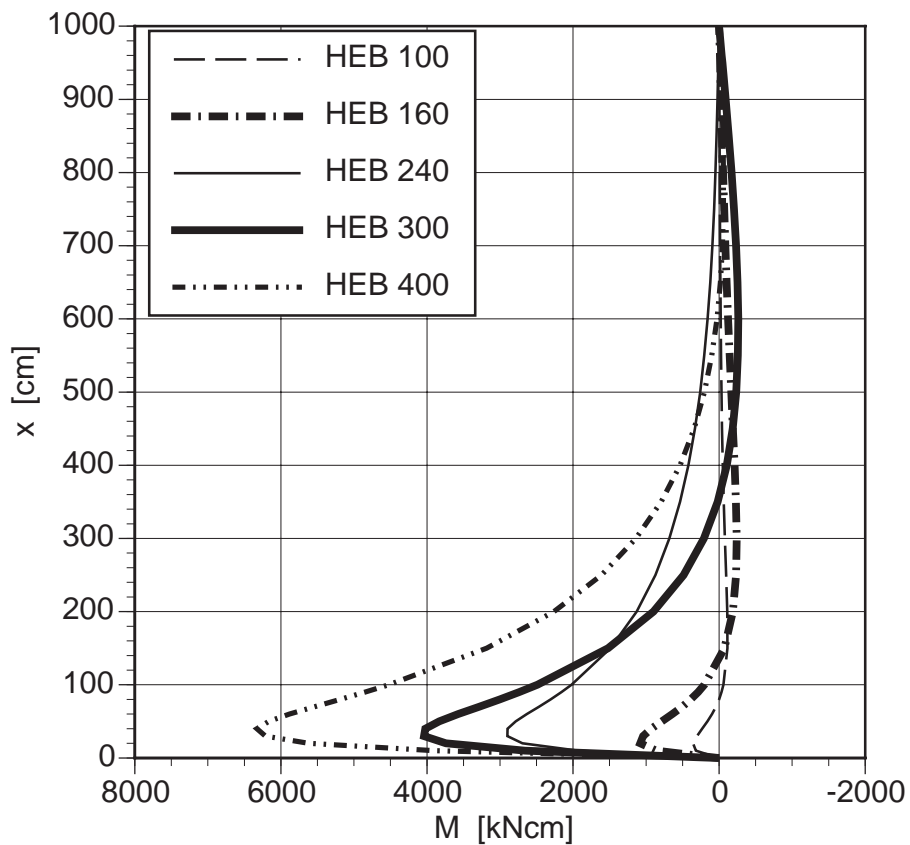


Bild 8-37 Biegemoment M in Abhängigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

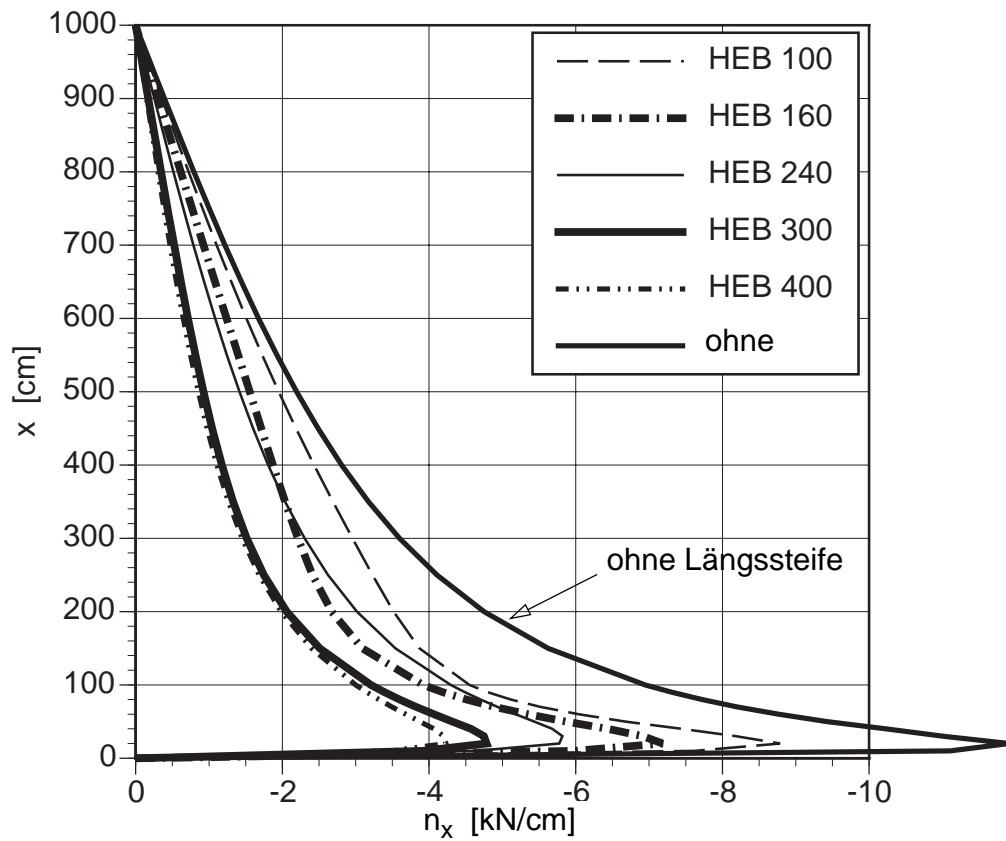


Bild 8-38 Schalenaxialkraft n_x in Abhängigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

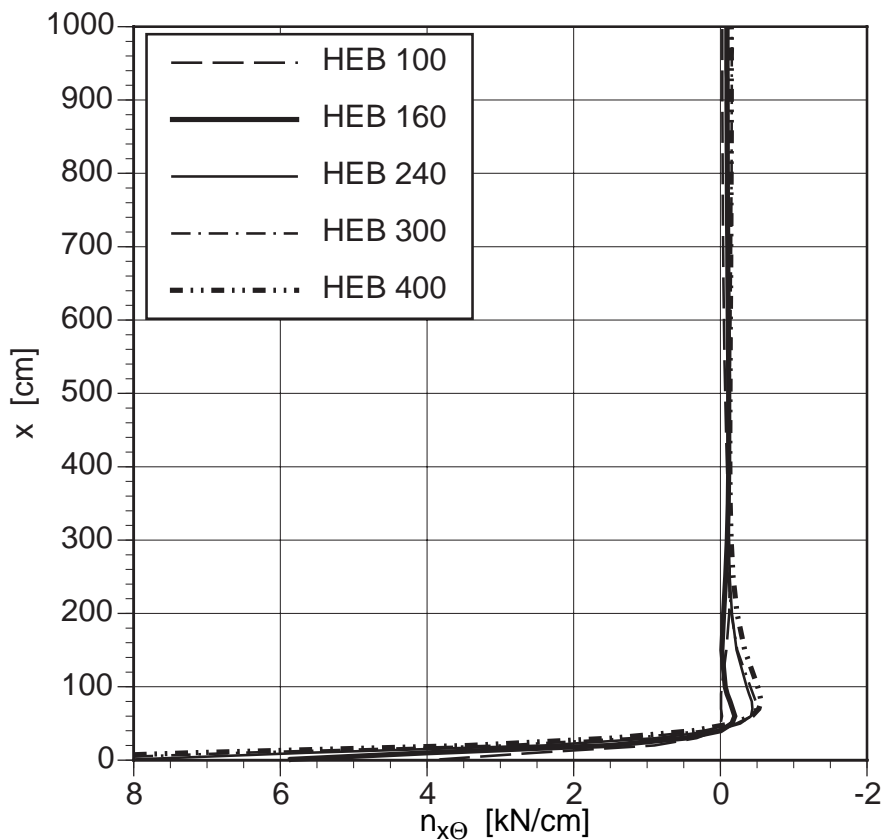


Bild 8-39 Schalenschubkraft $n_{x\theta}$ in Abhängigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

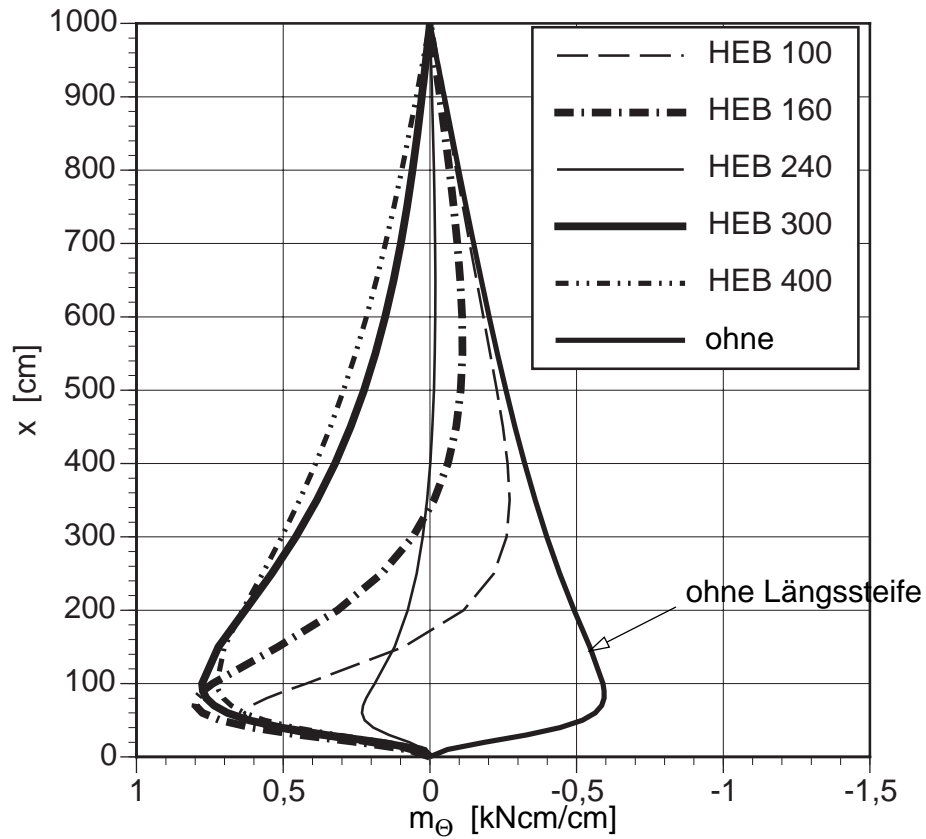


Bild 8-40 Schalenumfangsbiegemoment m_θ in Abhängigkeit der Längssteife bei lokaler Randauf-lagerung der Schale

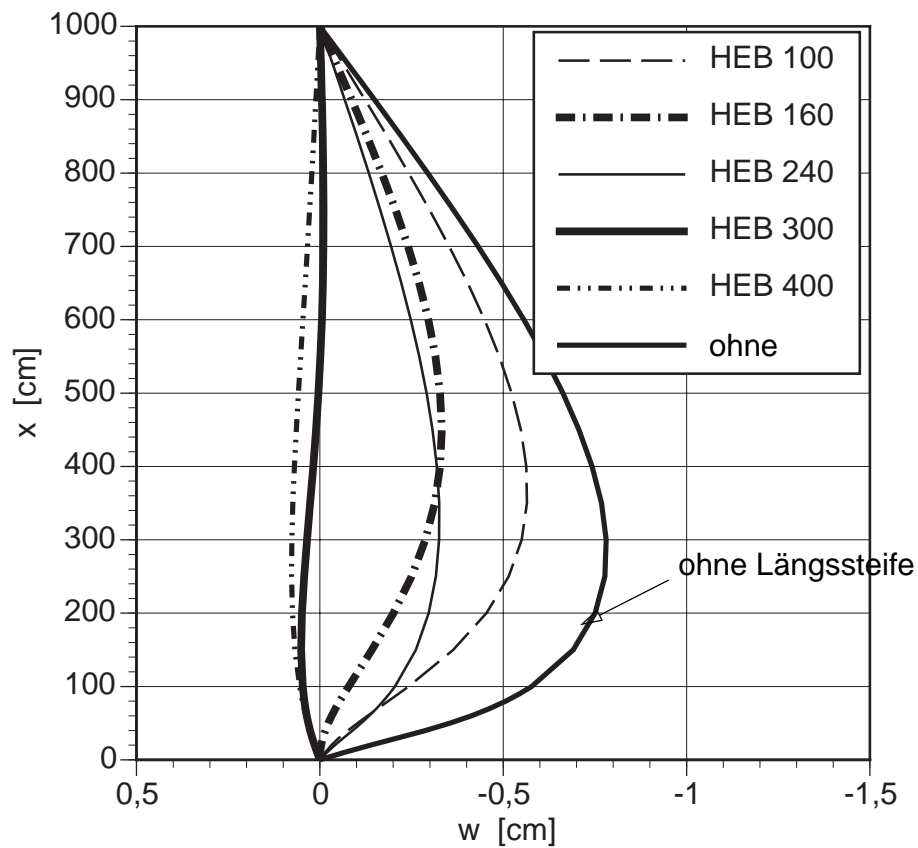


Bild 8-41 Radialverformung w der Längssteife in Abhängigkeit des Längssteife bei lokaler Randauf-lagerung der Schale

8.2.3.4 Parameterstudie 2 — Variation der Verbundfugennachgiebigkeit

Im folgenden werden die Auswirkungen der Fugennachgiebigkeit untersucht. Dabei ist das Längssteifenprofil konstant (HEB 300). Für die starre Verbindung von Längssteife und Schale sind die Resultate bereits bei den vorigen Untersuchungen aufbereitet. Sie bilden somit den Ausgangspunkt der folgenden Parameterstudie.

Zentrische Auflagerung der Längssteife

Die Grundlage zur qualitativen Beurteilung bilden die folgenden Abhängigkeiten von den Steifigkeitsverhältnissen des Doppelbalkenmodelles entsprechend Tab. 8-2.

Die Umlagerung der Normalkraft der Längssteife wird mit zunehmender Steifigkeit der Verbindungsfuge größer (Bild 8-42). Damit erhöhen sich Axialkräfte n_x und die Schubkräfte $n_{x\theta}$ der Schale (Bild 8-44, Bild 8-45). Das Biegemoment steigt ebenfalls mit zunehmender Steifigkeit der Verbindungsfuge. Ursache dafür sind die mit der Verbindungsfugensteifigkeit ansteigenden Konzentrationen der Schubkräfte $n_{x\theta}$ am unteren Rand der Schale. Ähnlich verhalten sich die Radialverformungen und die Umfangsbiegemomente im Längssteifenmeridian (Bild 8-46 bzw. Bild 8-47).

Für den Grenzfall $C = 0$, der einer unendlich nachgiebigen Verbindungsfuge entspricht, ist der Normalkraftverlauf der Auflagerlängssteife linear veränderlich, die Schubkräfte $n_{x\theta}$ sind konstant und die Axialkräfte n_x werden zu Null. Die Radialverformung und die Umfangsbiegemomente werden ebenfalls zu Null. In der Schale bildet sich somit der ideale Schubmembranspannungszustand aus.

Es ist interessant, daß dieser Grenzfall mittels zweier völlig konträrer Grundannahmen für Struktursteifigkeiten erreicht werden kann:

- 1. Dehnstarre Auflagerlängssteife bei starrer Verbundfuge
- 2. Elastische Auflagerlängssteife bei unendlich nachgiebiger Verbundfuge

Die in den folgenden Abbildungen dargestellten Steifigkeiten der Verbundfuge bedeuten:

$C = 0$ bedeutet $C_{II} = 0$ kN/cm

$C = 1000$ bedeutet $C_{II} = 1000$ kN/cm

$C = \text{starr}$ bedeutet $C_{II} \rightarrow \infty$

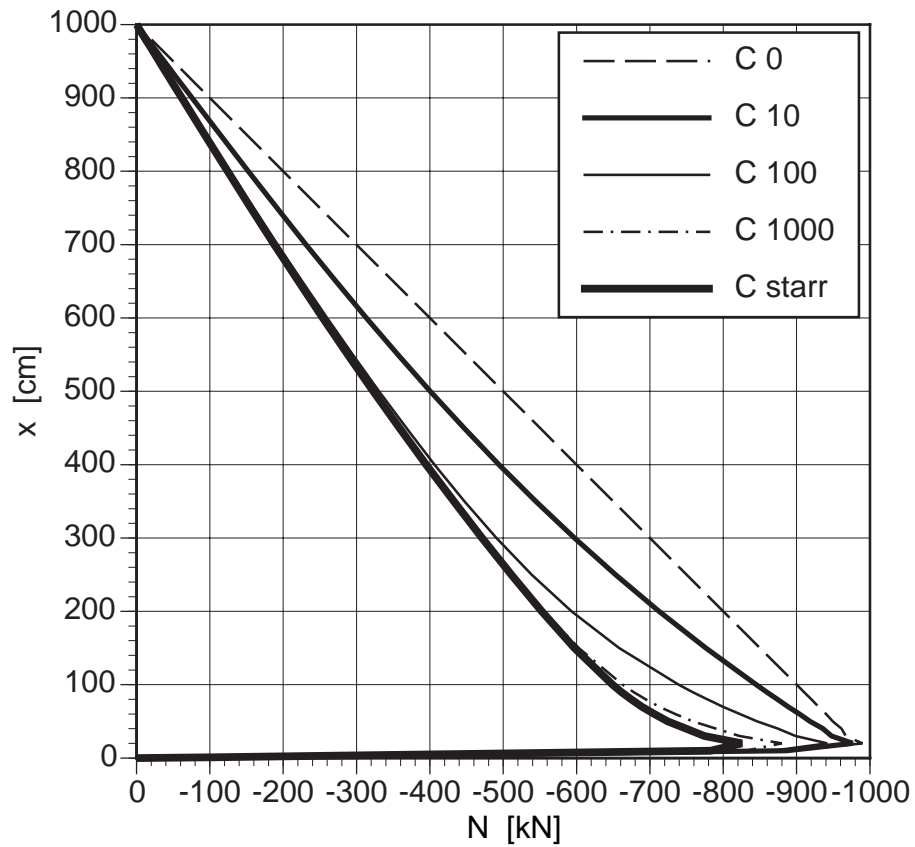


Bild 8-42 Normalkraft N in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

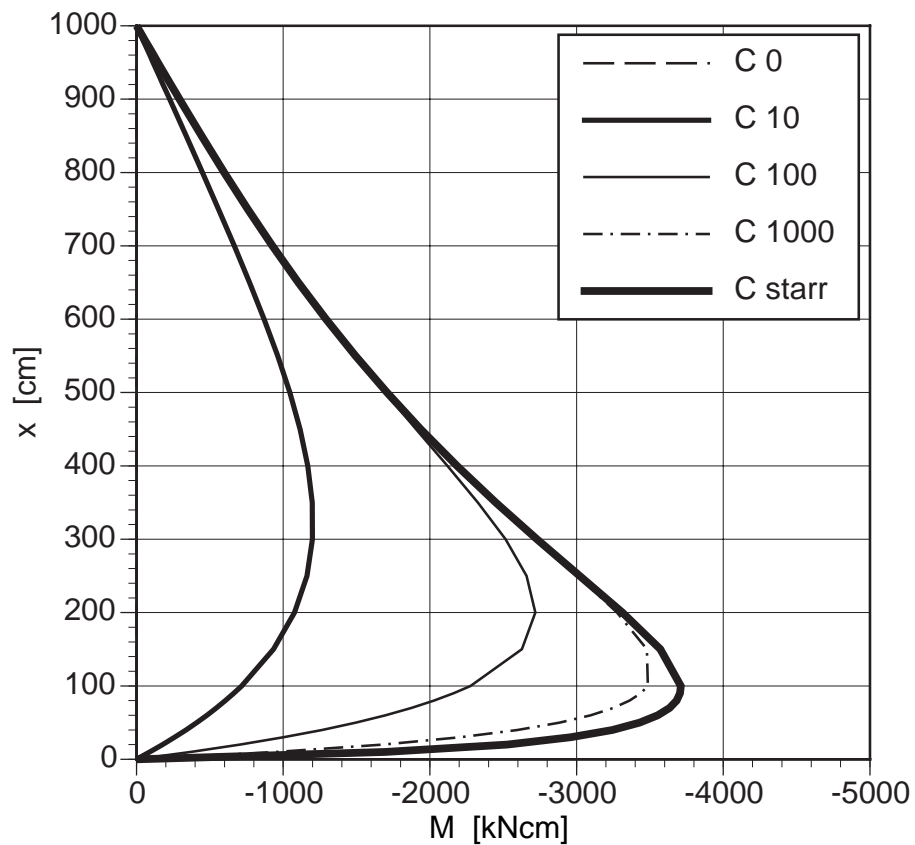


Bild 8-43 Biegemoment M in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

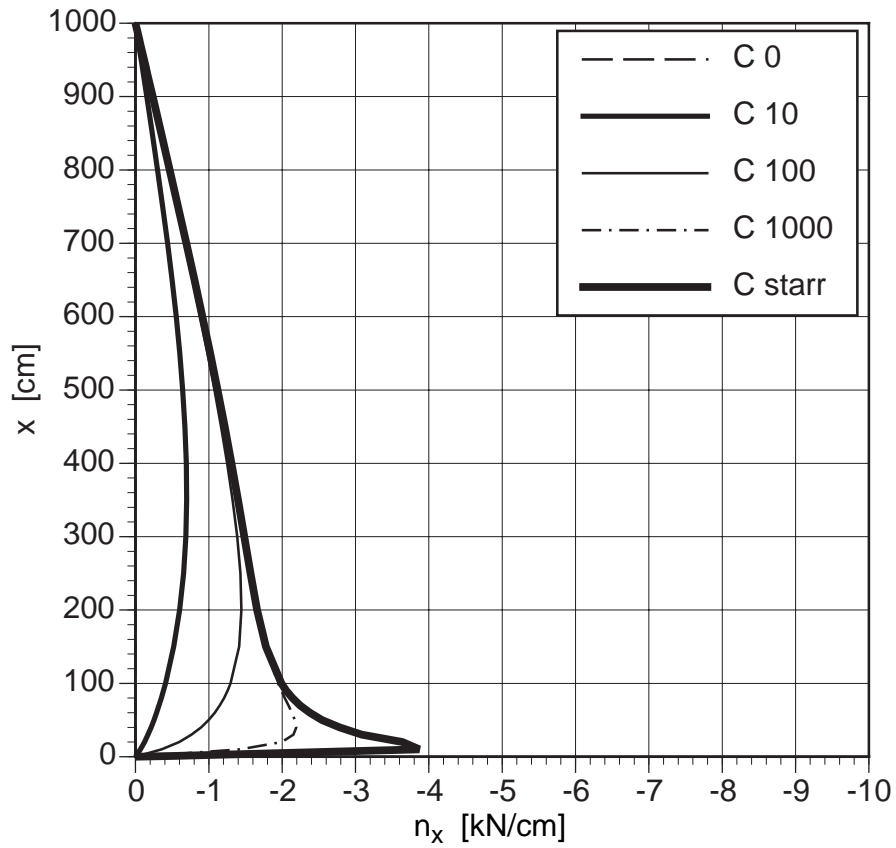


Bild 8-44 Schalenaxialkraft n_x in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

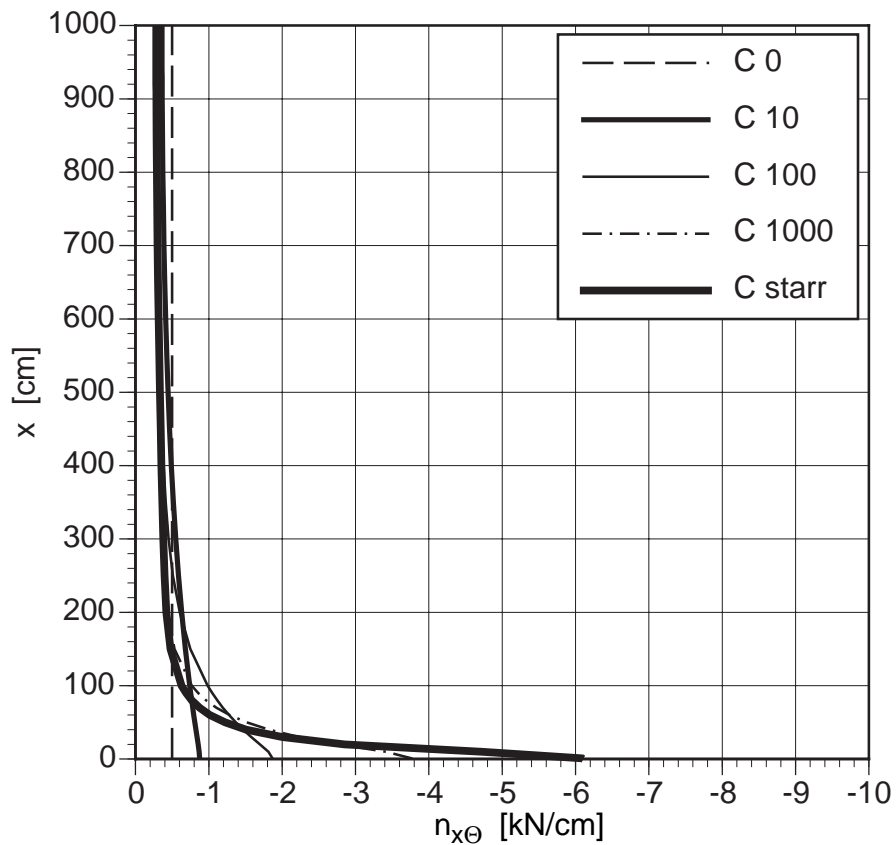


Bild 8-45 Schalenschubkraft $n_{x\theta}$ in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

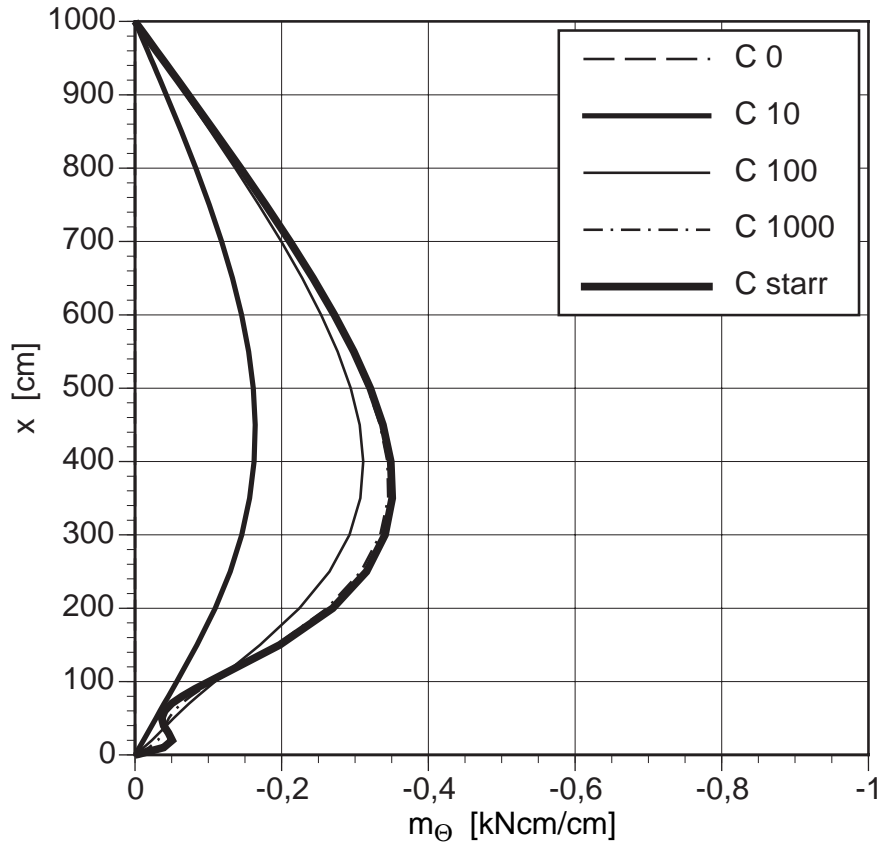


Bild 8-46 Schalenumfangsbiegemoment m_θ in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

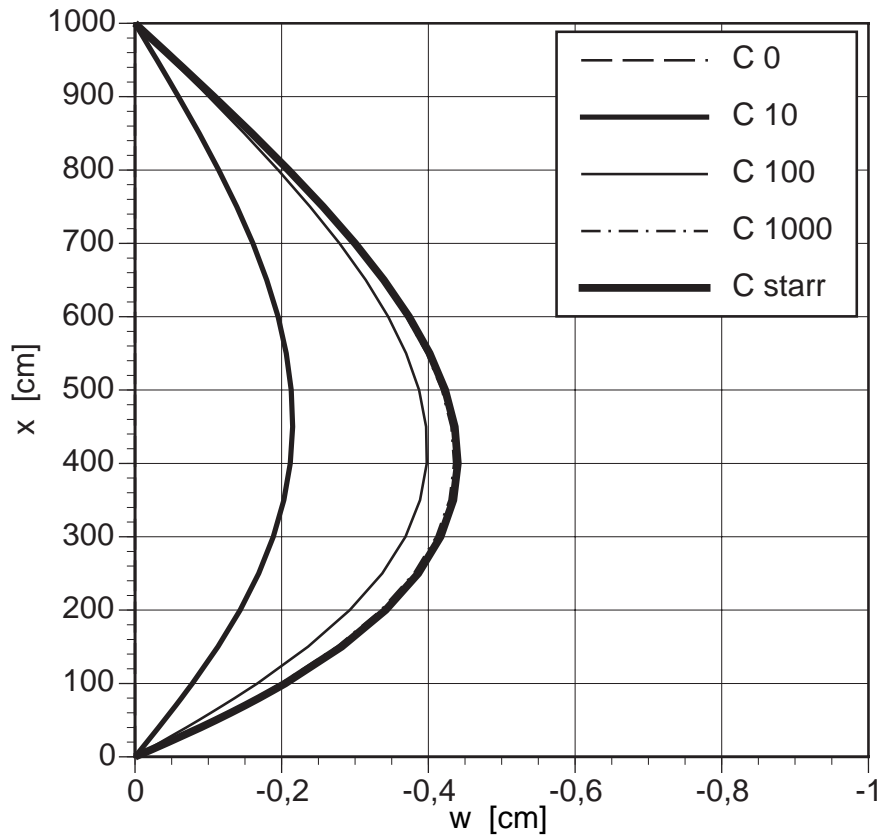


Bild 8-47 Radialverformung w der Längssteife in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

Lokale Randauflagerung der Zylinderschale

Die Grundlage zur qualitativen Beurteilung bilden die folgenden Abhängigkeiten von den Steifigkeitsverhältnissen des Doppelbalkenmodelles entsprechend Tab. 8-2. Zum Vergleich sind die Axialkräfte, die Umfangsbiegemomente und die Radialverformungen jenen, die durch die Lastabtragung der Zylinderschale alleine (ohne Längssteife) entstehen, gegenübergestellt.

Die Normalkräfte der Auflagerlängssteife und somit die Umlagerungseffekte von der Schale in die Auflagerlängssteife steigen mit zunehmender Fugensteifigkeit (Bild 8-48). Im Grenzfall der unendlich nachgiebigen Verbundfuge ($C = 0$) kommt es zu einer Entkoppelung der Lastabtragung in axialer Richtung. In radialer Richtung liegt nach wie vor eine starre Koppelung der Längssteife und der Schale vor.

Das Biegemoment M der Längssteife ist im Grenzfall $C = 0$ negativ, mit steigender Fugensteifigkeit wird es positiv und erreicht im Fall der starren Fuge seinen Größtwert (Bild 8-49).

Die Axialkräfte (Bild 8-50), die Umfangsbiegemomente (Bild 8-52) und die Radialverformungen (Bild 8-53) erreichen ihren Größtwert für das Schalensystem ohne Längssteife. Dabei sind die Umfangsbiegemomente negativ. Durch die Längssteife entsteht eine rückhaltende Wirkung auf die Schale, die Umfangsbiegemomente werden mit steigender Verbindungsfugensteifigkeit positiv.

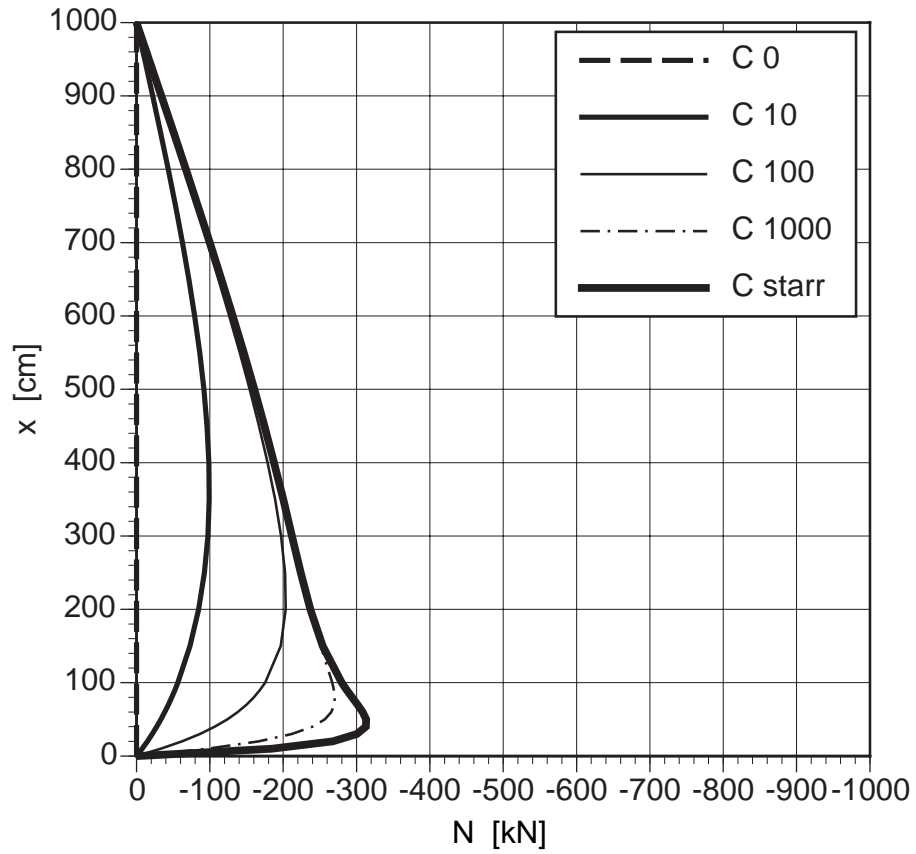


Bild 8-48 Normalkraft N in Abhängigkeit der Fugensteifigkeit bei lokaler Randauflagerung der Schale

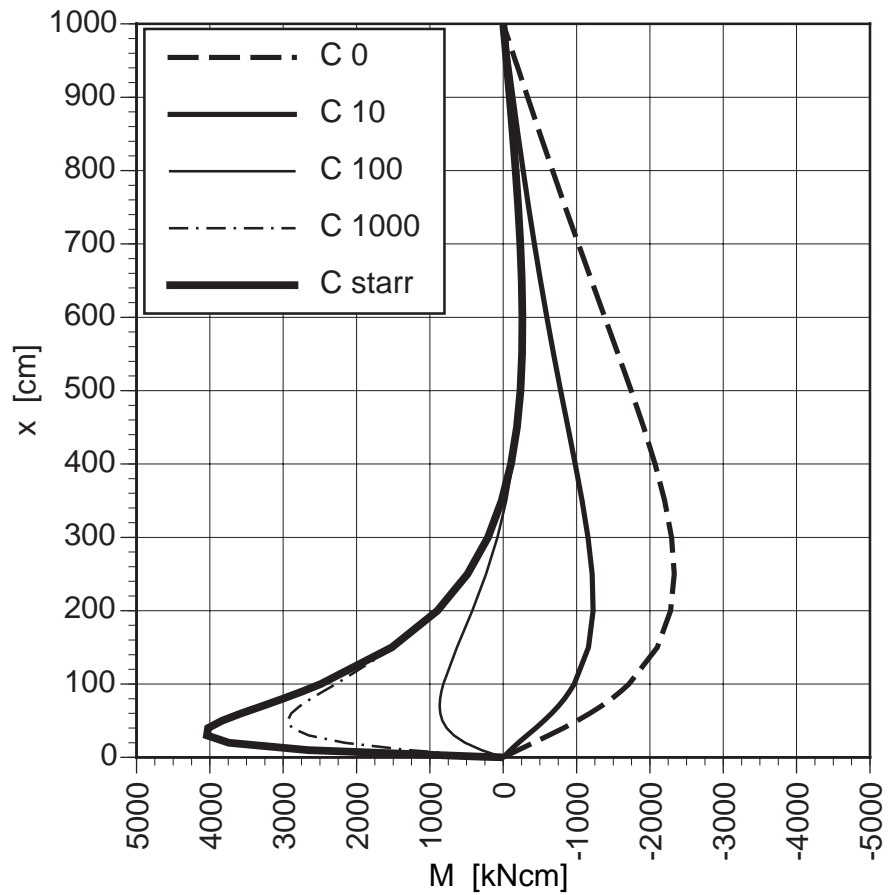


Bild 8-49 Biegemoment M in Abhängigkeit der Fugensteifigkeit bei lokaler Randauflagerung der Schale

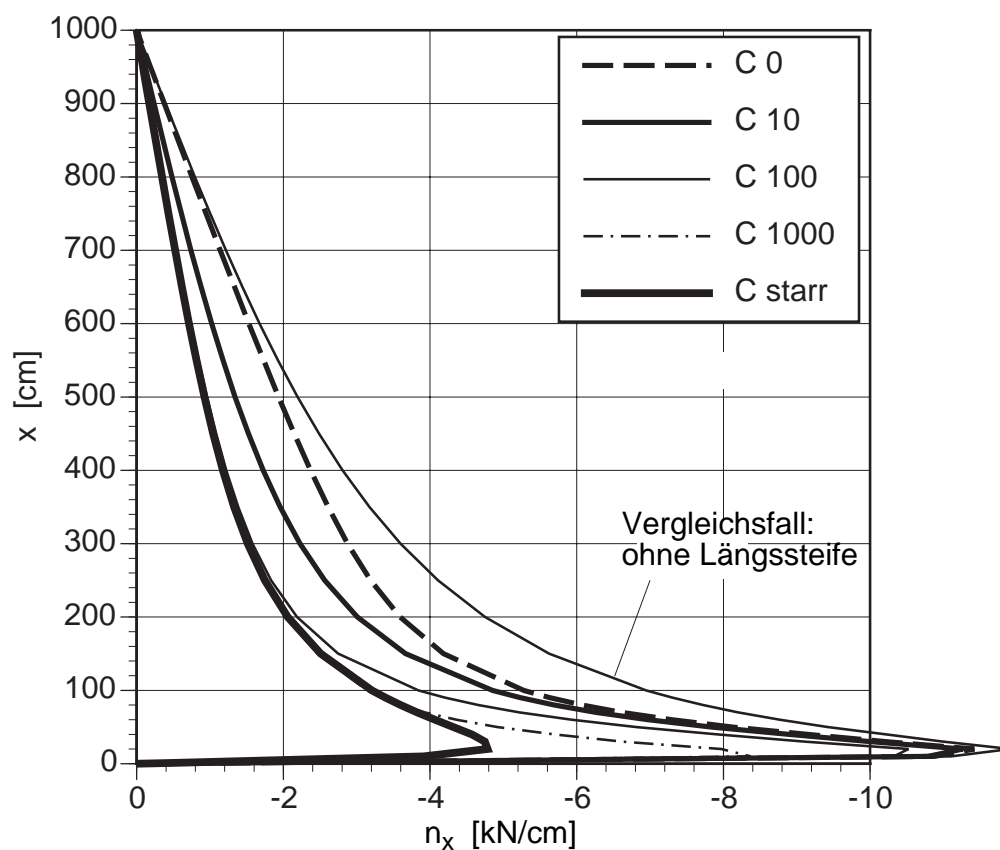


Bild 8-50 Schalenaxialkraft n_x in Abhängigkeit der Fugensteifigkeit bei lokaler Randauflagerung der Schale

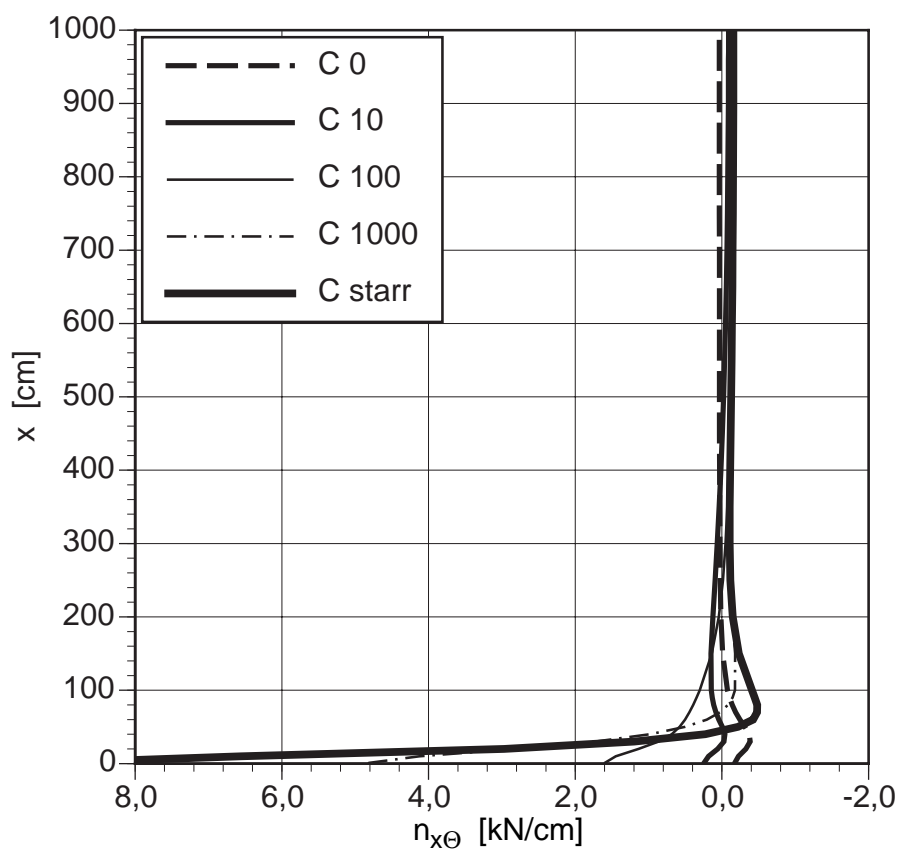


Bild 8-51 Schalenschubkraft $n_{x\theta}$ in Abhängigkeit der Fugensteifigkeit bei lokaler Randauflagerung der Schale

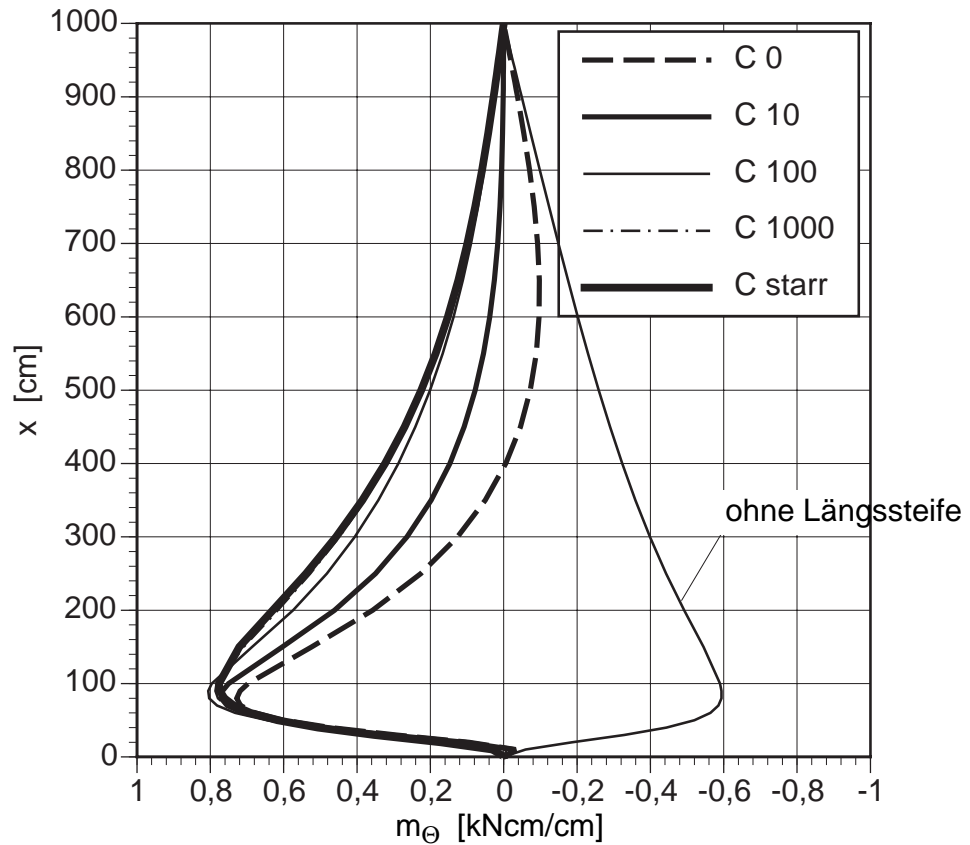


Bild 8-52 Schalenumfangsbiegemoment m_θ in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei lokaler Randauflagerung der Schale

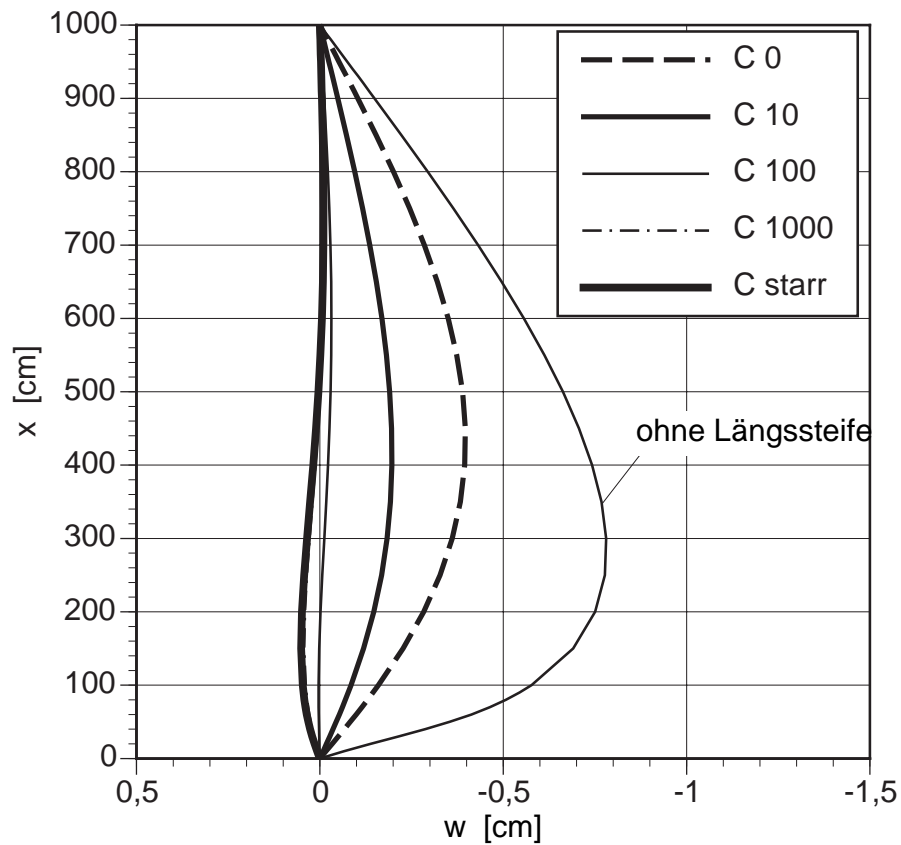


Bild 8-53 Radialverformung w der Längssteife in Abhängigkeit der Verbundfugensteifigkeit bei lokaler Randauflagerung der Schale

8.2.3.5 Parameterstudie 3 — Variation der Exzentrizität der Längssteife

Im folgenden wird der Einfluß der Exzentrizität der Längssteife untersucht. Dabei werden zu den bereits bekannten Ergebnissen für die außenbündig angeordnete Längssteife die zentrisch bzw. innenbündig angeordnete Längssteife untersucht.

Zentrische Auflagerung der Längssteife

Die Grundlage zur qualitativen Beurteilung bilden die folgenden Abhängigkeiten von den Steifigkeitsverhältnissen des Doppelbalkenmodelles entsprechend Tab. 8-3. Diese wurden bereits für die Parameterstudie der Profilgröße der Längssteife verwendet.

Der Gradient des Normalkraftverlaufes ist für die zentrisch angeordnete Längssteife am größten (Bild 8-54).

Das Biegemoment M der Längssteife wechselt entsprechend dem Doppelbalkenmodell mit der Exzentrizität das Vorzeichen, für die zentrische Längssteife ist das Biegemoment negativ und beträgt ein Drittel des Momentes der außenbündigen Längssteife (Bild 8-55).

Die Axialkräfte n_x und die Schubkräfte $n_{x\Theta}$ der Schale sind zugehörig zu der am stärksten umgelagerten Normalkraft für die zentrische Auflagerlängssteife am größten (Bild 8-56 bzw. Bild 8-57).

Das Doppelbalkenmodell liefert aufgrund des Kraftangriffes der Auflagerkraft am Gesamtsystem eine anschauliche Erklärung für die entstehenden Radialverformungen. Die Radialverformungen w des Längssteifenmeridianes sind wie die Biegemomente negativ bei außenbündiger bzw. zentrischer Längssteife (Bild 8-59). Wechselt die Bündigkeit der Auflagerlängssteife und somit das Vorzeichen der Exzentrizität, so wechselt auch die Radialverformung ihr Vorzeichen. Die Umfangsbiegemomente m_Θ sind affin zu den Radialverformungen (Bild 8-58).

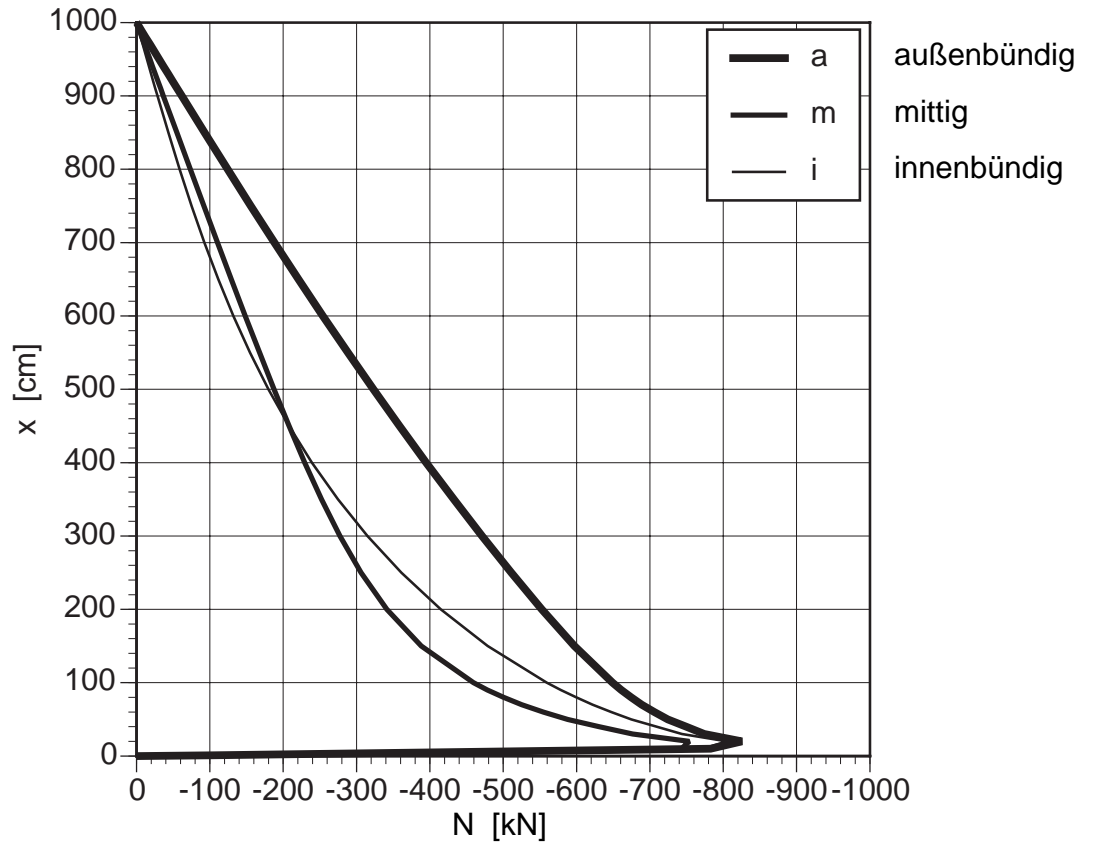


Bild 8-54 Normalkraft N in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

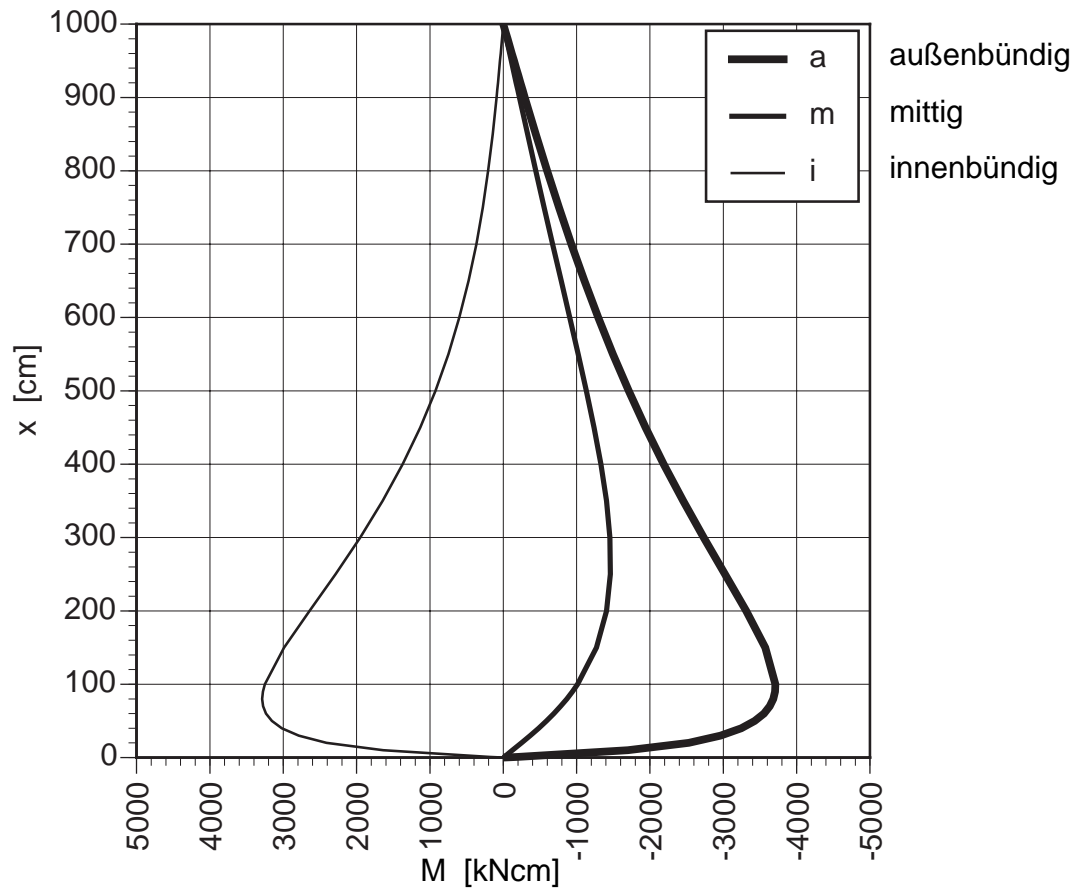


Bild 8-55 Biegemoment M in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

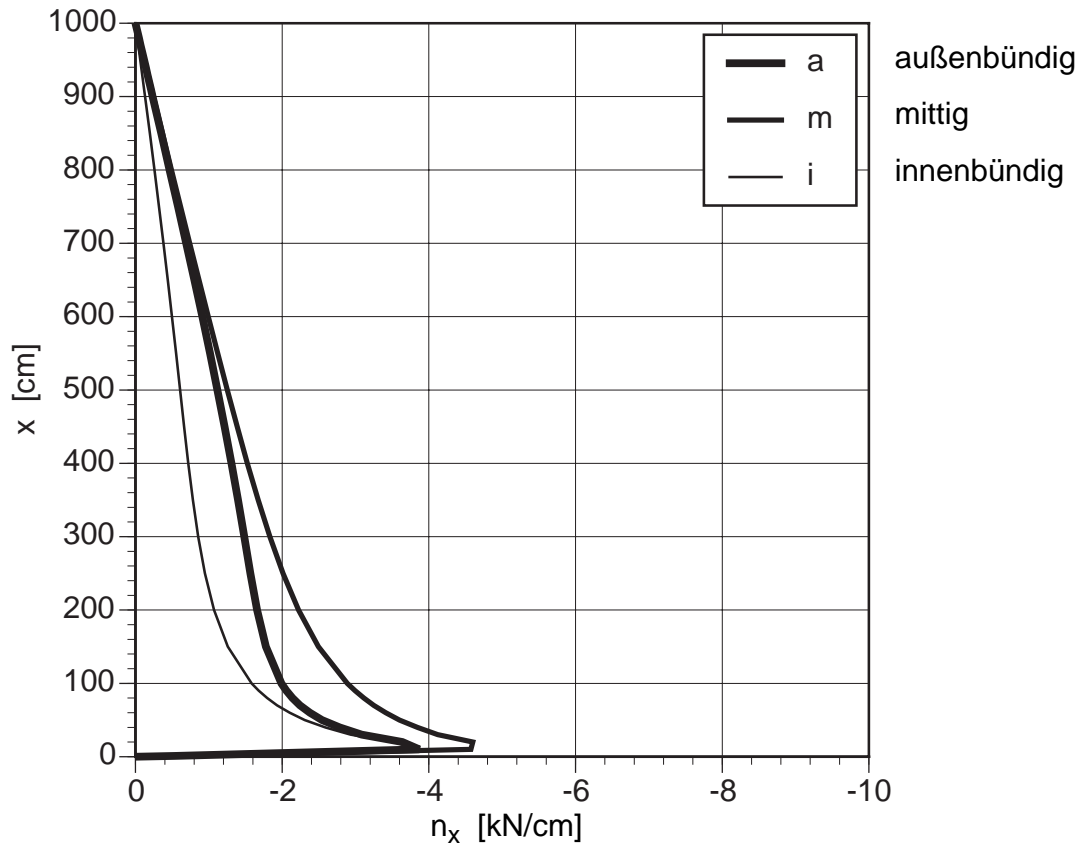


Bild 8-56 Schalenaxialkraft n_x in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

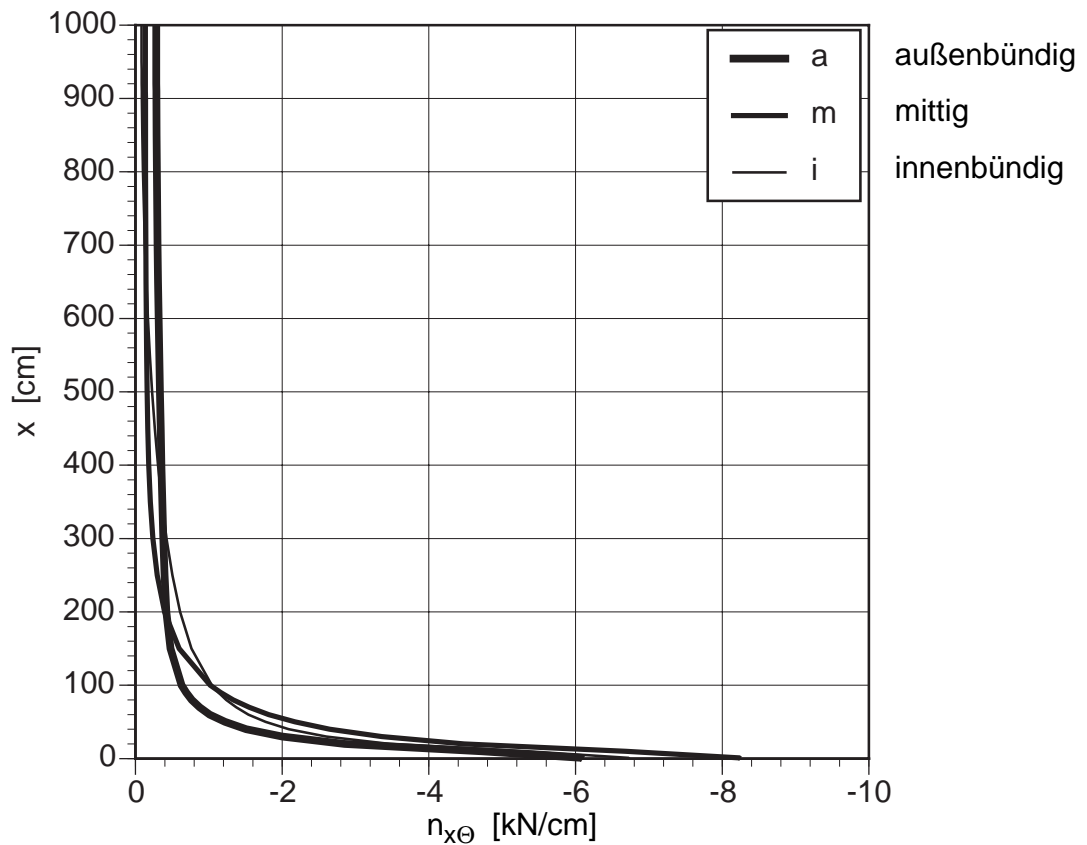


Bild 8-57 Schalenschubkraft $n_{x\theta}$ in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

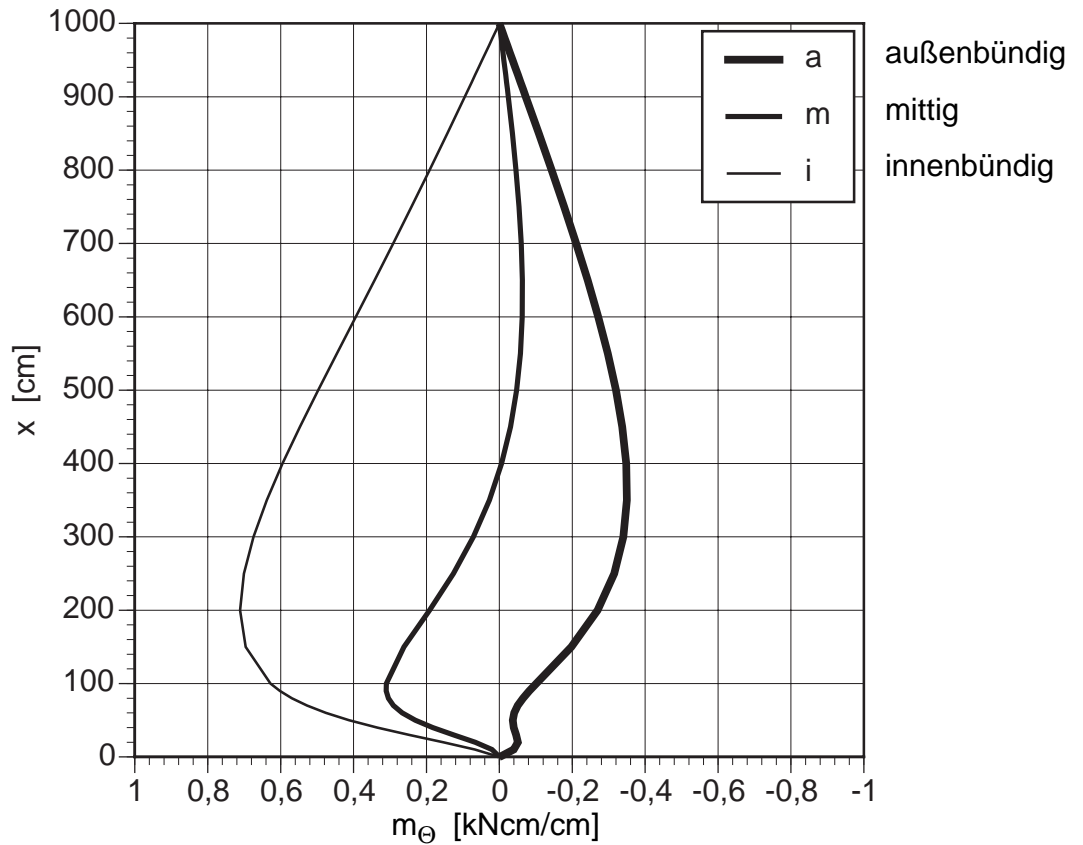


Bild 8-58 Umfangsbiegemoment m_θ in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

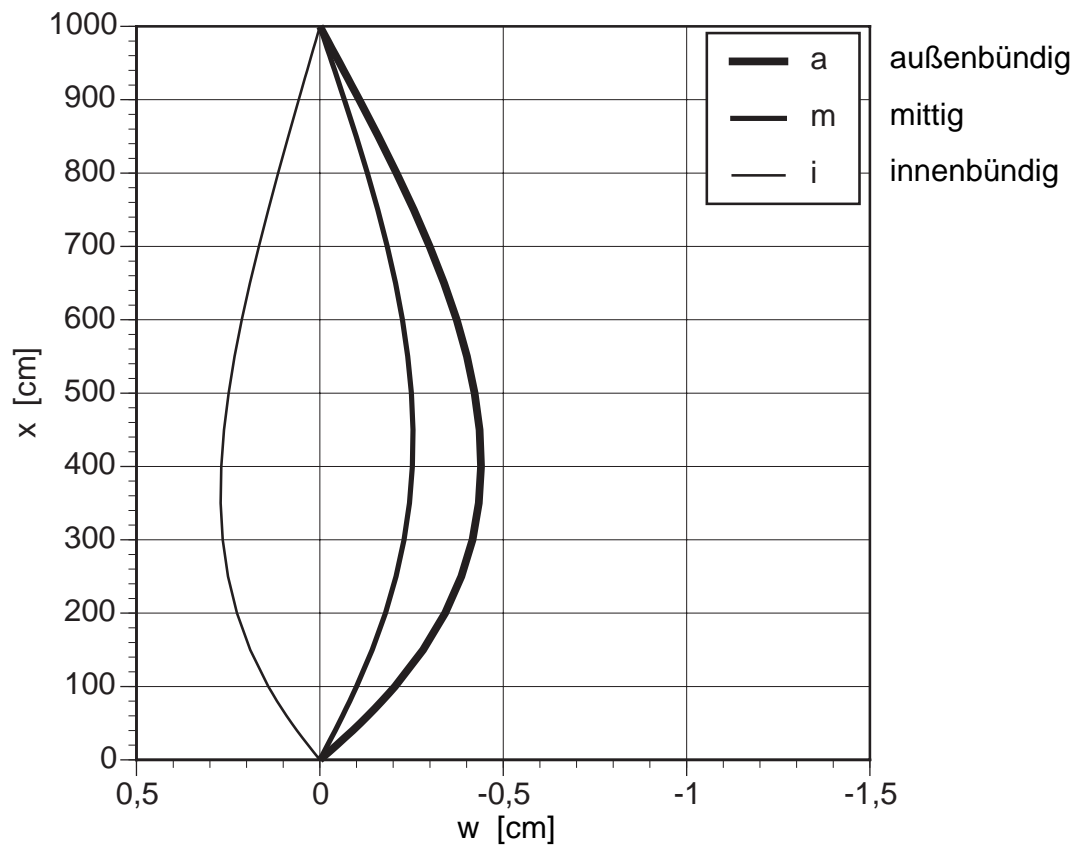


Bild 8-59 Radialverformung w der Längssteife in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei zentrischer Auflagerung der Längssteife

Lokale Randauflagerung der Zylinderschale

Die Grundlage zur qualitativen Beurteilung bilden die folgenden Abhängigkeiten von den Steifigkeitsverhältnissen des Doppelbalkenmodelles entsprechend Tab. 8-3. Diese wurden bereits für die Parameterstudie der Profilgröße verwendet.

Die Normalkräfte der Auflagerlängssteife und damit die Umlagerungseffekte von der Schale zur Auflagerlängssteife sind für den Fall der zentrisch angeordnete Längssteife am größten (Bild 8-60). Die Biegemomente M wechseln bereits, erklärbar durch die Lage des Kraftangriffpunktes am Doppelbalkenanalogiemodell, für die zentrische angeordnete Längssteife das Vorzeichen (Bild 8-61).

Die Radialverformung ist positiv für die außenbündige Längssteife. Entsprechend der Lage des Kraftangriffpunktes am Doppelbalkenanalogiemodell wird sie wie das Biegemoment im Fall der zentrische angeordneten Längssteife negativ (Bild 8-65). Die Umfangsbiegemomente entstehen durch die Rückhaltewirkung der Längssteife. Diese ist bei der außenbündigen Längssteife am größten, sie nimmt für die zentrische und innenbündige Längssteife ab. Somit werden die Umfangsbiegemomente kleiner (Bild 8-64).

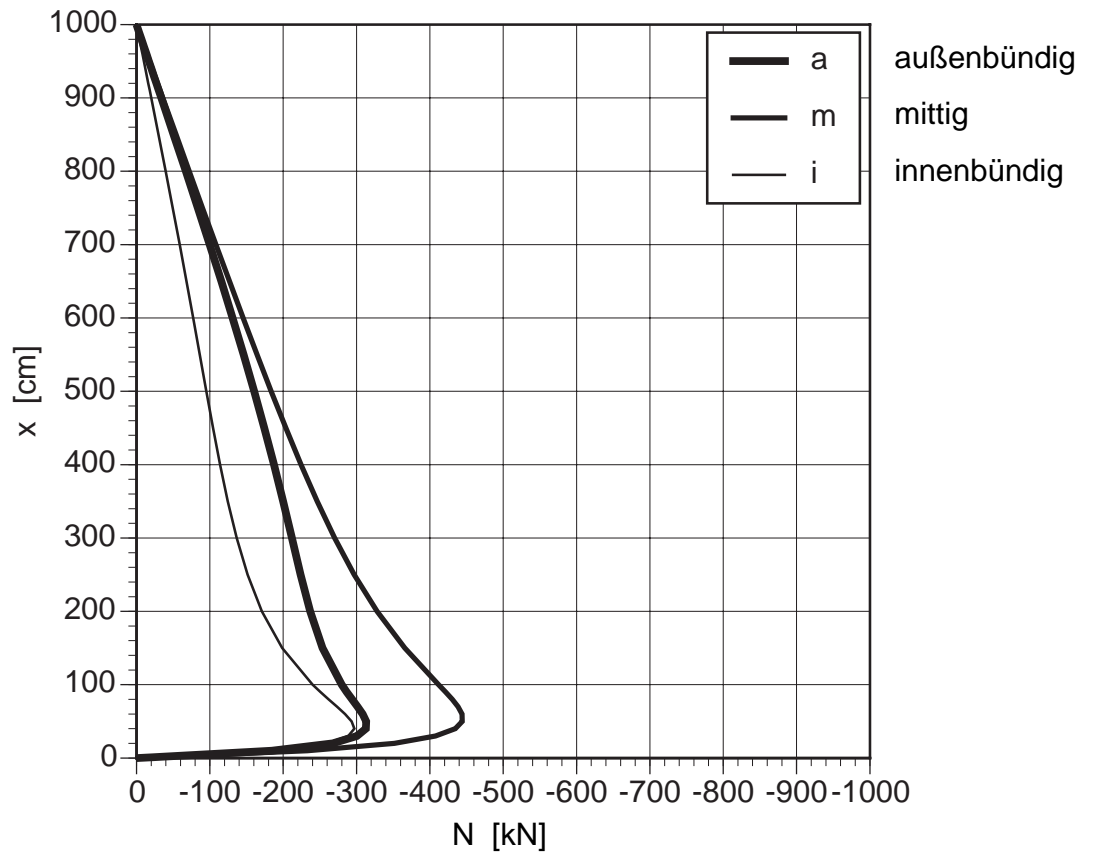


Bild 8-60 Normalkraft N in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

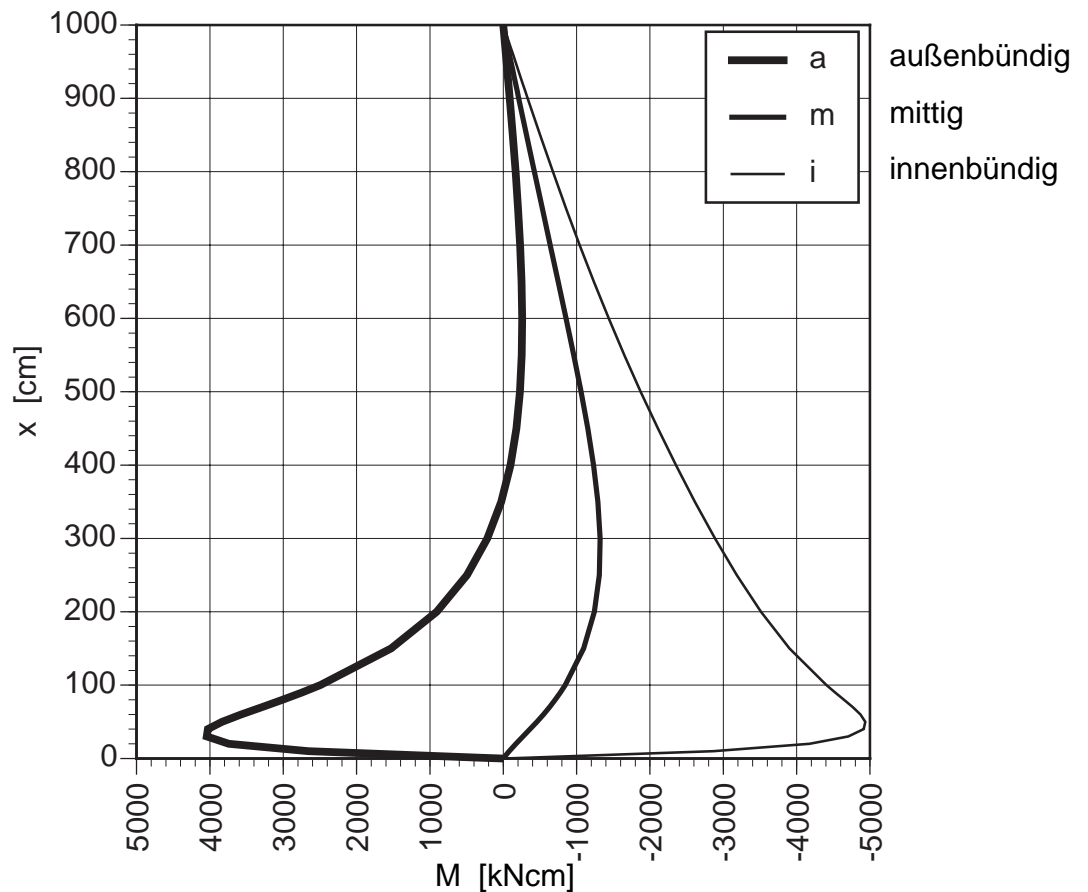


Bild 8-61 Biegemoment M in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

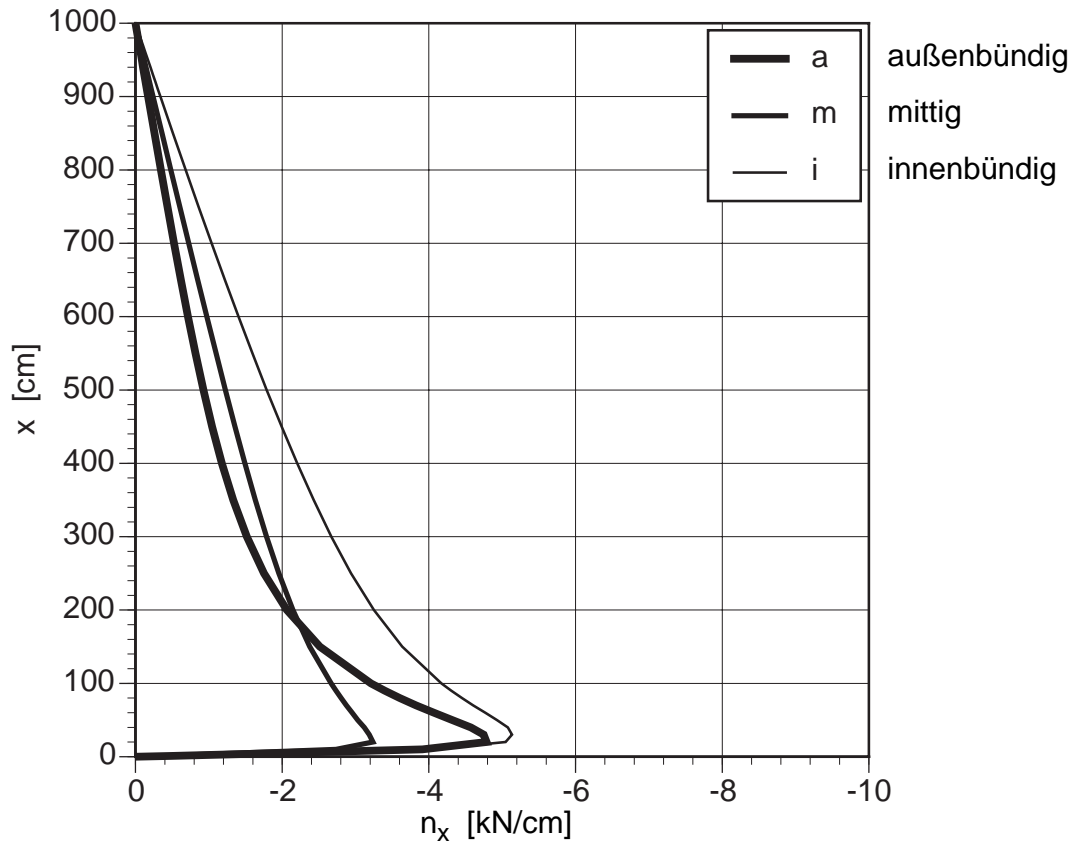


Bild 8-62 Schalenaxialkraft n_x in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei lokaler Randauf-lagerung der Schale

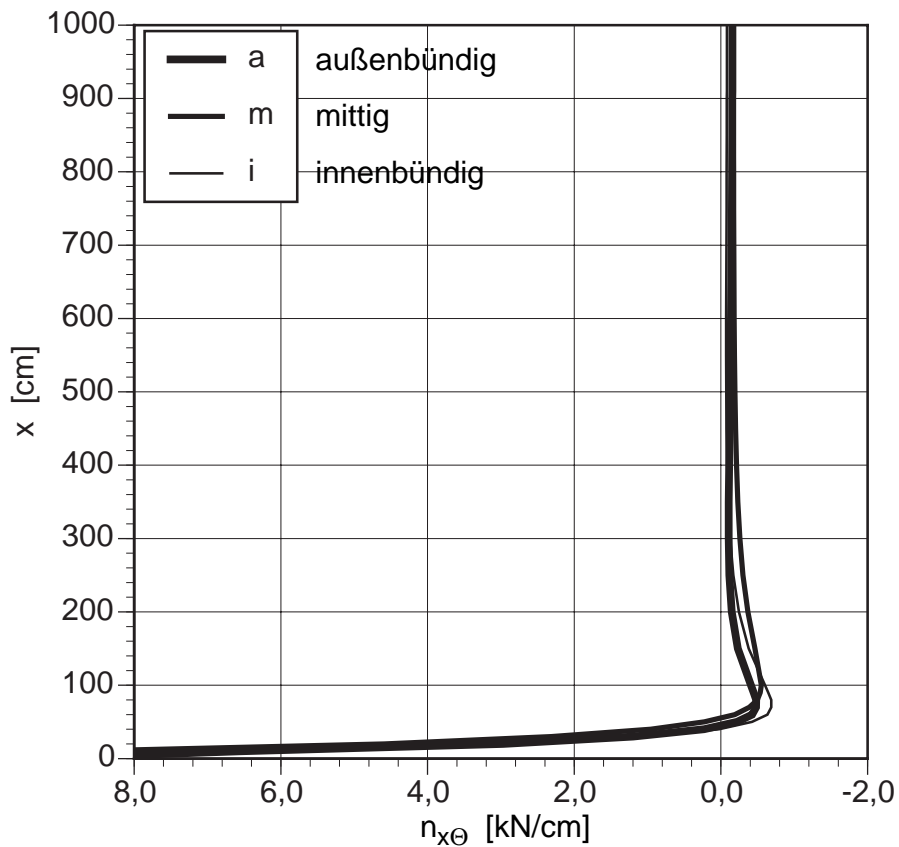


Bild 8-63 Schalenschubkraft $n_{x\theta}$ in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei lokaler Randauf-lagerung der Schale

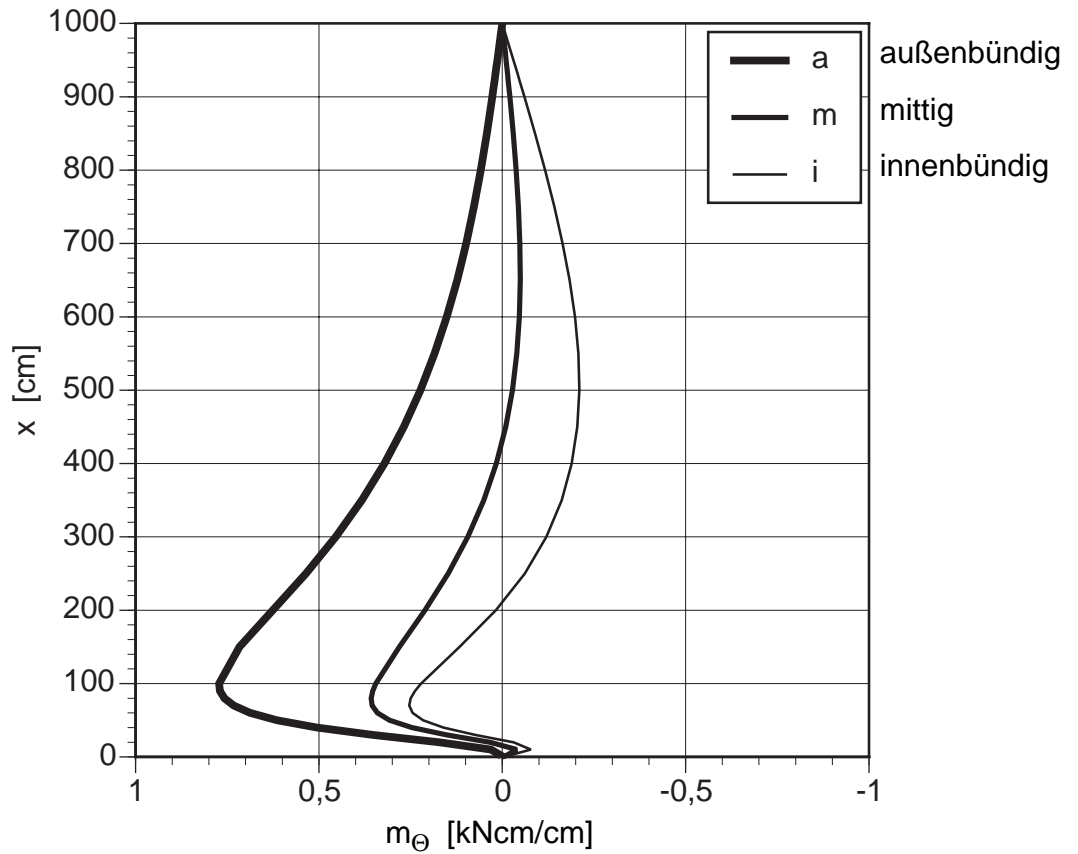


Bild 8-64 Schalenumfangsbiegemoment m_Θ in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

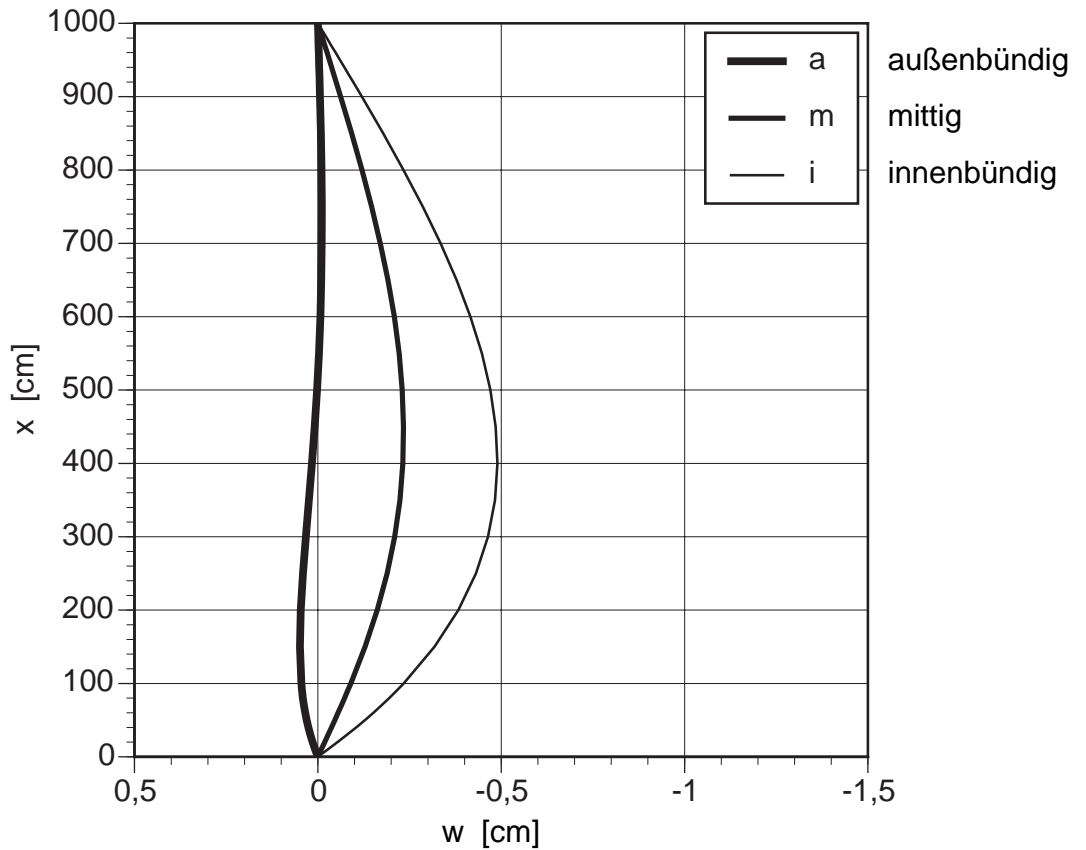


Bild 8-65 Radialverformung w der Längssteife in Abhängigkeit der Bündigkeit der Längssteife bei lokaler Randauflagerung der Schale

8.2.4 Stabilität der Auflagerlängssteife

Das Doppelbalken-Analogiemodell kann auch für die vereinfachte Bestimmung der Knicklast der Auflagerlängssteife angewandt werden.

Im folgenden wird die Verzweigungslast der Längssteife hinsichtlich des Biegeknickens in transversaler Richtung an einem hinsichtlich der wirksamen Schnittkräfte des Grundzustandes idealisierten Modell ermittelt. Die Längssteife ist dabei durch die Zylinderschale gebettet. Im Vorbeulzustand liegt eine unverformte Gesamtstruktur vor. Es wirken die Initialkräfte (Vorspannkkräfte) N_{init} bzw. $n_{x,init}$ und $n_{\Theta,init}$. Es erfolgt dabei keine Kraftumlagerung von der Längssteife in den Zylinderschaft, die stützende Wirkung des Zylinderschaftes entfaltet sich erst im Zuge des Ausknickens.

Als maßgebende Versagensform tritt das Ausknicken der Längssteife über ihre Gesamtlänge mit einer sinusförmigen Knickfigur (Eulerfall I) entsprechend der gelenkig angenommenen Randbedingungen auf, was durch Betrachtung des Doppelbalken-Analogiemodelles unmittelbar einsichtig erscheint. Die idealisierte Berücksichtigung der Schale bedeutet für die Längssteife durch die zusätzliche Fläche und das zusätzliche Trägheitsmoment entsprechend der Wirkungsweise des Schalenersatzbalkens eine Gurtverstärkung. Somit erhöht sich das Trägheitsmoment der Längssteife (I^*) und somit steigt auch die Knicklast des Längssteifen-Schalensystems gegenüber dem Fall der isolierten Auflagerlängssteife an.

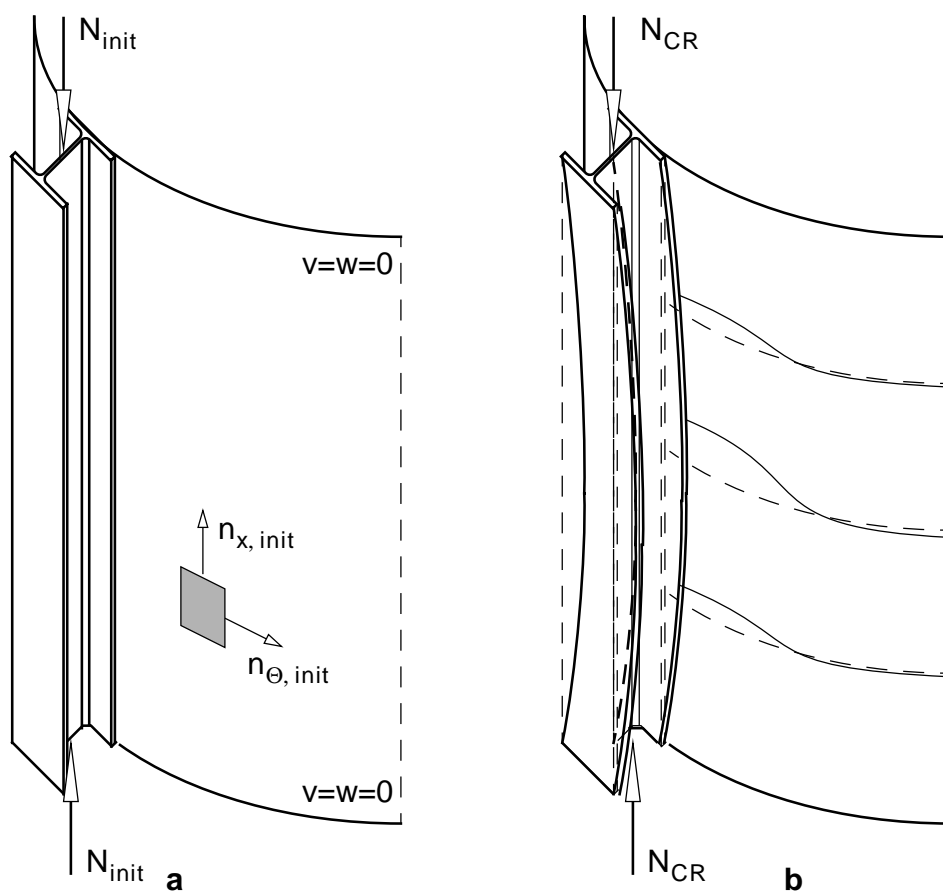
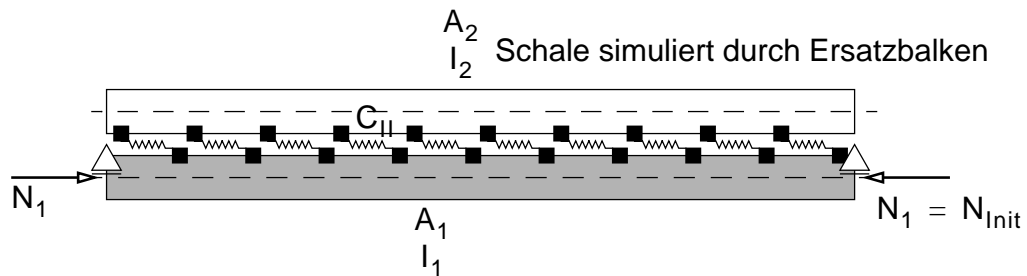
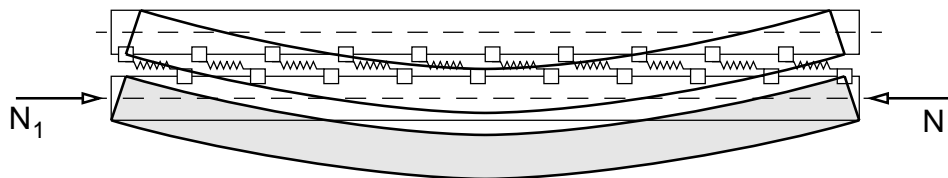


Bild 8-66 Transversales Knicken der Längssteife — a. Vorbeulzustand (starre Auflagerlängssteife) und b. differentiell benachbarter Verzweigungszustand (Knickform)

Dieses idealisierte Knickmodell kann wieder am Doppelbalken veranschaulicht werden. Die Tragwirkung der Zylinderschale wird durch jene eines äquivalenten Ersatzbalkens ersetzt. Dies erfolgt entsprechend Kap. 8.2.2 durch Anpassung der Steifigkeiten des Ersatzbalkens an jene der Zylinderschale.



a. Doppelbalken-Analogiemodell



b. Knickform des Doppelbalken-Analogiemodells

Bild 8-67 Doppelbalken-Analogiemodell

Knickform und Steifigkeitsmatrix des Doppelbalken-Analogiemodells

Die Knickform der Längssteife wird mit dem zur Wellenzahl $n = 1$ zugehörigen Verformungsansatz beschrieben.

$$\begin{aligned}
 u &= U \cdot \cos \frac{\pi x}{L} \\
 w &= W \cdot \sin \frac{\pi x}{L}
 \end{aligned}
 \tag{8-79}$$

Entsprechend Gl. (8-72b) erhält man folgende Steifigkeitsmatrix **K** mit Berücksichtigung der Effekte nach Theorie 2. Ordnung in Gl. (8-80).

$$\mathbf{K} = \frac{\pi^2}{L^2} \begin{bmatrix} EA_1 + C_{II} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} & -EA_1 \cdot \frac{e_1 \cdot \pi}{L} & -C_{II} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \\ -EA_1 \cdot \frac{e_1 \cdot \pi}{L} & \frac{EI_1 \cdot \pi^2}{L^2} + \frac{EA_1 \cdot e_1^2 \cdot \pi^2}{L^2} + \frac{EI_2 \cdot \pi^2}{L^2} + \frac{EA_2 \cdot e_2^2 \cdot \pi^2}{L^2} - N_1 & EA_2 \cdot \frac{e_2 \cdot \pi}{L} \\ -C_{II} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} & EA_2 \cdot \frac{e_2 \cdot \pi}{L} & EA_2 + C_{II} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \end{bmatrix} \quad (8-80)$$

Knicklast der Auflagerlängssteife

Die kritische Knicklast N_{CR} erhält man aus der Bedingung, daß die Determinante von \mathbf{K} (Gl. (8-80)) zu Null wird ($\det \mathbf{K} = 0$).

Für die Knicklast N_{CR} dieses Doppelbalken-Analogiemodelles kann folgende Bestimmungsgleichung in Gl. (8-81b) angegeben werden. Dabei wird N_{CR} auf die Knicklast der isolierten Längssteife $N_{CR,1}$ bezogen. Gl. (8-81b) stellt somit durch die bezogene Darstellung den Erhöhungsfaktor, der durch die stützende Wirkung der Zylinderschale erzielt wird, dar.

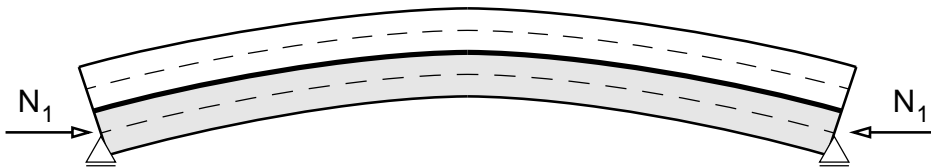
$$N_{CR,1} = EI_1 \pi^2 / L^2 \quad (8-81a)$$

$$\frac{N_{CR}}{N_{CR,1}} = 1 + \frac{I_2}{I_1} + \frac{(e_1 + e_2)^2}{i_1^2} \cdot \left(1 + \frac{A_1}{A_2} + \frac{N_{CR,1}}{C_{II} \cdot i_1^2} \right) = \frac{I^*}{I_1} \quad (8-81b)$$

Das wirksame Trägheitsmoment I^* des Doppel-Analogiemodelles kann auch als Gurtverstärkung der Längssteife interpretiert werden.

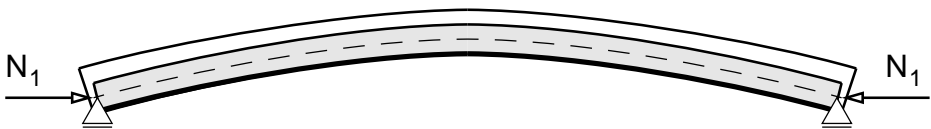
Die maximale verstärkende Wirkung ergibt sich bei übereinanderliegenden Teilbalken (Schalenersatzbalken und Längssteifenbalken) des Doppelbalken-Analogiemodelles, folglich ist für die außenliegende Längssteife die Erhöhung der Knicklast entsprechend dem Steiner'schen Anteil des wirksamen Trägheitsmomentes I^* am größten.

Im folgenden werden drei Fälle diskutiert. Dabei wird die Erhöhung der Knicklast in bezogener Form dargestellt ($N_{CR}/N_{CR,1}$):

Fall 1 — starre Koppelung von Schale und Längssteife**Bild 8-68** Übereinanderliegende Teilbalken am Doppelbalken–Analogiemodell

Wird die Federsteifigkeit C_{II} sehr hoch ($C_{II} \rightarrow \infty$), so wird der absolute Maximalwert der Knicklast erreicht:

$$\frac{N_{CR}}{N_{CR,1}} = 1 + \frac{I_2}{I_1} + \frac{(e_1 + e_2)^2}{i_1^2} \cdot \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \quad (8-82)$$

Fall 2 — innenliegende Längssteife**Bild 8-69** Ineinanderliegende Teilbalken am Doppelbalken–Analogiemodell

Liegt die Längssteife innenbündig und sind beide Exzentrizitätsmaße gleichgroß ($e_1 = -e_2$), so ergibt sich der absolute Minimalwert der Knicklast. Die Federsteifigkeit spielt keine Rolle. Der Grund dafür ist, daß die Anschlußfasern der Längssteife und jene des Ersatzbalkens im Verzweigungszustand dieselbe Dehnung bzw. Verschiebung aufweisen. Die Feder wird aber nur bei einer Differenzdehnung bzw. Differenzverschiebung aktiv. Der Kontakt der beteiligten Teilbalken erfolgt in diesem Grenzfall ausschließlich über transversale Kontaktkräfte und es kommt zu einer einfachen Addition der Biegesteifigkeiten.

$$\frac{N_{CR}}{N_{CR,1}} = 1 + \frac{I_2}{I_1} \quad (8-83)$$

Fall 3 — Entkoppelung in Axialrichtung

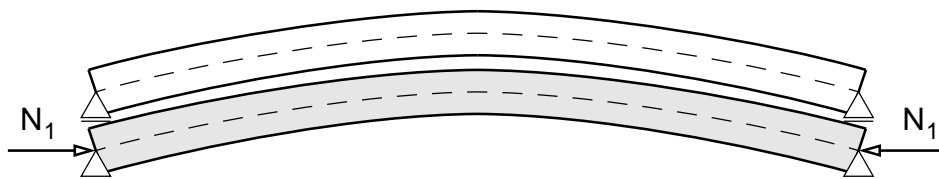


Bild 8-70 In Axialrichtung entkoppelte Teilbalken (unendlich nachgiebiger Verbund in Axialrichtung jedoch starrer Verbund in Querrichtung)

Ist die Federsteifigkeit C_{II} der Verbundfuge sehr gering, also im Grenzfall gleich Null, so erhält man dieselbe Knicklast wie zuvor. Der Nenner des dritten Anteiles wird durch die Nulldivision ($C_{II} = 0$) unendlich groß und bringt somit diesen Anteil zum Verschwinden (siehe Gl. (8-81b)). Diese Lösung entspricht derjenigen zweier übereinander liegenden Teilbalken, die keine Schubverbindung haben, es addieren sich die Biegesteifigkeiten.

$$\frac{N_{CR}}{N_{CR,1}} = 1 + \frac{I_2}{I_1} \quad (8-84)$$

8.3 Anwendungsbeispiel

Für ein praktisch relevantes Anwendungsbeispiel wird das Schaft-Längssteifen-Systems entsprechend den Regelungen nach Eurocode 3 – Teil 1.6 (1999) bzw. Eurocode 3 – Teil 4.1 (1999) hinsichtlich seiner Tragfähigkeiten untersucht:

- Plastische Grenztragfähigkeit (ULS 1)
- Beultragfähigkeit (ULS 3)

Dabei werden Berechnungsprozeduren mit steigender Approximationsqualität angewandt:

- Linear-elastische Spannungsberechnung mithilfe des gekoppelten analytischen Berechnungsmodelles inklusive Stabilitätseffekten (Theorie 2. Ordnung) bei Verwendung von Doppelfourierreihenansätzen (siehe Kap. 8.2)
- Vereinfachte Stabilitätsberechnungen
- Lineare FE-Beuleigenwertberechnungen
- Nichtlineare FE-Vergleichsberechnungen (GNA, GNIA, GMNA, GMNIA)

8.3.1 Durchgeführte Berechnungen und Angabeparameter

8.3.1.1 Durchgeführte Berechnungen

Spannungsbasierte Bestimmung der Tragfähigkeiten

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen erfolgen mithilfe des in Kap. 8.2 erarbeiteten, analytischen Berechnungsmodelles bei Anwendung von Doppelfourierreihenansätzen.

Die durchgeführten linear-elastischen Spannungsberechnungen dienen zur getrennten Beurteilung der Tragfähigkeiten von Längssteife und Schaft. Durch die Implementierung von Stabilitätseffekten im Rechenmodell sowohl für die Längssteife als auch die Zylinderschale und die Berücksichtigung von Imperfektionen in Form einer parabelförmigen Vorkrümmung der Längssteife, kann die reale Tragfähigkeit der Längssteife bestimmt werden.

Die Bestimmung der Tragfähigkeit mit den maßgebenden Spannungen der Schale wird nicht vorgenommen. Die Überlagerung der hohen Endschubkräfte, die aus Kompatibilitätsgründen zwischen Längssteife und Schale wirken, mit den Axialkräften im Auflagerbereich wird nicht berücksichtigt, die Überprüfung dieser Annahme erfolgt mittels materiell nichtlinearen Berechnungen (MNA) und den zugehörigen Grenztragfähigkeitswerten. Vorweg erfolgt aber die Festlegung der Lagerkräfte durch eine

vereinfachte Ermittlung der Vergleichsspannungen im Auflagerbereich. Dies geschieht vor allem hinsichtlich der plastischen Systemtragfähigkeit und folglich auch hinsichtlich der im späteren durchgeführten nichtlinearen Berechnungen.

Die Beultragfähigkeit der Schale wird durch die Beurteilung der auftretenden Axialspannungen im sogenannten Beulmeridian seitlich neben den Längssteifenmeridianen und der Gegenüberstellung mit den Beulspannungen der Schale vorgenommen.

Vereinfachte Stabilitätsberechnungen

Die vereinfachten Stabilitätsberechnungen dienen zur Beurteilung des Längssteifenknickens anhand des Doppelbalkenmodelles (siehe Kap. 8.2). Das Schalenbeulen wird durch Beurteilung der Spannungsfelder in der Schale bei Gegenüberstellung mit der idealen Verzweigungslast für Axialdruckbelastung vorgenommen. Damit können vorab die Beuleigenwerte der folgenden klassischen Beuleigenwertberechnungen abgeschätzt werden. Dies erfolgt analog der Bestimmung der Beultragfähigkeit der Schalenwand im Beulmeridian.

Lineare Beuleigenwertberechnungen

Lineare klassische Beuleigenwertberechnungen (Classical Buckling Eigenvalue Analysis - CBEV) werden durchgeführt um erste genauere Anhaltspunkte über die zu erwartenden Beulversagensformen zu erhalten.

Weiters ist es entsprechend Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) möglich die reale Beultragfähigkeit des Schaft-Längssteifen-Systems zu bestimmen. Die Eingangswerte zur Bestimmung des bezogenen Schalenschlankheitsgrades $\bar{\lambda}_{0V}$ des Gesamtsystems, hier dem Schaft-Längssteifen-System, sind die plastische Grenztragfähigkeit und die (lineare) kritische Beullast (Verzweigungslasten der CBEV-Analysen). Darauf aufbauend wird nach Ermittlung des Beulabminderungsfaktors κ des Schaft-Längssteifen-Systems, der im vorliegenden Fall konservativer Weise jenem für Axialdruckbeulung gleichgesetzt wird, die Beultragfähigkeit bestimmt.

Nichtlineare FE-Vergleichsberechnungen

Die prognostizierten Tragfähigkeiten basierend auf den linear-elastischen Spannungsberechnungen bzw. den linearen Beuleigenwertberechnungen werden mittels nichtlinearen FE-Berechnungen (GNA, GMNA oder GMNIA bzw. MNA) in Kap. 8.3.5 verifiziert. Das Beulverhalten wird ausgehend von geometrisch nichtlinearen Analysen (GNA) mit geometrisch und materiell nichtlinearen Analysen (GMNA) untersucht.

8.3.1.2 Angabeparameter des Anwendungsbeispielles

Die Silogeometrie ist in Bild 8-71 dargestellt. Der Radius beträgt 5 m, die Höhe des Schaftes 10 m und die Höhe des Trichters 8.33 m bei einer Trichterneigung von 30°. Als Füllgut wird Kies ($\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$) angenommen. Somit ergibt sich eine Füllgutbelastung von $G = 17206 \text{ kN}$. Daraus ergeben sich sofort über die Stützenanzahl n_{St} die Gesamtauflagerkräfte. Als Teilsicherheitsbeiwert der Belastungen wird $\gamma_F = 1,5$ angenommen. Als Materialgüte wird für Schaft und Längssteife St 37 vorausgesetzt. Für den

Teilsicherheitsbeiwert der Widerstandsseite wird $\gamma_M = 1,0$ gesetzt.

Die Berechnungen werden an einem vereinfachten Berechnungsmodell mit konstanter Wandstärke durchgeführt. In den Auflagerlängssteifenmeridianen und den Mittenmeridianen zwischen den Auflagerungen liegen aufgrund der äquidistant angeordneten Auflagerlängssteifen und der vorhandenen Kraftwirkungen Symmetriebedingungen vor. Es werden zwei Varianten mit unterschiedlichem Längssteifenprofil und unterschiedlicher Stützenanzahl untersucht (Bild 8-72).

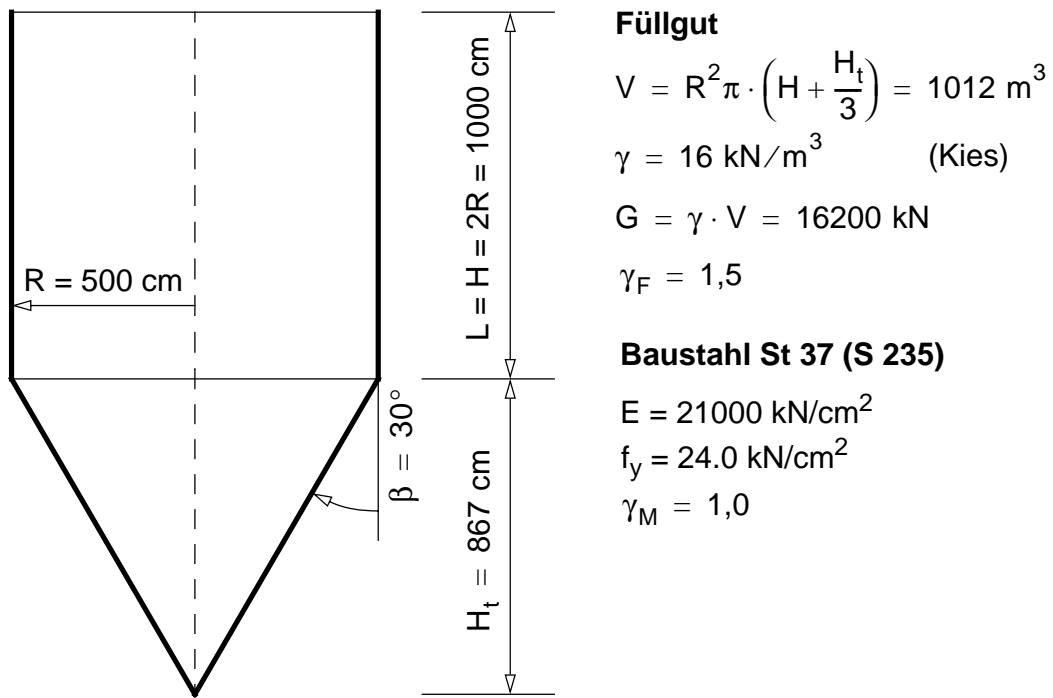


Bild 8-71 Anwendungsbeispiel - Silogeometrie und Materialparameter

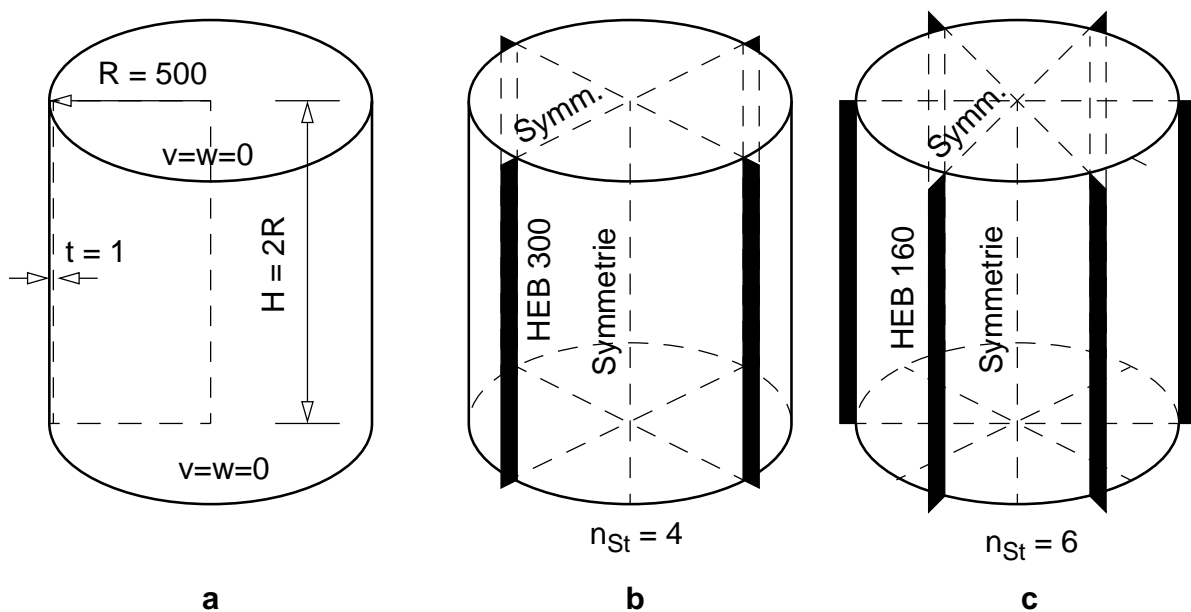


Bild 8-72 Berechnungsmodell — **a.** Geometrie der Schale, **b.** Variante 1 mit 4 Auflagerlängssteifen HEB 300 und **c.** Variante 2 mit 6 Auflagerlängssteifen HEB 160

8.3.1.3 Aufteilung der Gesamtauflagerkraft

Die Gesamtauflagerkraft wird, wie bereits Kap. 1.1.2 dargestellt, in drei Teillagerkräfte getrennt (Bild 8-73). Die Lagerkraft wird dabei zentrisch über die Längssteife (F_L), über die lokale Randlagerung des Zylinders (F_Z) über die Breite d bzw. über das Schottblech (F_S) über die Höhe h_s in den Schaft eingeleitet. Aufgrund der vorhandenen Lagerflächen und den zugeordneten Lagerkräften ergibt sich eine prozentuale Aufteilung der Gesamtlagerkraft.

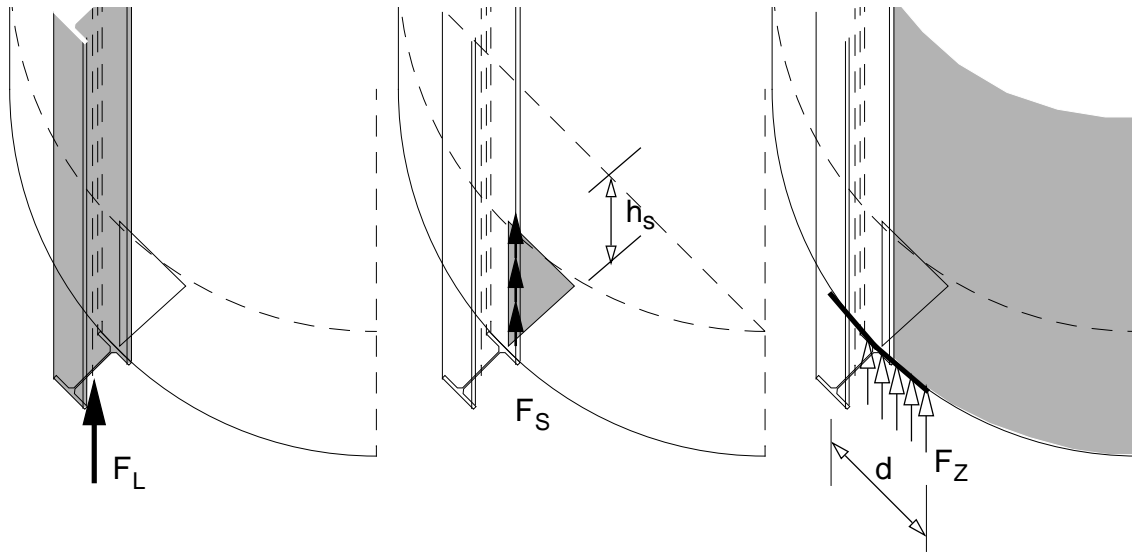


Bild 8-73 Einleitung der Lagerkräfte

Die Schottlagerkraft F_S wird mittels konstant verteilten Schubkräften über die Höhe h_s in den Schaft eingeleitet, dies wird in der äquivalenten Ersatzlagerfläche A_S^* des Schottbleches berücksichtigt. Implizit wird damit die wirksame Mindestfläche des Schottbleches in der Auflagerebene definiert.

$$A_S^* = \frac{2 \cdot t_c \cdot h_s}{\sqrt{3}} \quad (8-85)$$

Die maximal aufnehmbare Last F_{Tot} ergibt sich durch Summation der Einzelflächen und Multiplikation mit der Fließgrenze f_y und der Stützenanzahl n_{St} . Die modifizierte aufnehmbare Last F ergibt sich im vorliegenden Fall durch die Berücksichtigung des Interaktionseffektes von Schott- und lokaler Randlagerkraft (Bild 8-74) im Auflagerbereich. Bei der Ermittlung der Lagerkräfte wird davon ausgegangen, daß durch Interaktionseffekte zwischen Schottlagerkraft F_S und lokaler Randlagerkraft F_Z die vollplastischen Lagerkrafttragfähigkeiten $F_{S,y}$ bzw. $F_{Z,y}$ nicht erreicht werden können. Vorweg wird die Ausnützbarkeit dieser beiden Lagerkrafttragfähigkeiten mit ca. 70% entsprechend einer vereinfachten Ermittlung der Vergleichsspannung (siehe Bild 8-74) in Gl. (8-86b) im Auflagerbereich festgelegt.

$$F_{Tot} = (N_{pl} + F_{Z,y} + F_{S,y}) \cdot n_{St} = (A_L + A_Z + A_S^*) \cdot f_y \cdot n_{St} \quad (8-86a)$$

$$F = (N_{pl} + 0,7F_{Z,y} + 0,7F_{S,y}) \cdot n_{St} \quad (8-86b)$$

In Kap. 7 wurde bereits die Bestimmung der optimalen Aufteilung der Teilauflagerkräfte bei Vorliegen zweier Einleitungsmechanismen — lokale Randlagerung des Zylinderschaftes in Umfangsrichtung (Lagerkraft F_Z und Lagerbreite d) und lokale Lagerung des Zylinderschaftes in Meridianrichtung (Lagerkraft F_S und Lagerhöhe h_S) durch die Auflagerkräfteinleitung über das Schottblech bzw. eine partielle Auflagerlängssteife — vorgenommen. Dabei wird eine vereinfachte Handrechnung auf Basis von Nennspannungen σ_x und τ (siehe auch Bild 8-74) mit materiell nichtlinearen FE-Analysen (MNA) verifiziert.

Im vorliegenden Fall wird die Gesamtauflagerkraft über einen dritten Mechanismus — zentrische Lagerung der Auflagerlängssteife (Lagerkraft F_L) in das Schaft-Längssteifen-system eingeleitet. Deshalb erfolgt vorab die vereinfachte Festlegung entsprechend Gl. (8-86b) bzw. Bild 8-74.

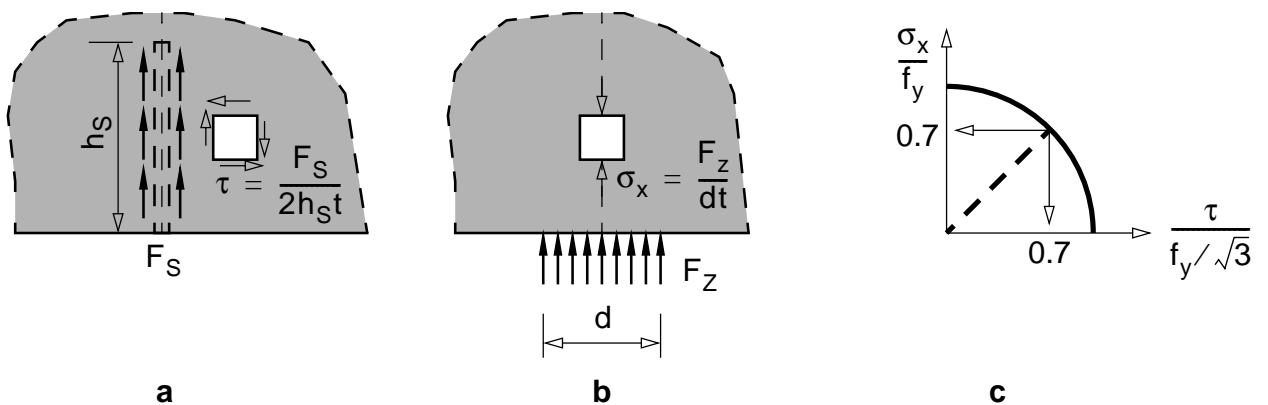


Bild 8-74 Spannungsinteraktion im Auflagerbereich — **a.** Schubspannungen zufolge Schottlagerkraft F_S , **b.** Axialspannungen zufolge Lagerkraft F_Z und **c.** vereinfachte Bestimmung der Vergleichsspannung und Bestimmung der Teilauflagerkräfte

Gesamtauflagerkraft

Bei konstant gehaltener Lagebreite d bzw. Höhe des Schottbleches h_S wird nun in Abhängigkeit der Stützenanzahl n_{St} und des gewählten Längssteifenprofils die Gesamtlagerkraft in Tab. 8-13 bestimmt. Die Geometriedaten der Teilflächen der Lagerfläche sind in Tab. 8-12 dargestellt. Die Lagerkräfte werden entsprechend Gl. (8-86a) und Gl. (8-86b) bestimmt. Für beide Varianten des Anwendungsbeispiels erhält man in Tab. 8-13 nahezu gleich große Gesamtauflagerkräfte F .

Tab. 8-12 Geometriedaten der Teilflächen der Lagerfläche

Teillagerfläche	Geometrie- parameter	Variante 1	Variante 2
		$n_{St} = 4$	$n_{St} = 6$
Längssteife	Walzprofil	HEB 300	HEB 160
lokale Randlagerung	d [cm]	78.54	78.54
Schott	h_S [cm]	80.0	80.0

Um eine Aussage über die bestmögliche Aufteilung der Lagerkräfte zu erhalten, werden im späteren materiell nichtlineare Berechnungen (MNA) in Kap. 8.3.6 durchgeführt. Dabei stellt sich durch die Verhinderung der Axialverschiebungen der Auflagerfläche (starre Auflagerung) die Aufteilung der Lagerkräfte so ein, daß die größtmögliche Tragfähigkeit erzielt wird. Dem gegenüber steht die Vorgabe der Teilaullagerkräfte (unendlich nachgiebige Lagerung modellhaft wiedergegeben durch gleichförmig verteilt angreifende Auflagerkräfte) und der Bestimmung der zugehörigen Tragfähigkeit. Die maximale Tragfähigkeit tritt hier ein, wenn die vorgegebenen Kräfte die Aufteilungsverhältnisse entsprechend der Berechnung bei starren Auflagerungsbedingungen einnehmen.

Tab. 8-13 Auflagerkräfte und aufnehmbare Last

Stützenanzahl	Auflagerflächen und ' Gesamttaullagerfläche [cm ²]				Auflagerkrafttragfähigkeiten [kN]			Gesamtauullagerkräfte [kN]		Gesamtlast [kN]
	A _L	A _Z	A _S *	ΣA	F _L	F _{Z,y}	F _{S,y}	F _{Tot}	F	γ _F · G
n _{St} = 4	149	78.54	92.37	320	3576	1885	2217	30 712	25 800	24 300
n _{St} = 6	54.4	78.54	92.37	225	1306	1885	2217	32 448	25 200	

8.3.1.4 Lastfälle

Es werden folgende in Bild 8-75 dargestellte Lastfälle behandelt:

- Vertikallastfälle**
 Es wirken die Teillagerkräfte der Längssteife F_L , des Schottbleches F_S und der lokalen Randlagerung des Zylinderschafts F_Z . An der Schalenwand wirkt vereinfacht konstante Wandschubbelastung, welche die Wandreibungslasten am Schaft und die am unteren Rand angreifenden Trichterrandkräfte ersetzt.
- Innendruckbelastung**
 Näherungsweise wird eine konstante Radialdruckbelastung berücksichtigt. Diese wird auch als steifigkeitserhöhender Effekt der Schale bei Berechnung nach Theorie 2. Ordnung berücksichtigt.
- Imperfektionslasten**
 Zur Bestimmung der realen Tragfähigkeit der Längssteife wird als maßgebende Imperfektion eine parabelförmige Vorkrümmung der Längssteife berücksichtigt. Im Zuge der linear-elastischen Spannungsberechnungen wird anstelle der parabelförmigen Vorkrümmung der Längssteife eine äquivalente Imperfektionsersatzlast bei Berechnung nach Theorie 2. Ordnung berücksichtigt.

Bei den nichtlinearen FE-Vergleichsberechnungen am imperfekten System (GMNIA) wird sowohl die geometrische Imperfektion des Gesamtsystems als auch die Imperfektionsersatzlast berücksichtigt.

Wird die geometrische Imperfektion verwendet, weist die Schalenwand auch ein entsprechendes Imperfektionsmuster in Umfangsrichtung auf. Der Verlauf in Umfangsrichtung wird durch eine kubische Spline-Funktion beschrieben, wobei die Imperfektionsamplituden in den Längssteifenmeridianen den Maximalwert erreichen und in den Schalenmittenmeridianen zu Null werden (Bild 8-75.c).

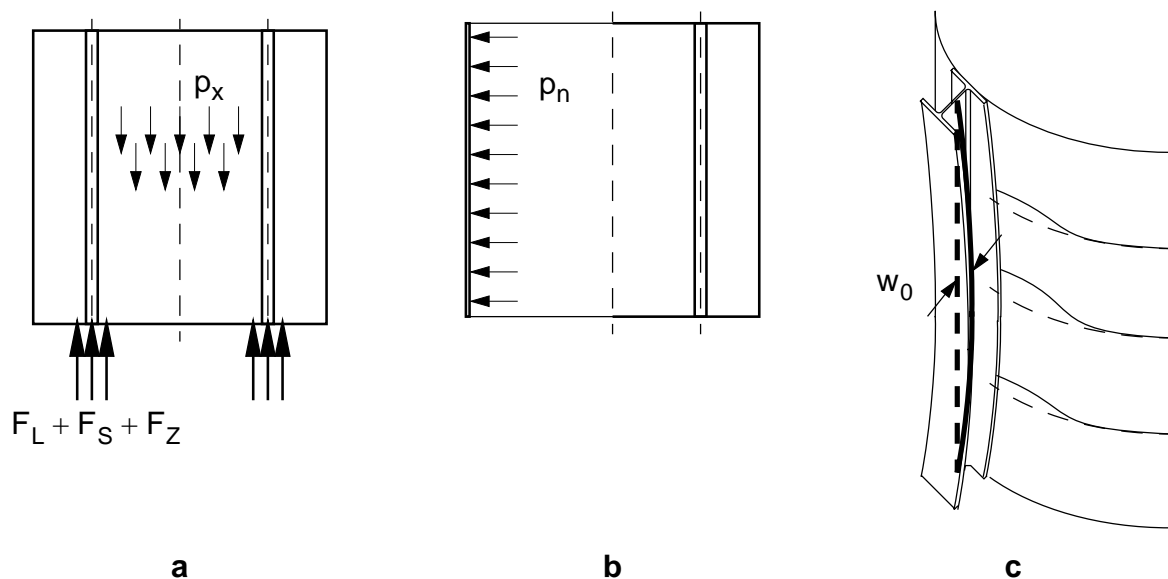


Bild 8-75 Lastfälle des Anwendungsbeispiels —
a. Vertikallastfälle, **b.** Innendruckbelastung und **c.** Imperfektion der Längssteife

8.3.2 Linear-elastische Spannungsberechnungen

Die Tragfähigkeiten für ULS 1 — plastische Grenztragfähigkeit und ULS 3 — Beultragfähigkeit werden alternativ zu nichtlinearen FE-Analysen bestimmt, und zwar basierend auf:

- linear-elastischen Spannungsberechnungen
- vereinfachten Stabilitätsberechnungen

Die Tragfähigkeiten von Längssteife und Schale werden dabei getrennt ermittelt. Die Grundlagen zur Bestimmung der Tragfähigkeiten auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen sind in Kap. 1.2.2 dargestellt.

8.3.2.1 Spannungsbasierte Bestimmung der Tragfähigkeiten

Die Tragfähigkeit der Längssteife wird durch die Bestimmung des maximal beanspruchten Querschnittes, die Tragfähigkeit der Schale durch die Gegenüberstellung der vorhandenen Axialspannungen im sogenannten Beulmeridian mit der realen Beultragfähigkeit (hier reale Axialdruckspannung) der Schalenwand ermittelt.

Die folgende Darstellung der Ergebnisse der linear-elastischen Berechnungen erfolgt in Hinblick auf die Bestimmung der Tragfähigkeiten des Gesamtsystems.

Querschnittstragfähigkeit der Längssteife

Die Ausnutzung der Querschnittstragfähigkeit der Längssteife in Gl. (8-87) wird entsprechend der Interaktionsformel für I-Profile bei Beanspruchung durch Normalkraft und Biegemoment (z.B. DIN 18800 (1990)) bestimmt.

$$\frac{N}{N_{pl}} + 0,9 \frac{M}{M_{pl}} \leq 1 \quad (8-87)$$

Durch die Berücksichtigung der Vorkrümmung der Längssteife und der Stabilitätseffekte in Längssteife und Schaft wird die reale Tragfähigkeit der Längssteife bestimmt.

Für die Ergebnisdarstellung werden die Beanspruchungen für den Innen- und den Außengurt (“i”) bzw. (“o”) ermittelt.

Tragfähigkeit der Schalenwand

Die Tragfähigkeit der Schale wird, wie bereits erwähnt, nicht durch die Bestimmung der Vergleichsspannung in der maximal beanspruchten Stelle bestimmt, sondern erfolgt durch die Festlegung der Teilauflagerkräfte entsprechend einer vereinfachten Bestimmung der Von-Mises-Vergleichsspannungen im Auflagerbereich, wobei die vollplastischen Teilauflagerkräfte zu je 70% ausgenützt werden. Es könnten aber genauso entsprechend Kap. 7 die Teilauflagerkräfte F_Z und F_S hinsichtlich ihres optimalen Aufteilungsverhältnisses bestimmt werden.

Die Bestimmung der Beultragfähigkeit wird mit den Spannungen im sogenannten Beulmeridian vorgenommen (siehe Kap. 1.2).

Bedingt durch die Anordnung der Längssteife kann sich eine Beule im Auflagerbereich nur seitlich des Längssteifenmeridians ausbilden. Das Beulenzentrum ist somit um die halbe reale Beulengröße seitlich versetzt. Die Lage dieses Meridians ergibt sich, wie bereits in Kap. 1.2.2 dargestellt, somit aus der realen Beulengröße für Axialbeulung nach DIN 18800 - Teil 4 (1990). Die Bezugslänge l_B für das Beulenzentrum ergibt sich aus der halben realen Beulengröße für Axialbeulung und kann in den entsprechenden Umfangswinkel Θ_B umgerechnet werden:

$$l_B = 2 \sqrt{R \cdot t} = 2 \sqrt{500 \cdot 1,0} = 45 \text{ cm} \quad (8-88a)$$

$$\Theta_B = \frac{l_B}{R} \cdot \frac{180}{\pi} = 5,2^\circ \quad (8-88b)$$

Im vorliegenden Fall wird noch die Profilbreite zum Teil eingerechnet und der Beulmeridian für beide Varianten folgend festgelegt:

$$\Theta_B = 5,6^\circ \quad (8-89)$$

Der maßgebende Horizont zur Bestimmung der Beultragfähigkeit der Schale ergibt sich aus dem Ort der maximalen Druckmeridianspannung des Beulmeridians. Als Mindestabstand vom unteren Rand wird dabei die Bezugslänge l_B bzw. $0,1H$ verwendet.

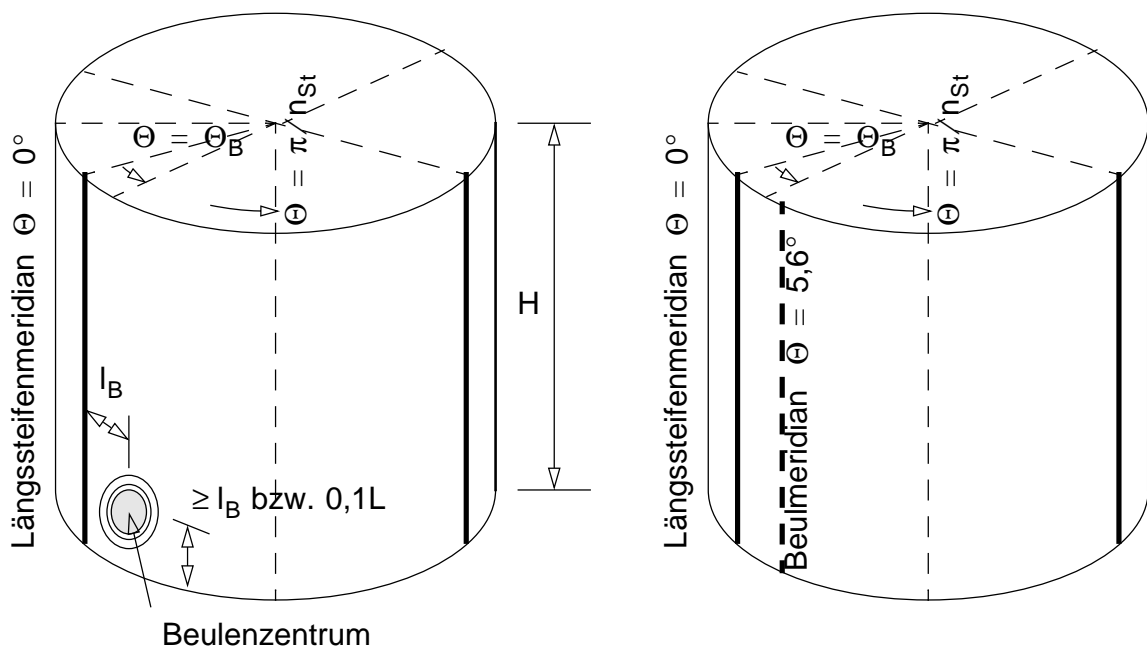


Bild 8-76 Längssteifenmeridian und Lage des Beulmeridians

Die Darstellung der Spannungen in der Zylinderschale erfolgt im Längssteifenmeridian ($\Theta = 0^\circ$) und im sogenannten Beulmeridian ($\Theta = 5,6^\circ$)

8.3.2.2 Vertikallastfälle

Die Ergebnisse der linearen Spannungsberechnungen sind im folgenden dargestellt für:

- Variante 1 —
4 Längssteifen HEB 300 ($n_{St} = 4$)
- Variante 2 —
6 Längssteifen HEB 160 ($n_{St} = 6$)

Es wirken die Auflagerkräfte entsprechend der Aufteilung in Tab. 8-13. Die Teilauflegerkraft der Längssteife F_L wird entsprechend der plastischen Tragfähigkeit N_{pl} der Längssteife festgelegt. Die plastischen Tragfähigkeiten der Schottblech- bzw. lokalen Randauflagerung werden zu 70% ausgenutzt:

$$\begin{aligned} F_L &= N_{pl} \\ F_S &= 0,70 \cdot F_{S,y} \\ F_Z &= 0,70 \cdot F_{Z,y} \end{aligned} \quad (8-90)$$

Die Auflagerkräfte nehmen somit folgende Größenwerte ein:

- Variante 1 — 4 Längssteifen HEB 300:
 $F_L = N_{pl} = 3576 \text{ kN}$
 $F_S = 1567 \text{ kN}$
 $F_Z = 1333 \text{ kN}$
- Variante 2 — 6 Längssteifen HEB 160:
 $F_L = N_{pl} = 1303 \text{ kN}$
 $F_S = 1567 \text{ kN}$
 $F_Z = 1333 \text{ kN}$

Die Berechnungen werden, wie bereits erwähnt, mithilfe des analytischen Berechnungsmodelles bei Anwendung von Doppelfourierreihenansätzen durchgeführt. Dabei werden die Auflagerkräfte der Längssteife F_L und der Randlagerung der Schale F_Z über eine Höhe von $L_1 = 0,01L$ verteilt angebracht. Die Schottblechauflegerkraft F_S wird ebenfalls als Flächenlast in Axialrichtung eingebracht, die Einleitung erfolgt im Rechenmodell über eine bezogene Verteilbreite von $d/R = 0,016$ und die Höhe h_S des Schottbleches.

Dieses Faktum ist in den Resultaten für die Normalkraft der Längssteife bzw. den Axialspannungen der Schale ersichtlich, die Maximalwerte werden in diesem Bereich gekappt. Die Sollrandwerte können somit extrapoliert werden.

Darstellung der Ergebnisse

Es werden für beide Varianten folgende Ergebnisse dargestellt:

- Normalkraftbeanspruchung der Längssteife $n = N/N_{pl}$
- Biegemomentenbeanspruchung der Längssteife $m = M/M_{pl}$
- Querschnittsausnutzung der Längssteife $n + 0,9m$
- Radialverformungen w des Längssteifenmeridians
- Membranaxialspannung σ_x/f_y bezogen auf die Fließgrenze im Längssteifen- und Beulmeridian
- Membranschubspannung $\tau_{x\theta}/\tau_y$ bezogen auf die Fließgrenze im Längssteifen- und Beulmeridian

Es werden die Ergebnisse für die Beanspruchungen der Längssteife und der Schale für die Teillastfälle, also für die Teilauflegerkräfte F_L , F_Z und F_S , und die Gesamtauflegerkraft $F = F_L + F_S + F_Z$ dargestellt.

Ergebnisse

Die Beanspruchungen ergeben sich analog Kap. 8.2.3.3 (Parameterstudie 1 — Variation des Längssteifenprofils). Die Schottblechauflegerkraft bzw. Randauflegerkraft liefern aufgrund ihrer Größenordnung — bis auf den unmittelbaren Auflagerbereich — qualitativ gut übereinstimmende Ergebnisse.

Ergebnisse für Variante 1 — HEB 300

Aufgrund der festgelegten Lagerkraftaufteilung dominiert die Lagerkraft F_L die Beanspruchungen von Längssteife und Schale.

Die maßgebende Querschnittsausnutzung der Längssteife (Bild 8-79) ergibt sich im Bereich $0 \leq x/L \leq 0,1$ im Außengurt ("o").

Die Radialverformungen in Bild 8-80 ergeben sich zum Großteil aus der Lagerkraft F_L , die Radialverschiebungen zufolge der Lagerkräfte F_S und F_Z werden entsprechend der vorhandenen Steifigkeitsverhältnisse nahezu zu Null.

Die maximalen Axialspannungen im Längssteifenmeridian (Bild 8-81) treten im mittelbaren Auflagerbereich ein, ca. 2/3 stammen von der Lagerkraft F_L . Die Axialspannungen zufolge der Lagerkraft F_L zeigen einen stark abnehmenden Verlauf, der maximale Randwert beträgt $\sigma_x/f_y = 0,7$. Im Beulmeridian (Bild 8-82) besteht die maximale Axialspannung aus ca. gleichen Anteilen zufolge der drei Teilauflegerkräfte.

Die Schubspannungen $\tau_{x\theta}$ im Längssteifenmeridian (Bild 8-83) sind für F_L und F_Z gegenläufig, die Schubspannungen zufolge F_S weichen qualitativ durch die Lagerkrafteinleitung im Auflagerbereich von jenen zufolge F_L ab. Im Beulmeridian (Bild 8-84) besteht die maximale Schubspannung analog der Axialspannung aus ca. gleichen Anteilen zufolge der drei Teillagerkräfte.

Ergebnisse für Variante 2 — HEB 160

Die Lagerkraftaufteilung erfolgt nun in ca. gleich große Anteile.

Die maßgebende Querschnittsausnutzung der Längssteife (Bild 8-79) ergibt sich in $x/L \approx 0,1$ ebenfalls im Außengurt (o).

Die Hälfte der Radialverformungen in Bild 8-88 ergeben sich zufolge F_L , der Rest ergibt sich zu annähernd gleichen Teilen zufolge F_S und F_Z .

Die Axialspannung im Längssteifenmeridian erreicht in ihren Maximalwert in $x/L \approx 0,1$, den größten Beitrag liefert die Schottlagerkraft F_S (Bild 8-89). Im Beulmeridian liefern die drei Lagerkräfte wiederum drei annähernd gleiche Anteile der Axialspannung.

Die Schubspannungen ergeben sich wie bei Variante 1.

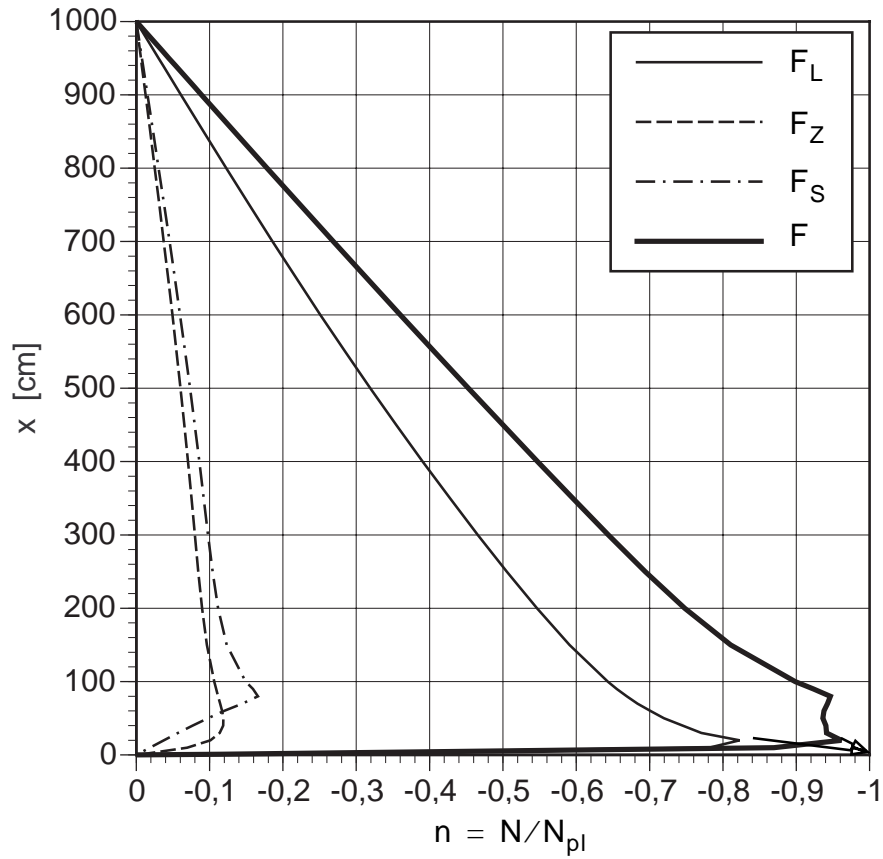


Bild 8-77 Normalkraftbeanspruchung der Längssteife für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

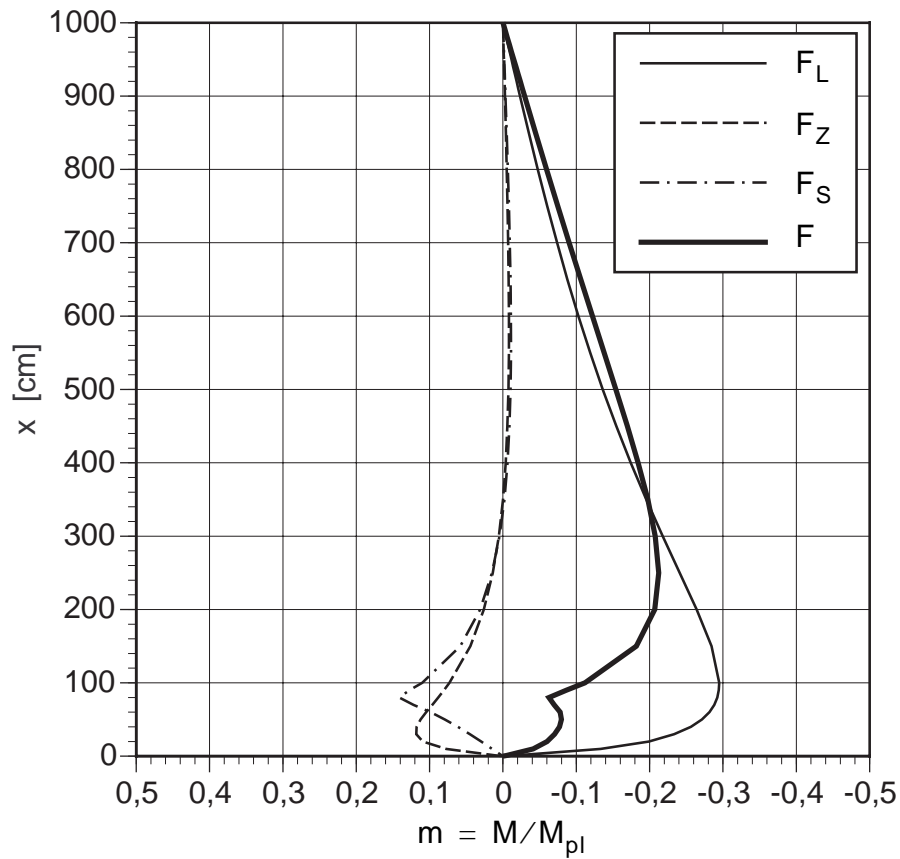


Bild 8-78 Biegemomentenbiegebeanspruchung der Längssteife für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

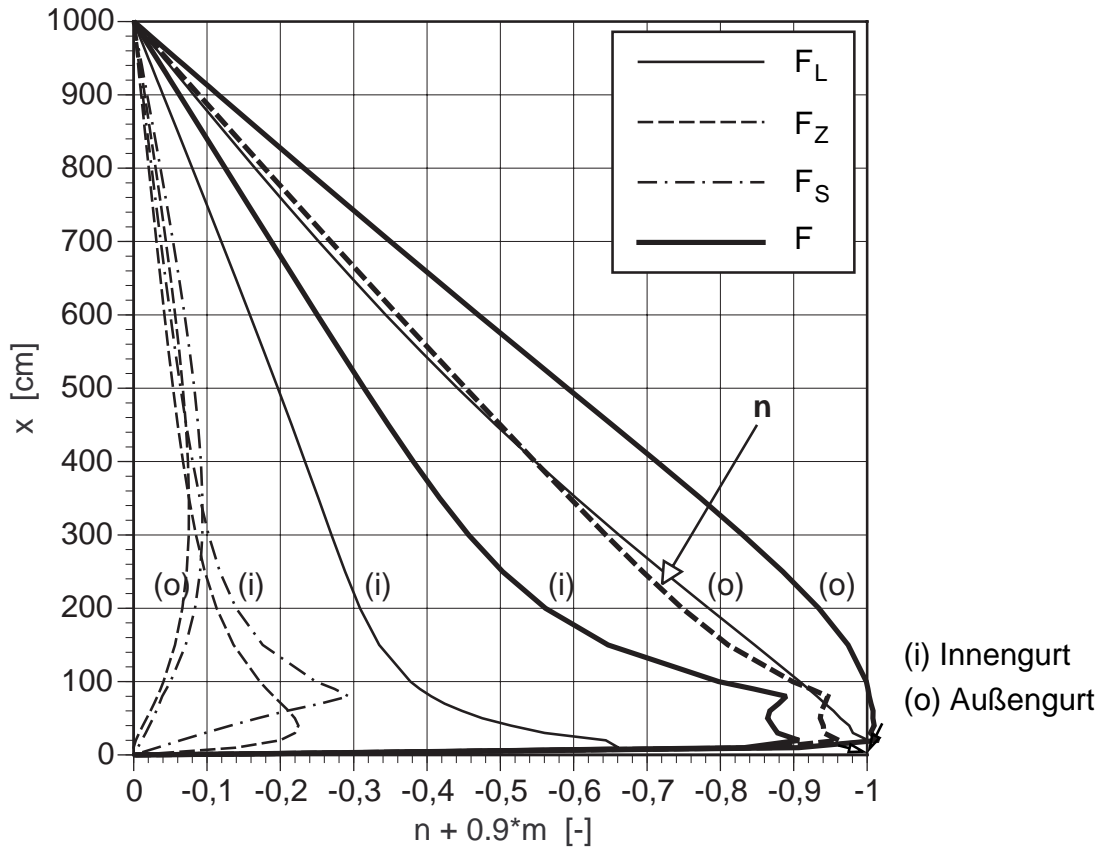


Bild 8-79 Querschnittsausnutzung der Längssteife für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

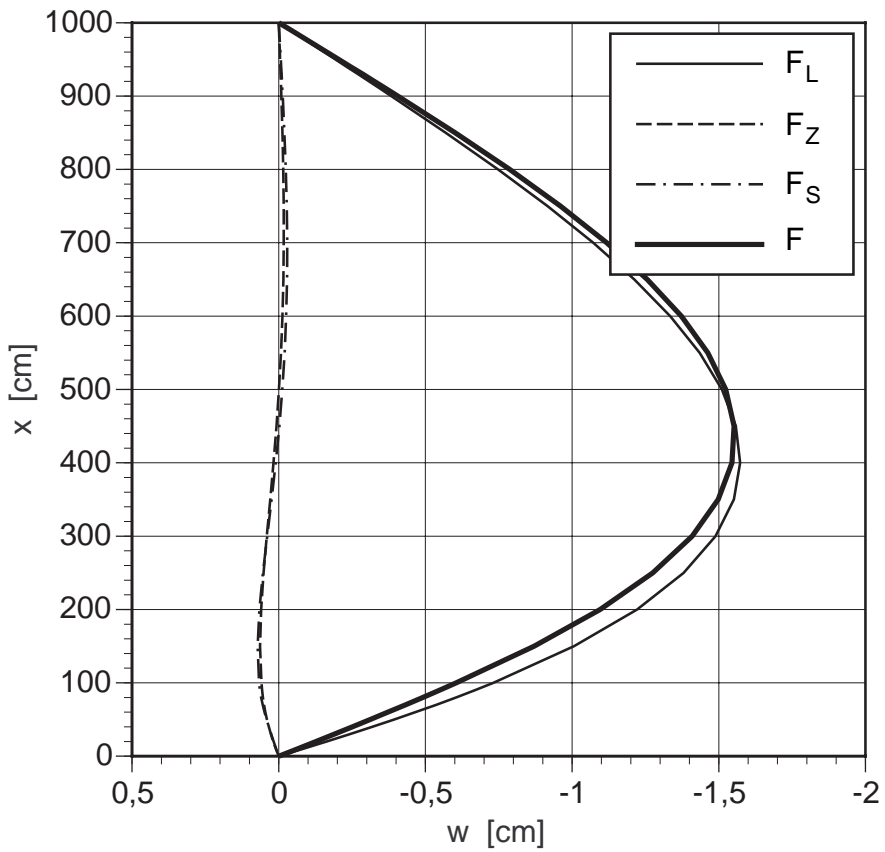


Bild 8-80 Radialverformung der Längssteife für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

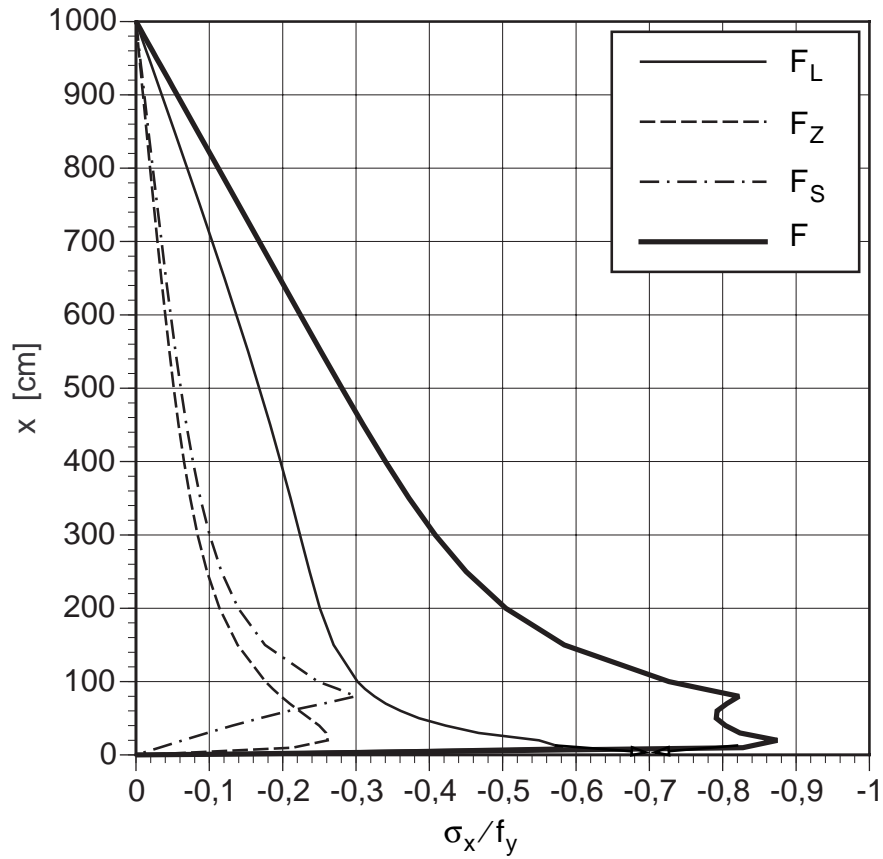


Bild 8-81 Membranaxialspannung in $\Theta = 0^\circ$ für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

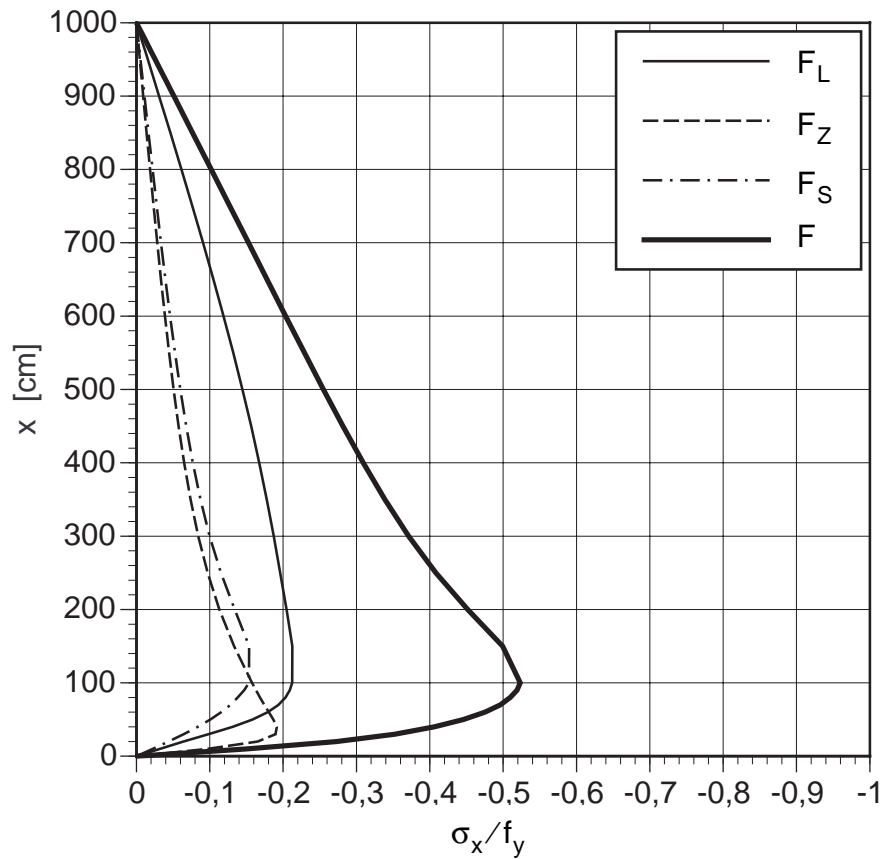


Bild 8-82 Membranaxialspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ (Beulmeridian) für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

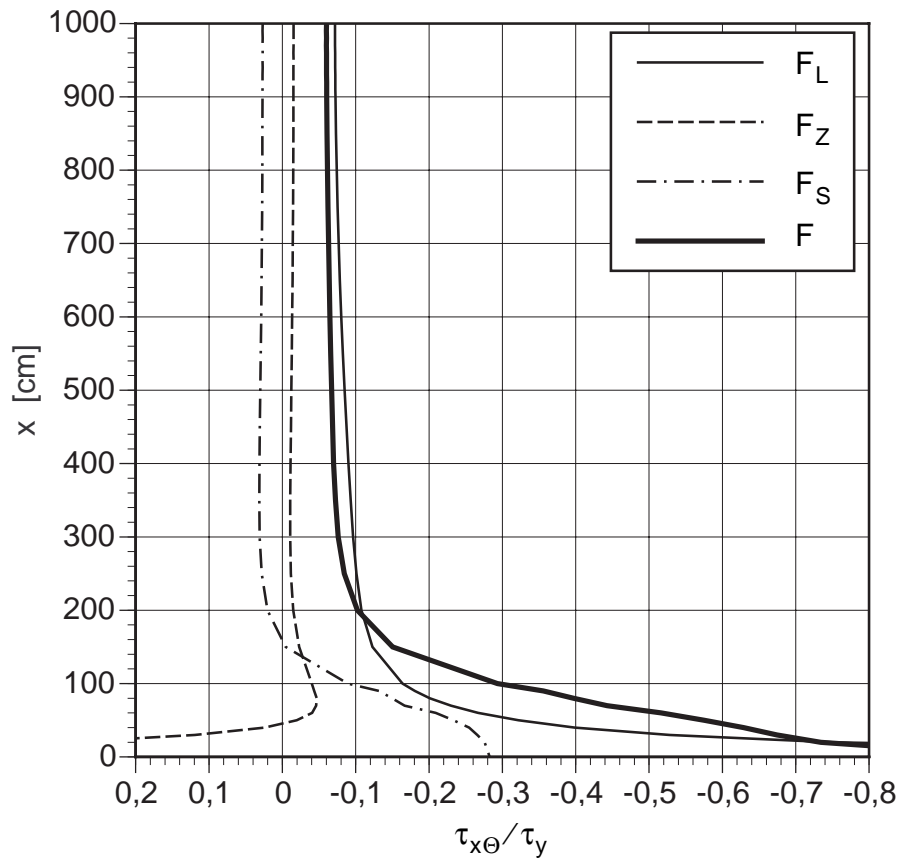


Bild 8-83 Membranschubspannung in $\Theta = 0^\circ$ für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

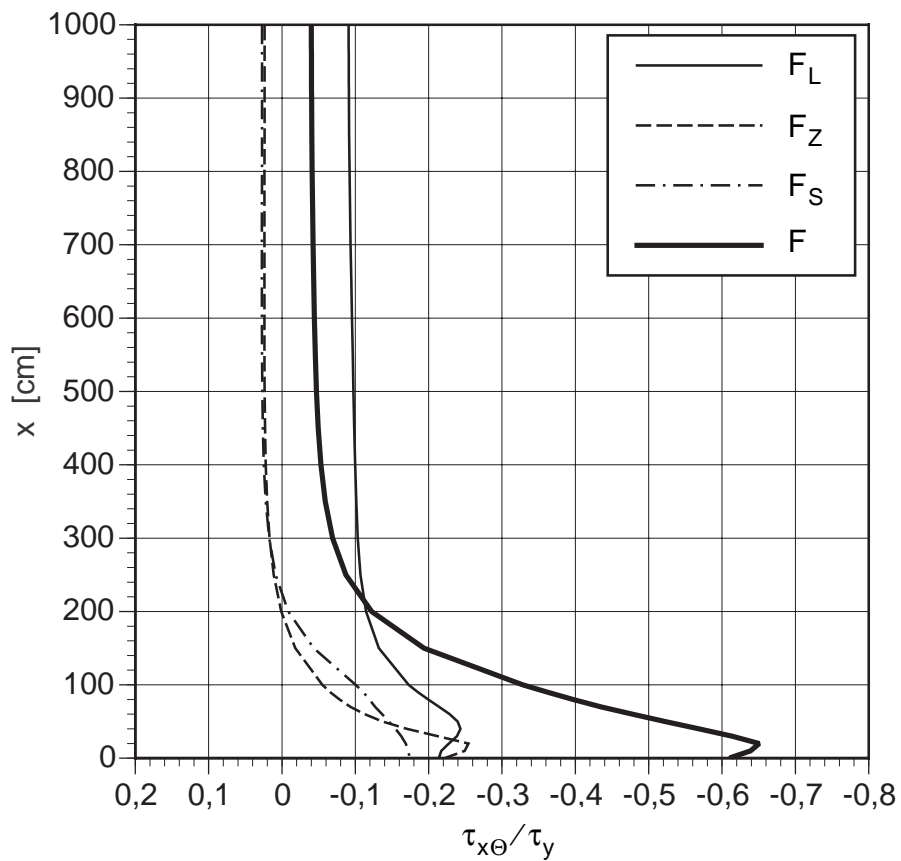


Bild 8-84 Membranschubspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ (Beulmeridian) für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

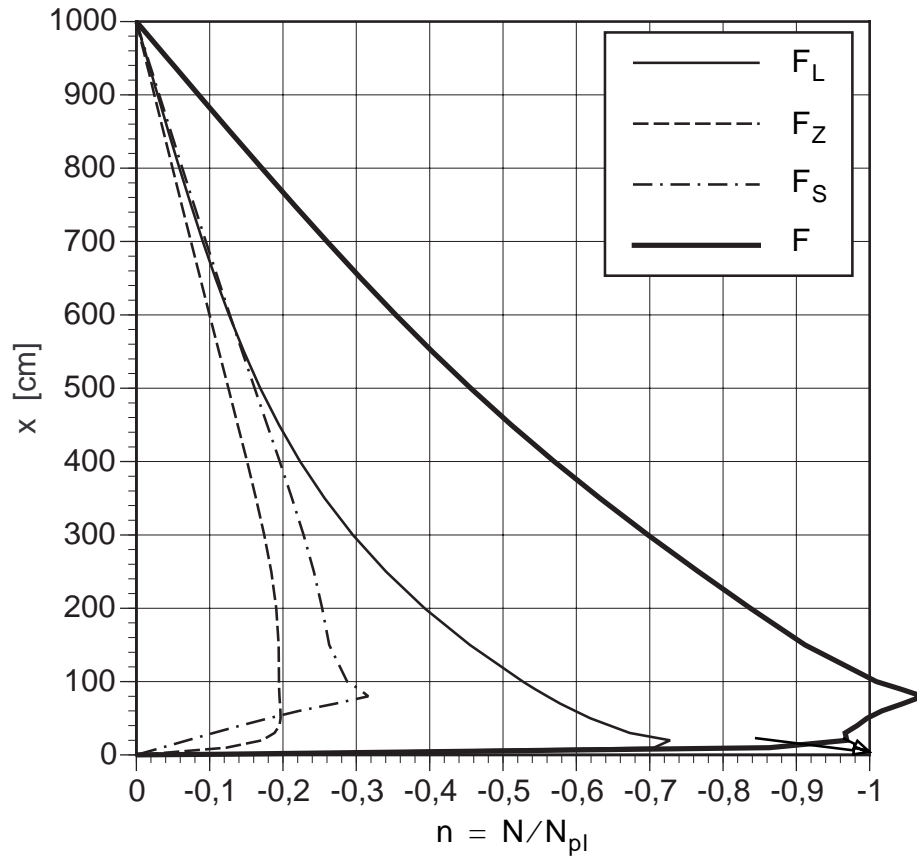


Bild 8-85 Normalkraft in der Längssteife für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

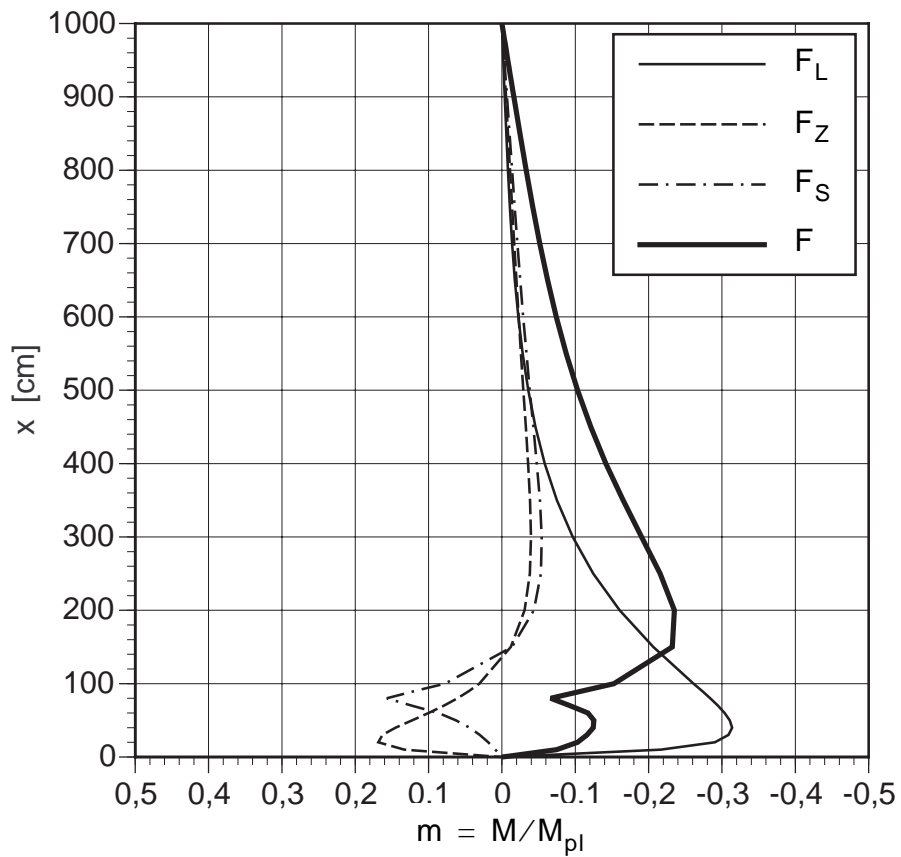


Bild 8-86 Biegemoment der Längssteife für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

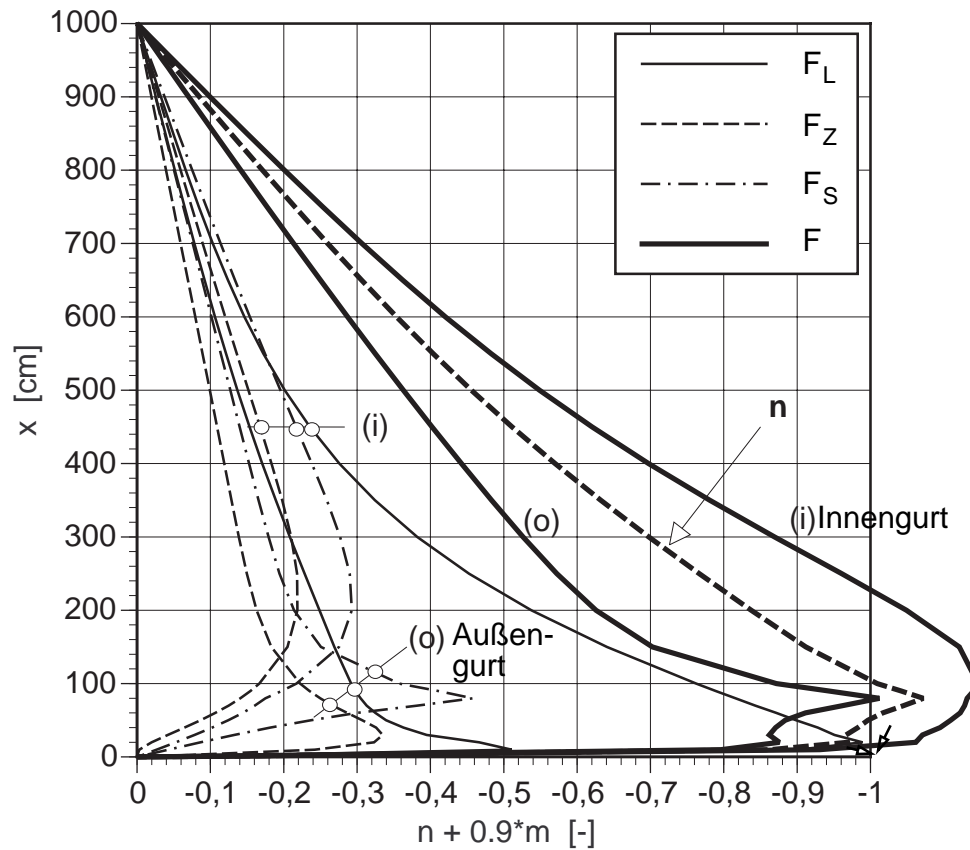


Bild 8-87 Querschnittsausnutzung der Längssteife für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

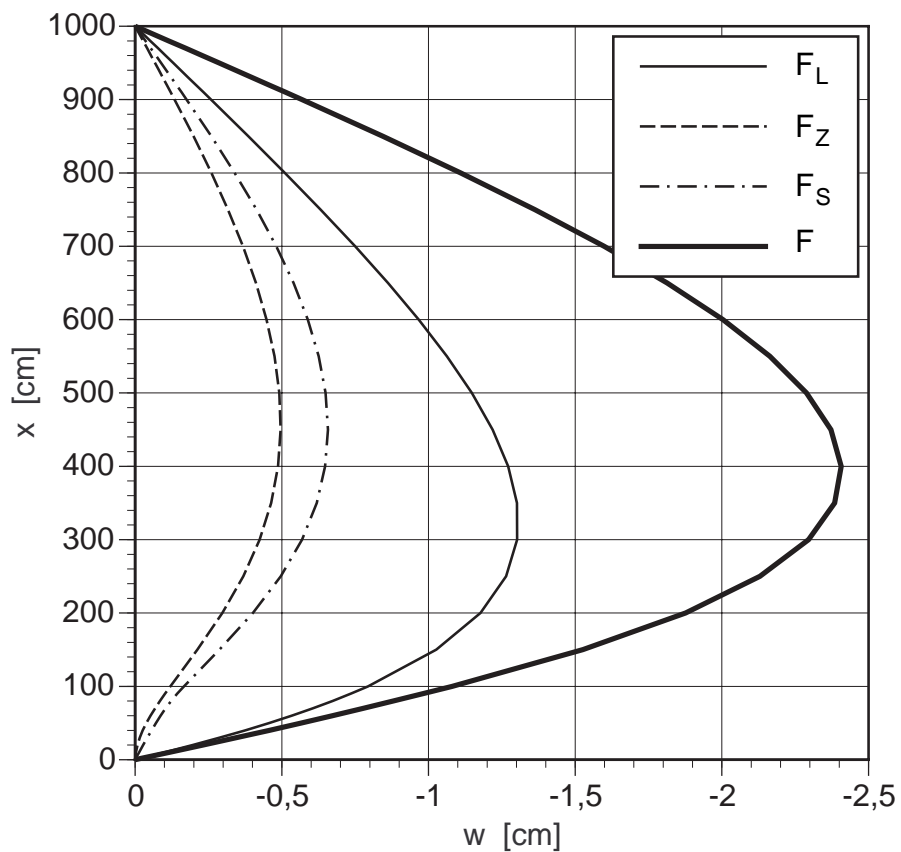


Bild 8-88 Radialverformung der Längssteife für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

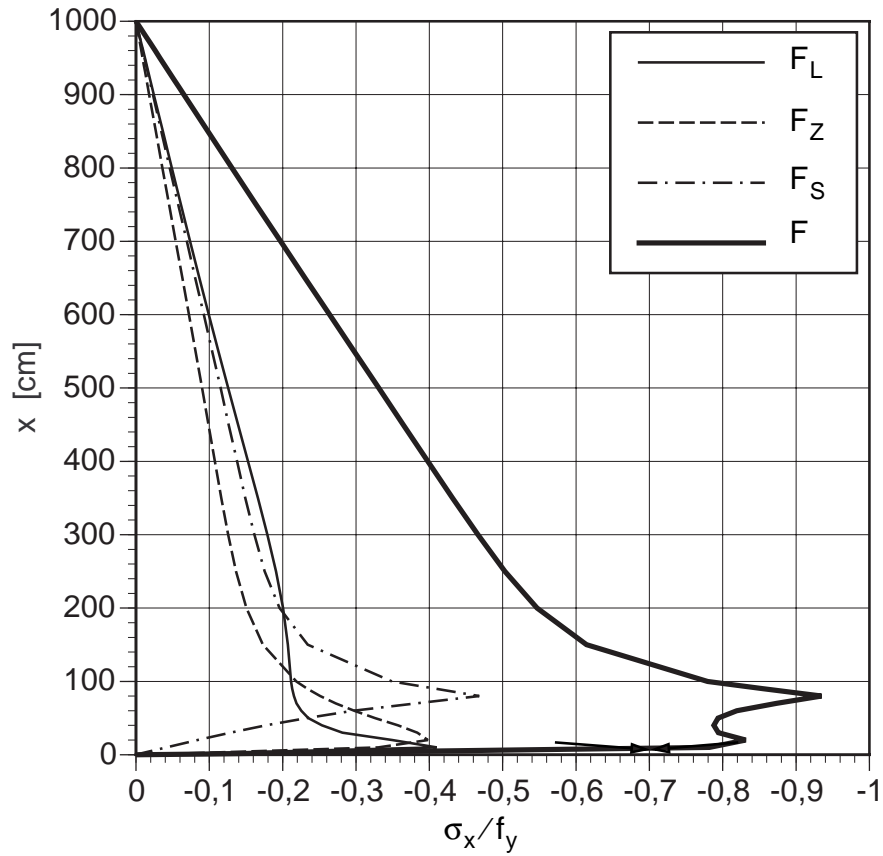


Bild 8-89 Membranaxialspannung in $\Theta = 0^\circ$ für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

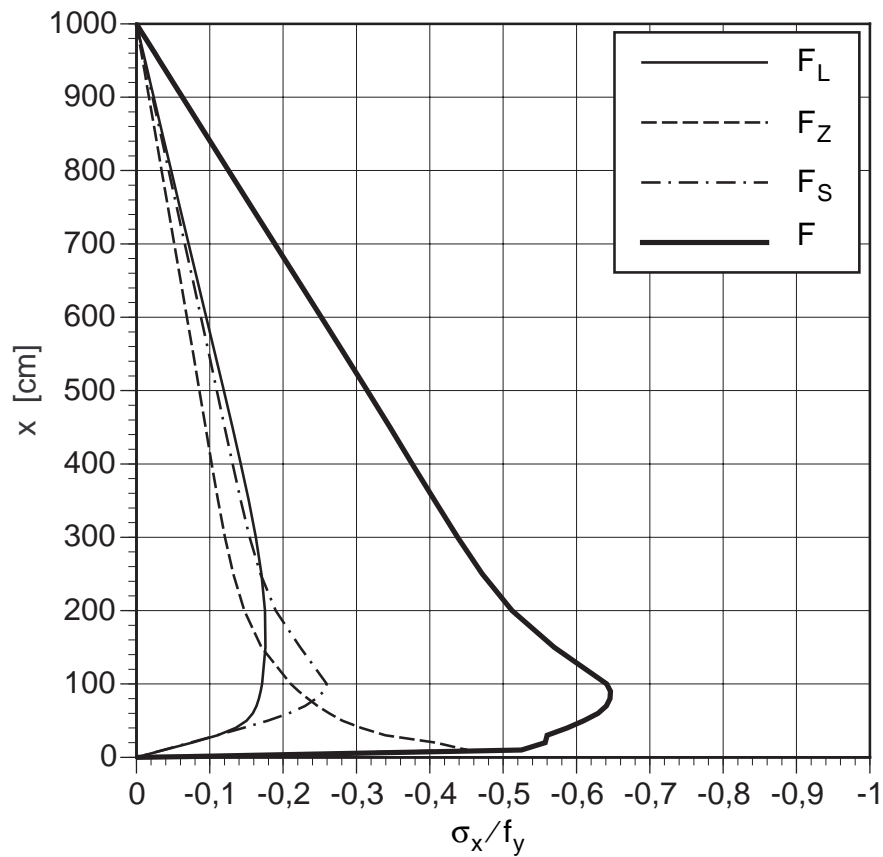


Bild 8-90 Membranaxialspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ (Beulmeridian) für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

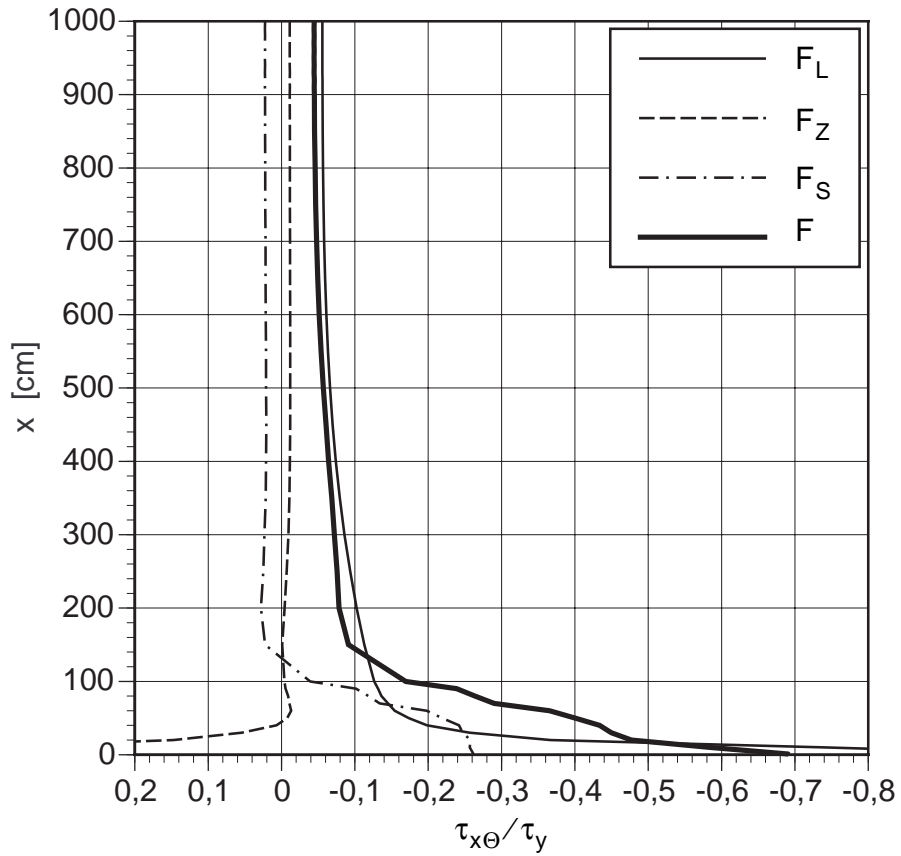


Bild 8-91 Membranschubspannung in $\Theta = 0^\circ$ für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

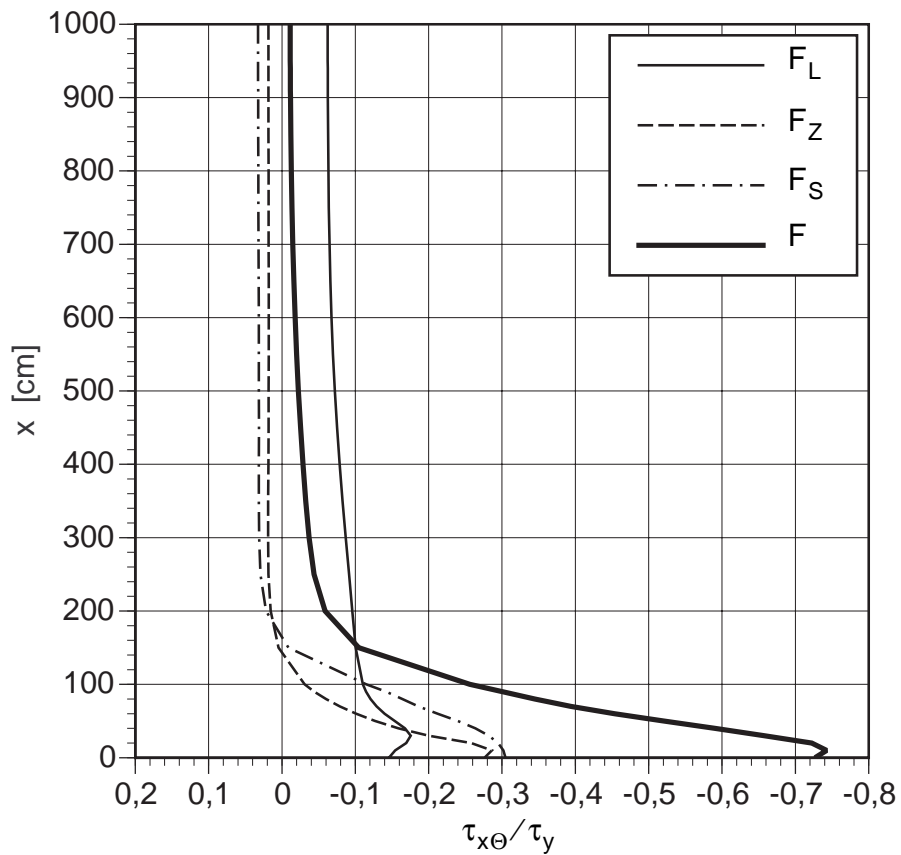


Bild 8-92 Membranschubspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ (Beulmeridian) für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

8.3.2.3 Vertikallastfälle bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten

Die Stabilitätseffekte (Effekte nach Theorie 2. Ordnung) sind im Rechenmodell in Form von Abtriebslasten (Gleichgewicht am verformten System) berücksichtigt. Dabei werden diese sowohl für die Auflagerlängssteife als auch den Zylinderschaft berücksichtigt.

Die Abtriebslasten werden aus folgenden Initialkräften bzw. Initialspannungen für das Anwendungsbeispiel in Tab. 8-14 bestimmt:

- mittlere Normalkraft N_{init} der Längssteife
- mittlere Innendruckbelastung (Umfangsmembrankraft $n_{\Theta, init}$)
- mittlere Axialdruckbelastung (Meridianmembrankraft $n_{x, init}$)

Die Innendruckbelastung ergibt einen Versteifungseffekt (Glättungswirkung) am Schaft-Längssteifen-System, die Axialdruckbelastung bzw. die Normalkräfte der Längssteifen reduzieren die Systemsteifigkeit der Schale bzw. des Schaftes.

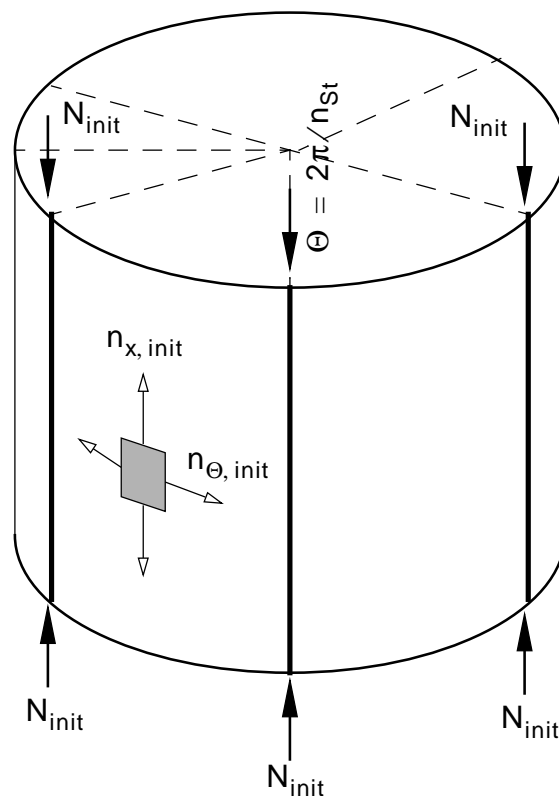


Bild 8-93 Berücksichtigung von Stabilitätseffekten — Initialkräfte bzw. -spannungen in Längssteife und Schale

Tab. 8-14 Berechnung nach Theorie 2. Ordnung — Festlegung der zugrundegelegten Initialkräfte

Lagerkräfte		Variante 1	Variante 2
		HEB 300	HEB 160
Teilauflagerkräfte	F_L	3576	1303
	F_S	1567	
	F_Z	1333	
Gesamtauflagerkraft	$F = F_L + F_S + F_Z$	6476	4203
mittlere Normalkraft der Längssteife	$N_{init} = F_L/2$	1788	651
mittlere Axialmembrankraft	$n_{x, init} = \frac{(F_L + F_S + F_Z)n_{St}}{2R\pi \cdot 2}$	4.12	4.01 \approx 4.12
mittlere Umfangsmembrankraft	$n_{\Theta, init} = \frac{n_{\Theta}}{2} = \frac{\gamma_F \cdot \gamma_H \cdot R}{2}$	6.375	

Ergebnisdarstellung

Das Hauptaugenmerk liegt in den folgenden Untersuchungen auf der Tragfähigkeit der Längssteife. Es werden folgende Ergebnisse für die Auflagerlängssteife dargestellt:

- Querschnittsausnutzung $n + 0,9m$
- Radialverformung w

Dabei erfolgt jeweils der Vergleich mit den bereits bestimmten Ergebnissen nach Theorie 1. Ordnung. Die Bezeichnung der einzelnen Berechnungsergebnisse erfolgt folgendermaßen:

- 1. O. bedeutet ohne Berücksichtigung von Stabilitätseffekten (1. Ordnung)
- $N + n_x$ bedeutet Berücksichtigung der Stabilitätseffekte zufolge N_{init} und $n_{x, init}$
- $N + n_x + n_{\Theta}$ bedeutet Berücksichtigung der Stabilitätseffekte zufolge N_{init} , $n_{x, init}$ und $n_{\Theta, init}$

Ergebnisse

Die größte Beanspruchung der Längssteife bzw. die größten Radialverformungen ergeben sich bei Berücksichtigung der Stabilitätseffekte zufolge der Längssteifennormalkraft N_{init} und der Axialkräfte $n_{x, init}$ der Schale.

Der Innendruck bzw. die zugehörige Umfangszugkraft $n_{\theta, init}$ bewirkt eine Versteifung der Schale, die Längssteife wird entlastet. Dieser versteifende Effekt tritt signifikant bei den Radialverformungen der Längssteife auf, sie betragen ca. 70% bei Variante 1 (HEB 300) bzw. 45% bei Variante 2 (HEB 160) der Radialverformungen nach Theorie 1. Ordnung. Die Zusatzbeanspruchungen von Schale und Längssteife sind dabei nicht berücksichtigt, diese werden in Kap. 8.3.2.4 behandelt.

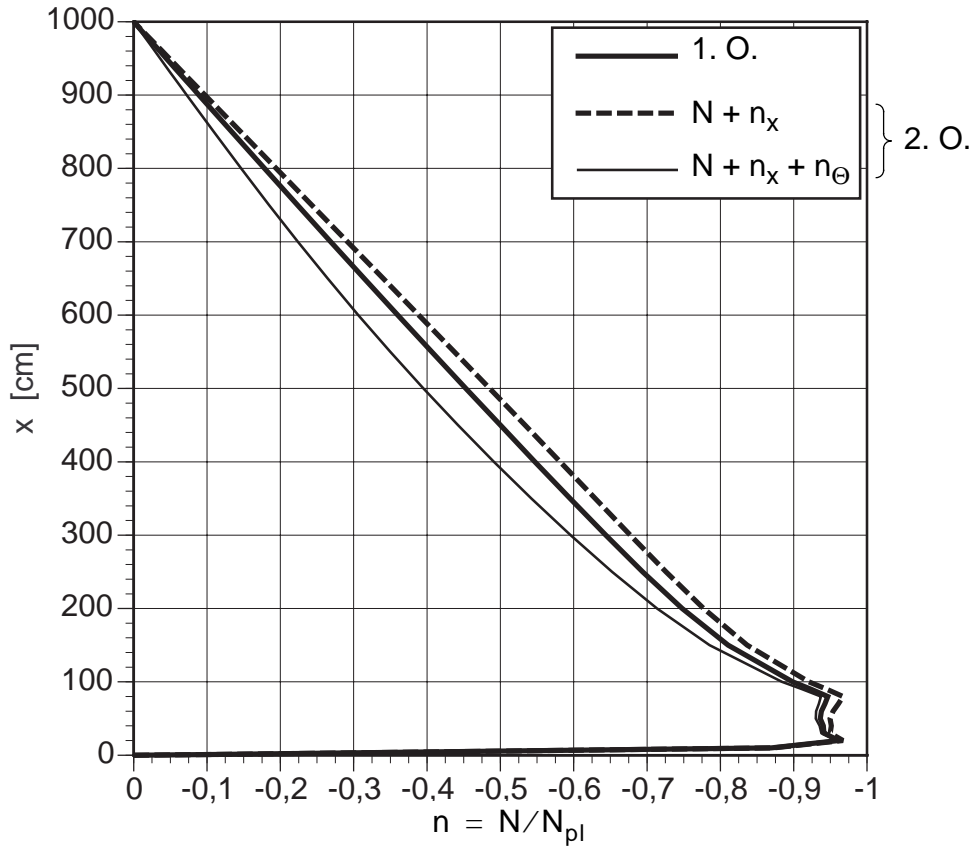


Bild 8-94 Querschnittsausnutzung der Längssteife zufolge Normalkraft N bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

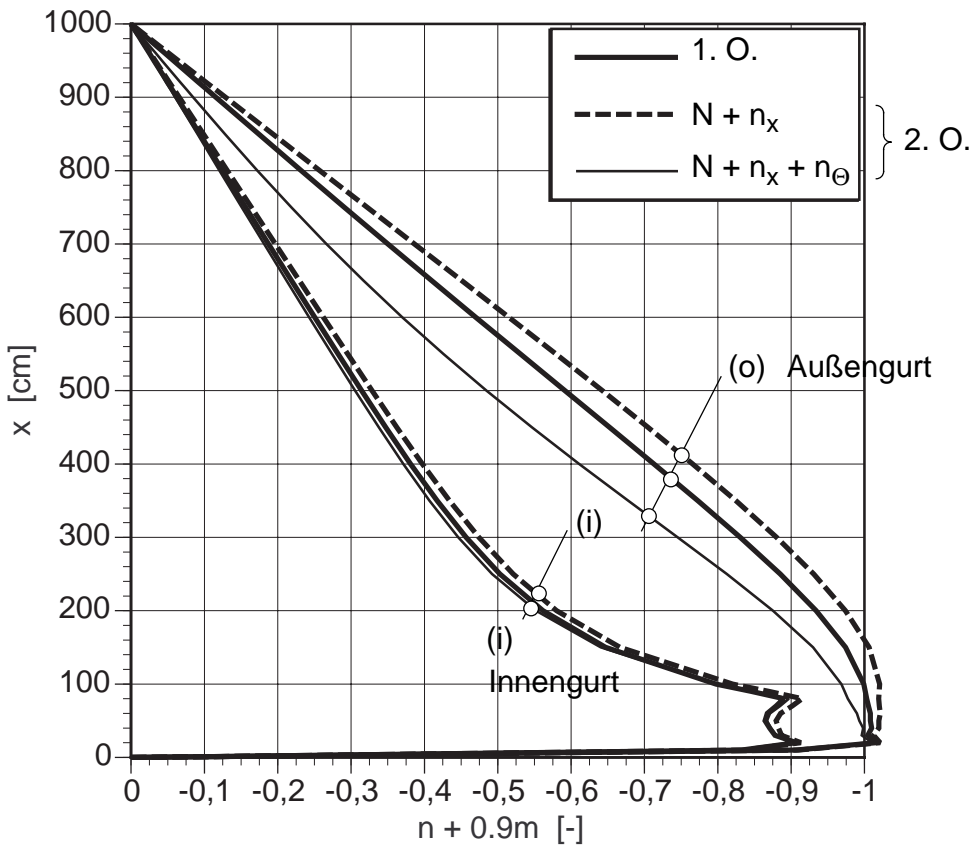


Bild 8-95 Querschnittsausnutzung der Längssteife bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

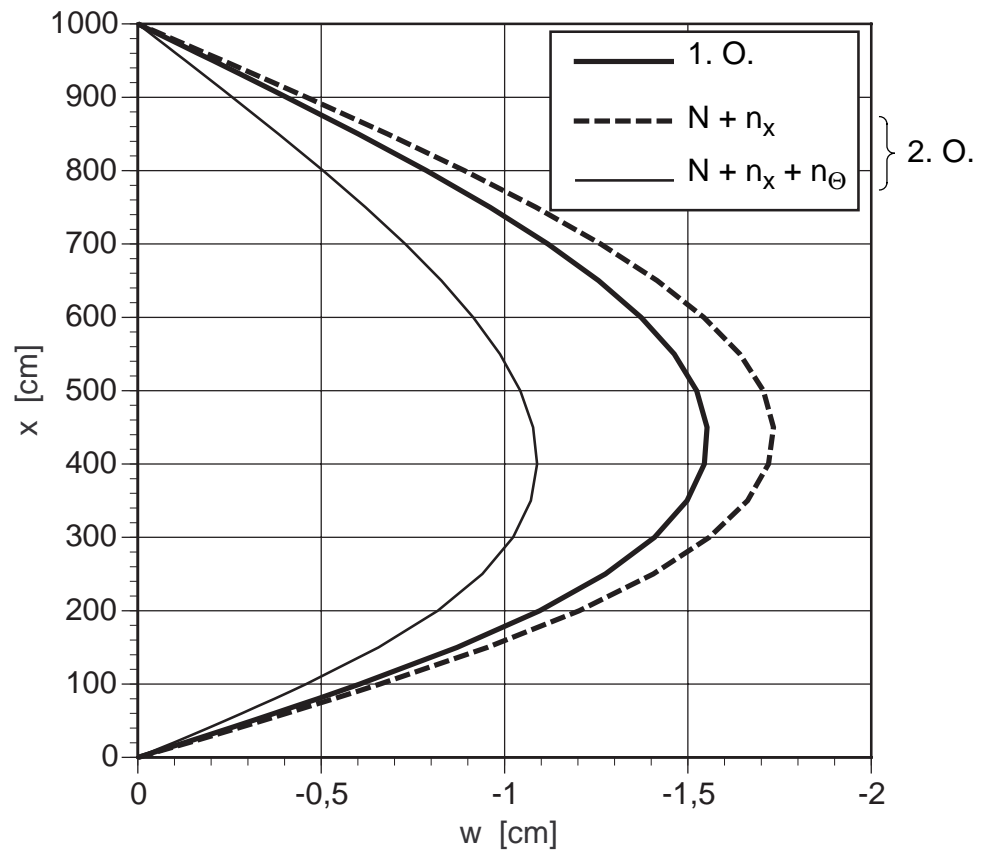


Bild 8-96 Vergleich der Radialverformungen w im Längssteifenmeridian bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

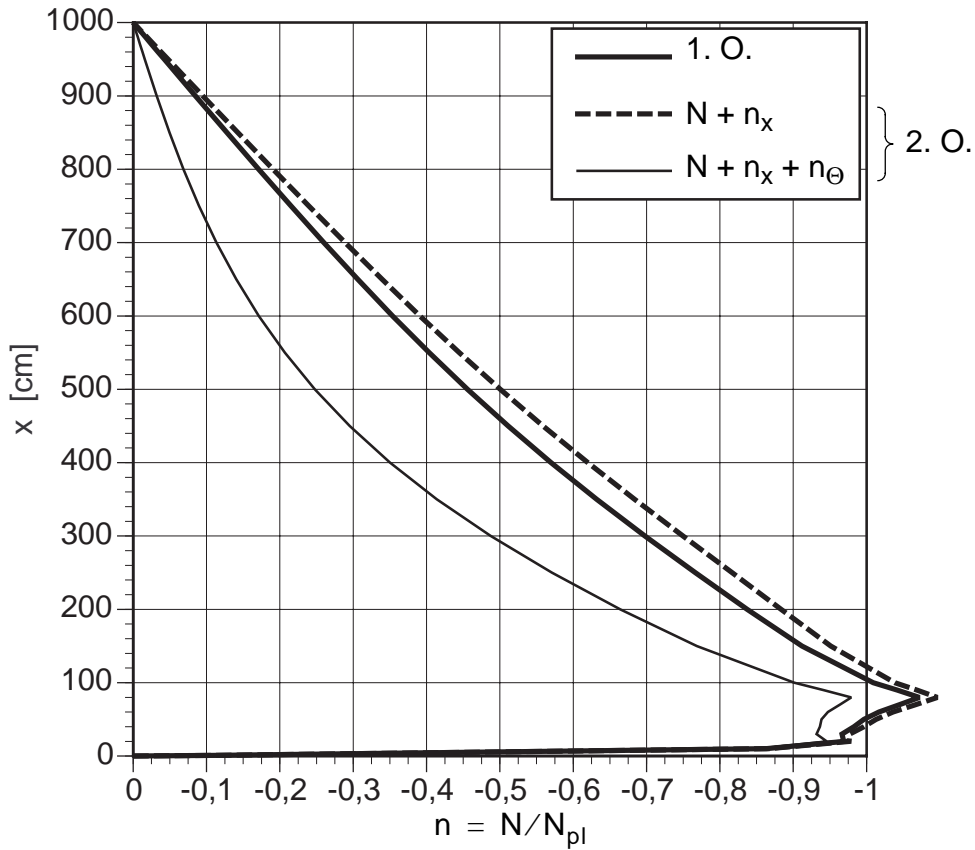


Bild 8-97 Querschnittsausnutzung der Längssteife zufolge Normalkraft N bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

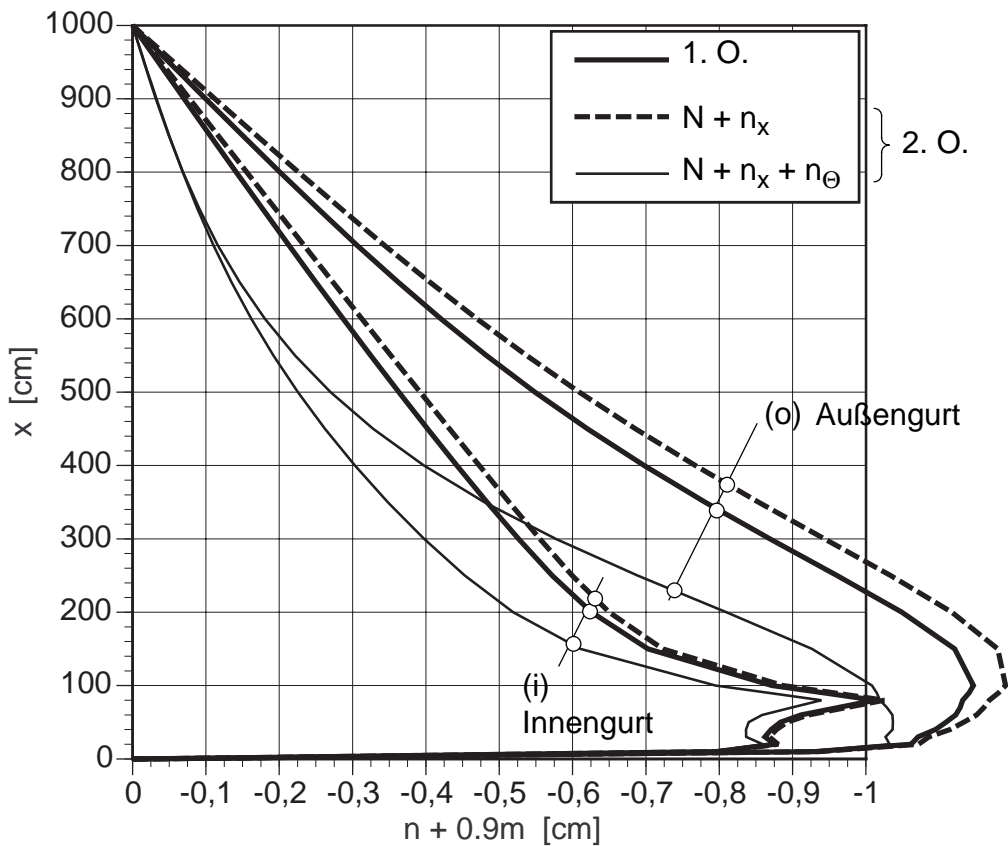


Bild 8-98 Querschnittsausnutzung der Längssteife bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

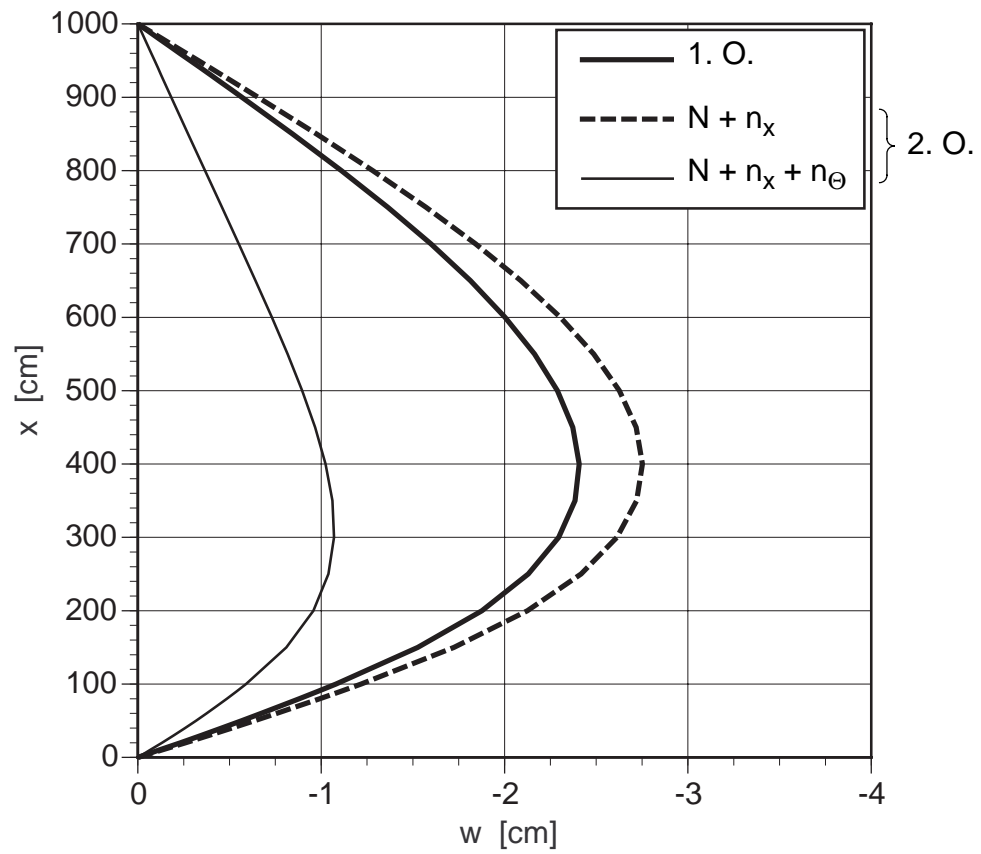


Bild 8-99 Vergleich der Radialverformungen w im Längssteifenmeridian bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

8.3.2.4 Innendruckbelastung

Zusatzbeanspruchungen der Längssteife

Durch das Zusammenwirken von Schale und Längssteife kommt es aus Kompatibilitätsgründen neben den Umfangsbeanspruchungen der Schale zur zusätzlichen Beanspruchung von Schale und Längssteife (Bild 8-100).

Die Kompatibilität zwischen Schale und Längssteife wird primär durch ungleichförmig verteilte Schubkräfte erzielt. In der Längssteife entsteht eine Drucknormalkraft durch die axiale Verkürzung des Gesamtsystems, gegengleich entstehen in der Schale Zugaxialspannungen. Dies zeigt die Gleichgewichtskontrolle in jedem Horizontalschnitt. Aufgrund der fehlenden Axialbelastung müssen die Normalkräfte der Längssteifen und die Summe der Axialkräfte der Schale im Gleichgewicht sein.

Durch die Koppelschubkräfte entsteht einerseits und der wirkenden Radialdruckbelastung andererseits ein positives Biegemoment in der Längssteife. Der qualitative Verlauf von Normalkraft und Moment der Längssteife ist in der nächsten Abbildung dargestellt.

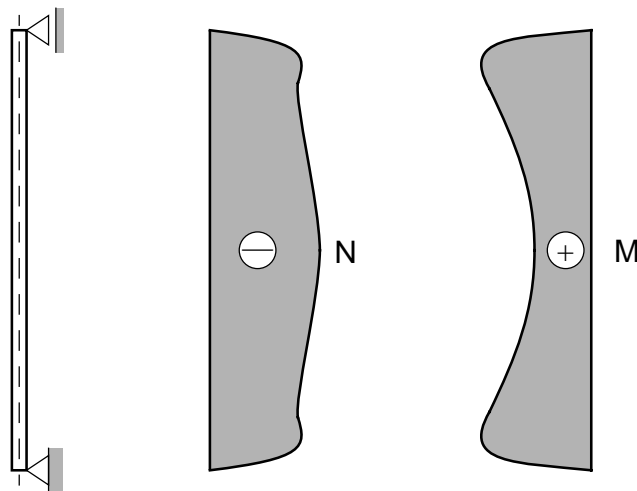


Bild 8-100 Qualitativer Verlauf von Normalkraft und Biegemoment in der Längssteife

Die Zusatzbeanspruchungen bei Berechnung nach Theorie 2. Ordnung sind für beide Längssteifenprofile in Tab. 8-15 dargestellt und mit den Beanspruchungen der Längssteife zufolge der Vertikallastfälle nach Theorie 2. Ordnung überlagert. Maßgebend ist nach wie vor der Außengurt “(o)” der Längssteife.

Spannungsinteraktion im Auflagerbereich

Im unmittelbaren Auflagerbereich überlagern sich die Axial- und Schubspannungen der Lagerkräfte F_Z bzw. F_S mit den Umfangsspannungen σ_Θ der Innendruckbelastung (Bild 8-100). Daraus ergibt sich eine geringere Tragfähigkeit, diese wird durch vereinfachte Bestimmung der Vergleichsspannung im Auflagerbereich mit den Nennspannungen σ_x , τ und σ_Θ bestimmt.

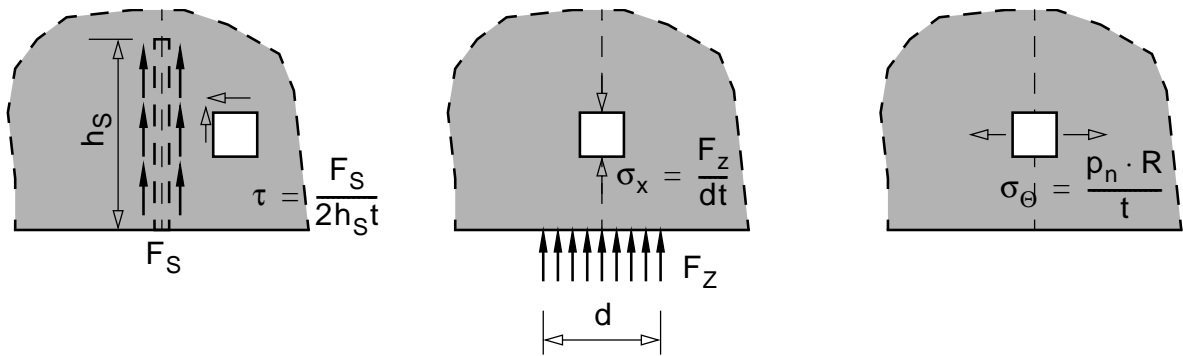


Bild 8-101 Spannungsinteraktion im Auflagerbereich

Die Vergleichsspannung σ_{eq} wird mit den folgenden vorhandenen Spannungen $\sigma_x/f_y = 0,70$, $\tau\sqrt{3}/f_y = 0,70$ und $\sigma_\theta/f_y = 0,266$ in Gl. (8-91a) bestimmt, daraus folgt der Lastfaktor Λ in Gl. (8-91b).

$$\sigma_{eq}/f_y = (\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x \cdot \sigma_\theta + 3\tau^2)^{0,5} / f_y = 1,112 \tag{8-91a}$$

$$\Lambda = f_y / \sigma_{eq} = 0,900 \tag{8-91b}$$

Die Zusatzbeanspruchungen der Auflagerlängssteifen (Beanspruchung des Außengurtes $n + 0,9m$ bzw. des Innengurtes $n - 0,9m$ mit $n = N/N_{pl}$ und $m = M/M_{pl}$) sind in Tab. 8-15 zusammengefaßt und werden mit den Beanspruchungen zufolge der Vertikalbelastung addiert.

Tab. 8-15 Zusatzbeanspruchungen in der Längssteife in $x = 0.10L$

Variante	Zusatzbeanspruchungen zufolge p_n (Berechnung nach 2.Ordnung mit $N + n_x + \theta$)				Superposition mit der Vertikallastbelastung	
	N	M	$n+0.9m$	$n-0.9m$	$n+0.9m$	$n-0.9m$
	[kN]	[kNcm]	(o)	(i)	(o)	(i)
HEB 300 $n_{St} = 4$	-89.58	-1727.0	0.010	-0.0604	-1.0005	-0.9604
HEB 160 $n_{St} = 6$	-33.25	+373.0	0.0140	-0.0650	-1.0227	-0.9995

8.3.2.5 Berücksichtigung von Imperfektionen

Vorkrümmung der Längssteife

Da das Hauptaugenmerk auf die Bestimmung der Tragfähigkeit der Längssteife gerichtet ist, wird als maßgebende Imperfektion eine parabelförmige Vorkrümmung der Längssteife angesetzt. Die Imperfektionsamplitude w_0 wird entsprechend DIN 18000 / Teil 2 (1990) gewählt. Aus der Zuordnung der Längssteifenprofile (HEB 160 bzw. HEB 300) zur Knickspannungslinie "b" ergibt sich w_0 mit $L/250$. Für die linear-elastischen Spannungsberechnungen wird die äquivalente Imperfektionsersatzlast q_z verwendet. Eingangparameter sind die Vorkrümmung und die Längssteifennormalkraft N . Die Normalkraft wird konservativ konstant angenommen und der plastischen Grenzkraft N_{pl} der Längssteife gleichgesetzt. Dies rechtfertigt sich durch die maximal beanspruchte Stelle der Längssteife im unteren Bereich zwischen $0,1 \leq x/L \leq 0,2$ und die in diesem Bereich mit zumindest 90% ausgenützte Normalkrafttragfähigkeit der Längssteife.

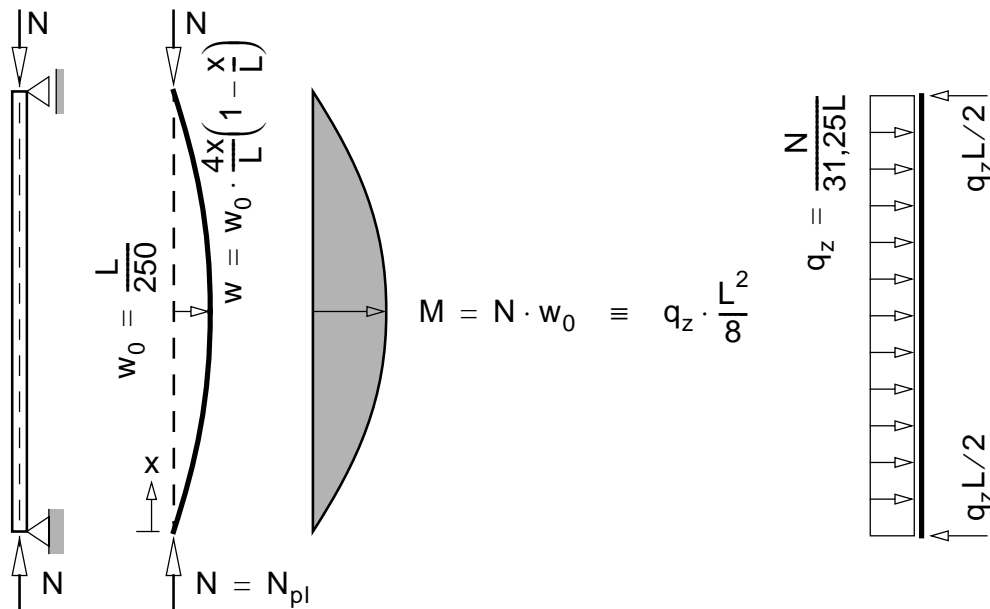


Bild 8-102 Vorkrümmung der Längssteife und zugehörige Imperfektionsersatzlast der Längssteife

Zusatzbeanspruchungen der Längssteife

Der qualitative Verlauf der Schnittkräfte ist in Bild 8-104 dargestellt. Als Grundlage für die vorliegende Beanspruchung der Längssteife gibt das Ersatzmodell des Doppelbalken-Analogiemodelles Aufschluß (siehe Bild 8-103). Das Glied $n = 1$ der Reihenentwicklung gibt den Hauptanteil der Belastung durch die Imperfektionsersatzlast q_z wieder. Das zur nach innen wirkenden Ersatzlast zugehörige Gesamtmoment M am Doppelbalken wird in das Kräftepaar $N_1 = N_2$ und die Einzelmomente M_1 und M_2 der Längssteife bzw. des Schalenersatzbalkens aufgeteilt. Die Aufteilung erfolgt entsprechend den Steifigkeitsverhältnissen von Längssteife und Schalenersatzbalken. In der Längssteife führt dies zu einer Drucknormalkraft und einem negativen Biegemoment: Der Außengurt, der die außenliegende Faser ist, wird gedrückt. Die Schale wird entlastet, sie weist axiale Zugspannungen auf.

Der maßgebende Ort für die Superposition mit den Beanspruchungen aus der Auflagerkrafteinleitung liegt in der Längssteife bei ca. $x = 0.1L$. Die Resultate sind in Tab. 8-16 zusammengefaßt. Für den späteren Vergleich mit nichtlinearen FE-Vergleichsberechnungen wird die Radialverschiebung in $x/L = 0,4$ nach Theorie 2. Ordnung angegeben.

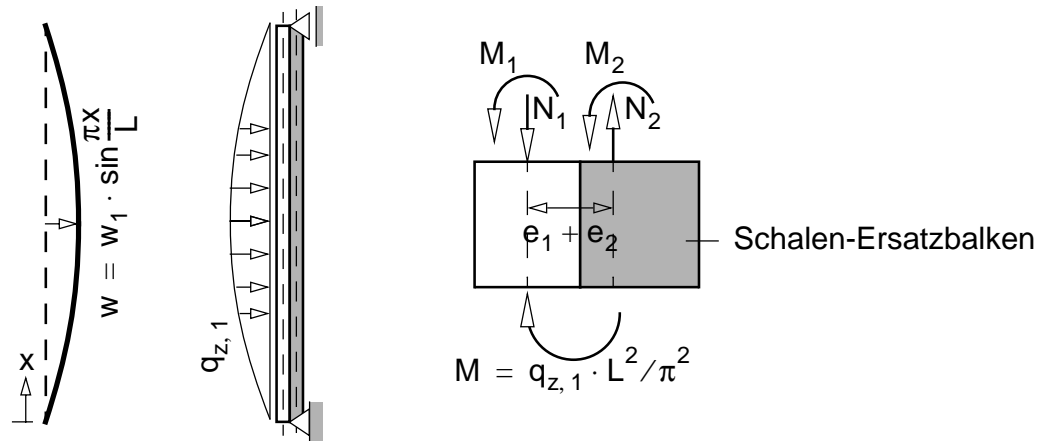


Bild 8-103 Doppelbalken-Analogiemodell — Glied $n = 1$ der Imperfektionsersatzlast

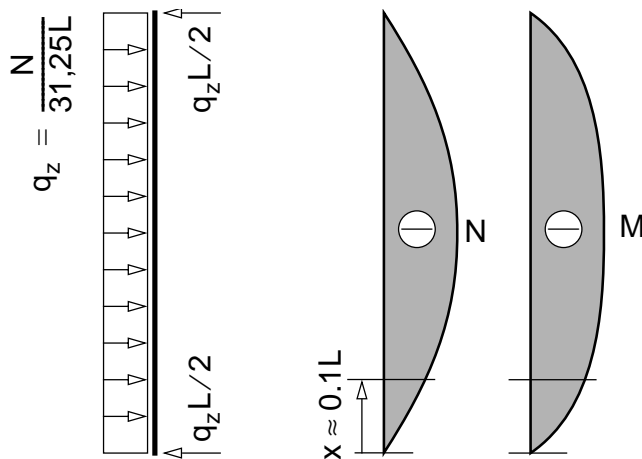


Bild 8-104 Qualitativer Verlauf von Normalkraft und Biegemoment in der Längssteife bei Beanspruchung durch die Imperfektionsersatzlast

Tab. 8-16 Zusatzbeanspruchungen der Längssteife in $x = 0.10L$ zufolge Imperfektionsersatzlast q_z

Variante	N	$q \cdot L$	1.Ordnung			2.Ordnung — $N + n_x$			
			N	M	$n+0.9m$	N	M	$n+0.9m$	w
	[kN]	[kN]	[kN]	[kNcm]	[-]	[kN]	[kNcm]	[-]	[cm]
HEB 300 $n_{St} = 4$	3576	114.4	-112.1	-1420	-0.0598	-124.7	-1569	-0.0663	-0.760
HEB 160 $n_{St} = 6$	1303	41.70	-38.79	-159.6	-0.0467	-43.28	-175.1	-0.0518	-0.633

8.3.2.6 Abschätzung der Tragfähigkeiten der Längssteife

Das elasto-plastische Knicken der Längssteife durch Ausbildung eines Fließgelenkes im Bereich $0,1 \leq x/L \leq 0,2$ stellt den maßgebenden Versagensmodus zur Bestimmung der Tragfähigkeit der Längssteife dar.

Die Tragfähigkeiten, die sich aus den Beanspruchungen der Längssteife (siehe Bild 8-95 und Bild 8-98) ergeben, sind in Tab. 8-17 zusammengestellt.

Zusätzlich sind noch die Tragfähigkeiten, die sich aus der vereinfachten Spannungsinteraktion im Auflagerbereich ergeben, angegeben. Die plastische Tragfähigkeit der Schalenwand weist entsprechend der Festlegung der Teilauflegerkräfte, die zugleich die Referenzbelastung darstellt, einen zugehörigen Lastfaktor $\Lambda = 1,0$ auf.

8.3.2.7 Abschätzung der Tragfähigkeiten der Schale

Die plastische Tragfähigkeiten der Schale mit auftretenden maximalen Spannungskonzentrationen im unmittelbaren Auflagerbereich wird, wie mehrmals erwähnt, nicht vorgenommen. Die zum Teil hohen Schubspannungen werden nicht mit den Axialspannungen der Auflagerkrafteinleitung superponiert:

- Die Tragfähigkeit der Schalenwand weist entsprechend der Annahmen zur Festlegung der Teilauflegerkräfte (=Referenzbelastung) eine plastische Tragfähigkeit mit dem zugehörigen Lastfaktor $\Lambda = 1,0$ auf.
- Wird die Schalenwand zusätzlich durch die Innendruckbelastung beansprucht, so ergibt sich durch die zusätzliche Berücksichtigung der Umfangsspannungen im Auflagerbereich eine plastische Tragfähigkeit mit einem zugehörigen Lastfaktor von $\Lambda = 0,9$ (siehe Kap. 8.3.2.4).

Für die Bestimmung der Beultragfähigkeit der Schale werden die auftretenden Axialspannungen im sogenannten Beulmeridian den realen Beulspannungen der Schale gegenübergestellt. Dies erfolgt im späteren bei den vereinfachten Stabilitätsberechnungen in Kap. 8.3.3.2 für eine weitere Unterteilung in die Teillastfälle.

Die Beultragfähigkeit des Schaftes wird mithilfe des bezogenen Schalenschlankheitsgrades $\bar{\lambda}$ und dem zugehörigen Beulabminderungsfaktor κ für Axialbeulen bestimmt. Die zugehörige Lastfaktor wird im folgenden durch die Gegenüberstellung der Beultragfähigkeit und der maximalen Axialdruckspannung im Beulmeridian bei Berechnung nach Theorie 1. Ordnung bestimmt.

$$\Lambda = \frac{\kappa}{n_x / f_y t} \quad (8-92)$$

Die ideale Axialbeulspannung $\sigma_{x,i}$ und der bezogene Schalenschlankheitsgrad $\bar{\lambda}$ werden entsprechend DIN 18800 / Teil 4 (1990) bzw. EC 3 / Teil 1.6 (1999) bestimmt. In DIN 1800 / Teil 4 wird dieser Abminderungsfaktor mit κ_2 bezeichnet. Die Bestimmung der Beulabminderungsfaktoren erfolgt eingehend in Kap. 8.3.3.2.

Die Tab. 8-17 und Tab. 8-18 zusammengestellten Tragfähigkeiten zeigen, daß der Schaft eine etwas geringere Beultragfähigkeit aufweist.

Der Vergleich der Tragfähigkeiten mit jenen nichtlinearer FE-Berechnungen erfolgt in Kap. 8.3.5.5.

Tab. 8-17 Spannungsbasierte Bestimmung der Tragfähigkeiten der Längssteife

Variante	Berechnungsart	Perfektes Schaft-Längssteifen-System		Imperfektes Schaft-Längssteifen-System	
		Querschnittsausnutzung $n+0.9m$	Lastfaktor Λ	Querschnittsausnutzung $n+0.9m$	Lastfaktor Λ
HEB 300, $n_{St} = 4$	1. O	1.0157	0.985	1.0755	0.930
	2. O — $N + n_x$	1.0215	0.979	1.0878	0.919
	2. O — $N + n_x + n_\Theta$	1.0105 ¹⁾ 1.0005	0.990 ¹⁾ 0.999	—	—
HEB 300, $n_{St} = 6$	1. O	1.1466	0.872	1.1933	0.838
	2. O — $N + n_x$	1.1903	0.840	1.2420	0.805
	2. O — $N + n_x + n_\Theta$	1.0367 ¹⁾ 1.0227	0.965 ¹⁾ 0.978	—	—

¹⁾ ohne Berücksichtigung der Zusatzbeanspruchungen der Längssteife durch die Innendruckbelastung

Tab. 8-18 Schalenbeulen — Abschätzung der Beuleigenwerte und der realen Beultragfähigkeit der Schale auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen

Längssteifenprofil	Druckaxialspannung	Beulabminderungsfaktoren		reale Beultragfähigkeit	
	σ_x/f_y	EC 3	DIN	Λ_{EC3}	Λ_{DIN}
HEB 300, $n_{St} = 4$	0.523	0,359	0,326	0.687	0.624
HEB 160, $n_{St} = 6$	0.646			0.556	0.505

8.3.3 Vereinfachte Stabilitätsberechnungen

Die folgenden vereinfachten Stabilitätsberechnungen behandeln getrennt das Knicken der Längssteife und das Beulen der Zylinderschale.

Im Gegensatz dazu stehen lineare FE-Beulberechnungen, welche als klassische Beuleigenwertberechnungen (CBEV - Classical Buckling Eigenvalue Analysis) bezeichnet werden. Dabei können Schalenbeulen, Knicken der Längssteife oder eine Interaktion der beiden möglichen Beulformen ermittelt werden. Die vereinfachten Stabilitätsberechnungen werden im folgenden auch als approximative Beulberechnungen bezeichnet.

Längssteifenknicken

Die Längssteifenknicklast wird anhand des idealisierten Stabilitätsmodelles von Kap. 8.2.4 berechnet. Dabei wirken die Längssteife und die Schale erst während des Knickens zusammen, die Schale bewirkt durch ihre stützende Wirkung eine Erhöhung der Knicklast der Längssteife.

Schalenbeulen

Das Schalenbeulen - hier vor allem das Axialbeulen - der Zylinderschale wird mithilfe der Spannungsfelder der Schale und der Gegenüberstellung mit der idealen Axialbeulspannung zum Vergleich mit den klassischen Beuleigenwertberechnungen bzw. der realen Beulspannungen die Tragfähigkeit der Schale ermittelt.

Aufteilung der Vertikallastfälle

Den folgenden Untersuchungen liegt für bessere Vergleichsmöglichkeiten mit den vereinfachten Stabilitätsberechnungen eine weitere Aufspaltung in folgenden 3 Lastfälle zugrunde:

- **Lastfall I — entgegengesetzt gerichtete Einzelkräfte**
Dieser Lastfall dient zur Beurteilung des idealisierten Längssteifenknickens.
- **Lastfall II — zentrische Lagerkraft der Längssteife und konstante Wandschubbelastung**
Dieser Lastfall dient zu Vergleichszwecken. Er wird im weiteren bei elasto-plastischen Beulanalysen (GMNA) bzw. bei plastischen Analysen (MNA) zur Untersuchung der plastischen Grenztragfähigkeit der Schale verwendet.
- **Lastfall III — Gemeinsames Wirken der 3 Teillagerkräfte und konstante Wandschubbelastung**
Dieser Lastfall stellt die aktuelle Vertikalbelastung des vorliegenden Anwendungsbeispiels dar.

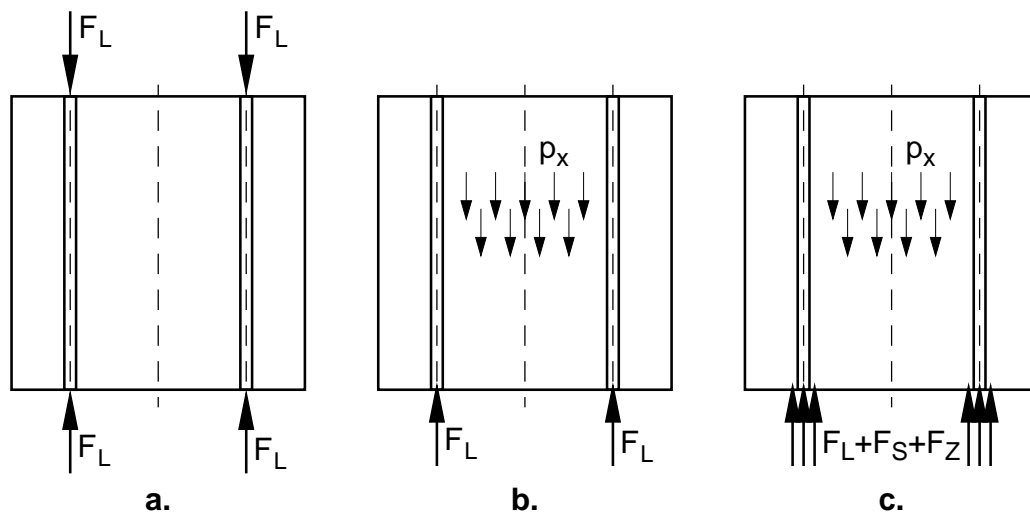


Bild 8-105 Untersuchte Lastfälle —

- a. Lastfall I — entgegengesetzt gerichtete Einzelkräfte in der Längssteife,
- b. Lastfall II — Lagerkraft F_L der Längssteife und Wandschubbelastung bzw.
- c. Lastfall III — Lagerkräfte F_L , F_S und F_Z und Wandschubbelastung

8.3.3.1 Längssteifenknicken

Die Bestimmung der idealen Knicklast der Längssteife erfolgt unter der idealisierten Annahme, daß die Zylinderschale erst im Verzweigungszustand eine Stützung der Längssteife bewirkt. Im Vorbeulzustand ergibt sich keine wechselseitige Kraftwirkung zwischen Längssteife und Schale. Die theoretische Aufbereitung erfolgte bereits in Kap. 8.2.4 am Ersatzmodell des elastischen Verbundbalkenmodelles.

Im folgenden werden bestimmt:

- Die Knicklast in Abhängigkeit unterschiedlicher (variabler) Initialspannungen in Axial- bzw. Umfangsrichtung für beide Varianten (Längssteifenprofile HEB 300 oder HEB 160) des Anwendungsbeispiels.
- Die Querschnittswerte des Schalenersatzbalkens des Verbundbalkenmodelles.
- Die Längssteifenknicklast für beide Varianten des Anwendungsbeispiels bei Berücksichtigung der zur Gesamtbelastung zugehörigen Axial- bzw. Umfangsinitialspannungen.

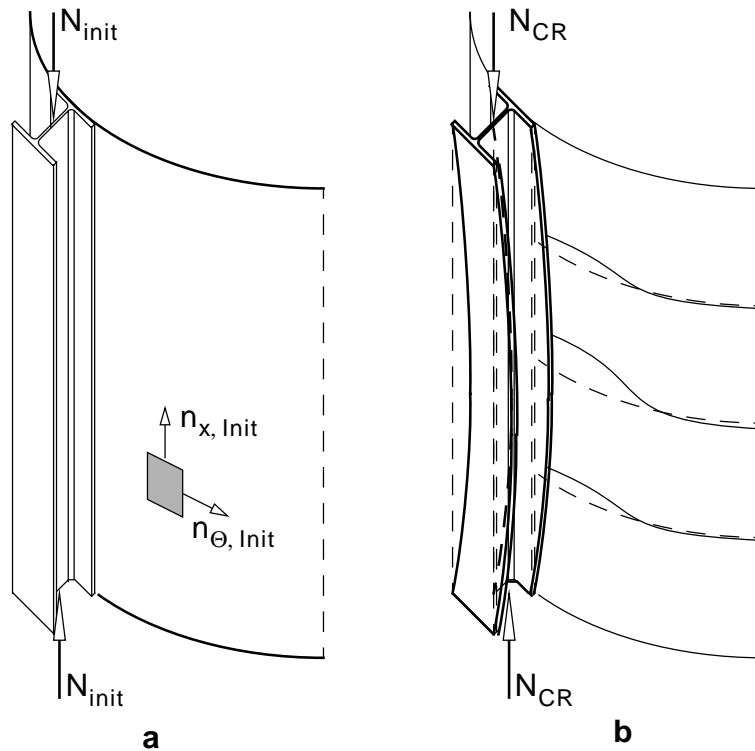


Bild 8-106 Transversales Knicken der Längssteife —
a. Vorbeulzustand und **b.** differenziell benachbarter Verzweigungszustand (Knickform)

Einfluß der Effekte Theorie 2. Ordnung der Schale

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt für beide Varianten — HEB 300 und $n_{St} = 4$ bzw. HEB 160 und $n_{St} = 6$. Dabei wird der begünstigende Einfluß von Umfangszugspannungen $\sigma_{\theta, init}$ und der abmindernde Einfluß von Axialdruckspannungen $\sigma_{x, init}$ berücksichtigt. Die Knicklasten sind in der Ergebnisdarstellung auf die Knicklast $N_{CR, 1}$ der isolierten Stütze bezogen.

Die Knicklast steigt in Abhängigkeit des Profiles der Längssteife unterschiedlich an, die Erhöhung ist durch die stützende Wirkung der Schale erwartungsgemäß für das kleinere Längssteifenprofil entsprechend der wirksamen Gurtverstärkung der Längssteife durch die Schale höher (siehe Bild 8-107 bis Bild 8-110).

Knicklasten für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300

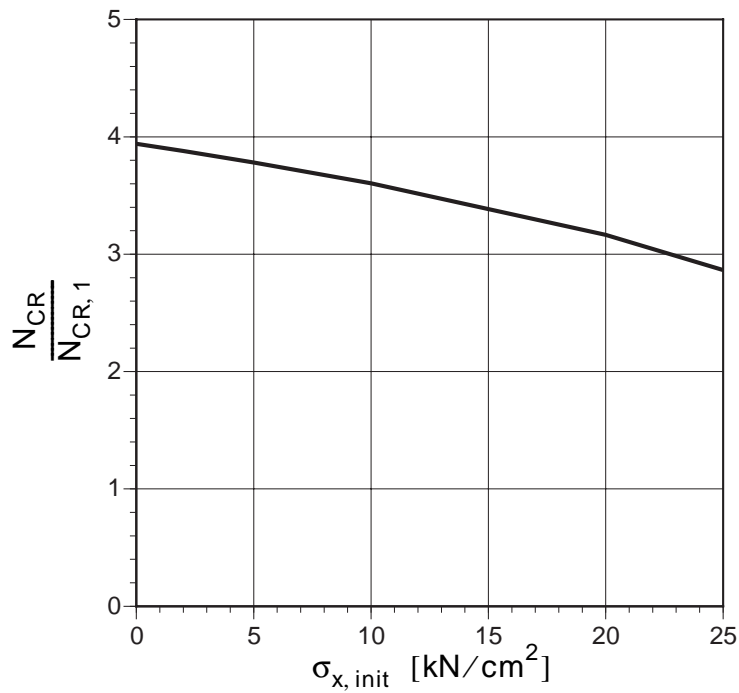


Bild 8-107 Knicklast der Längssteife in Abhängigkeit der Axialspannung $\sigma_{x,init}$ und bei $\sigma_{\Theta,init} = 0$ für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

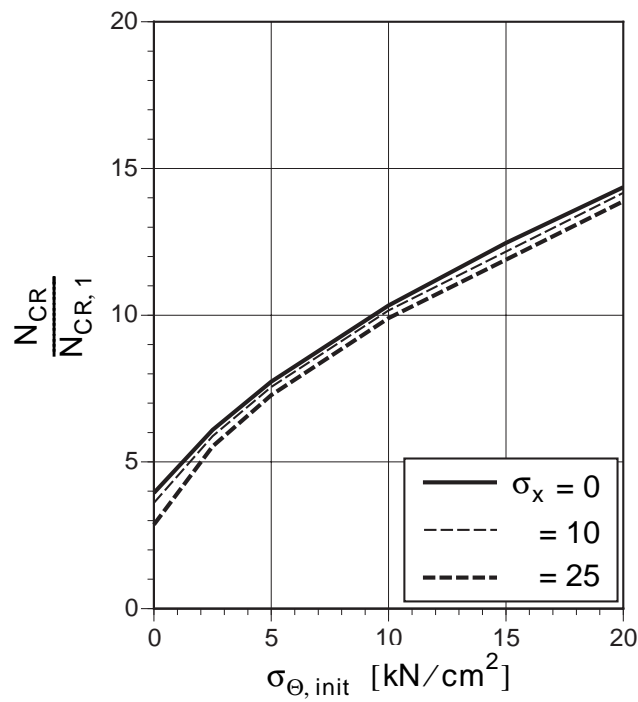


Bild 8-108 Knicklast der Längssteife in Abhängigkeit von $\sigma_{\Theta,init}$ und bei $\sigma_{x,init} = 0/10/25$ kN/cm² für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

Knicklasten für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160

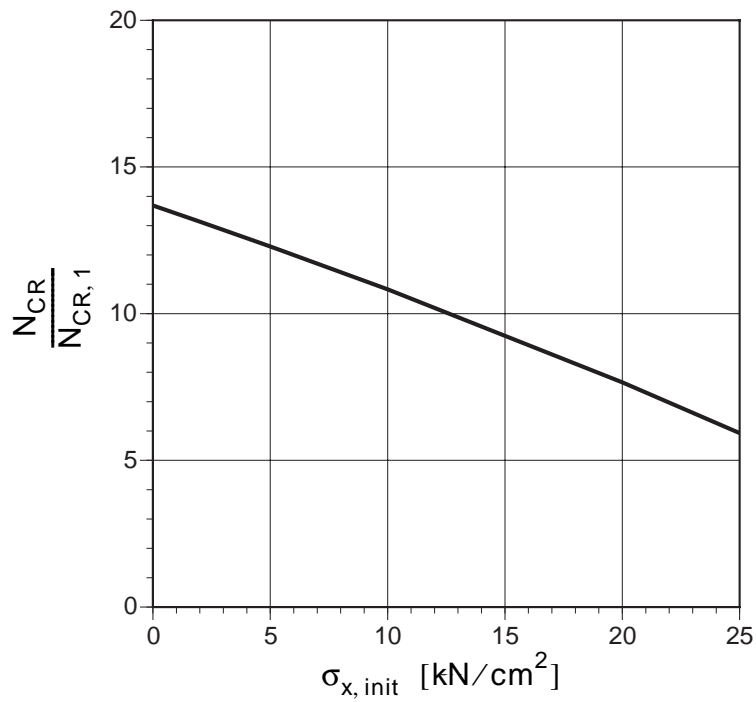


Bild 8-109 Knicklast der Längssteife in Abhängigkeit der Axialspannung $\sigma_{x, \text{init}}$ und bei $\sigma_{\theta, \text{init}} = 0$ für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

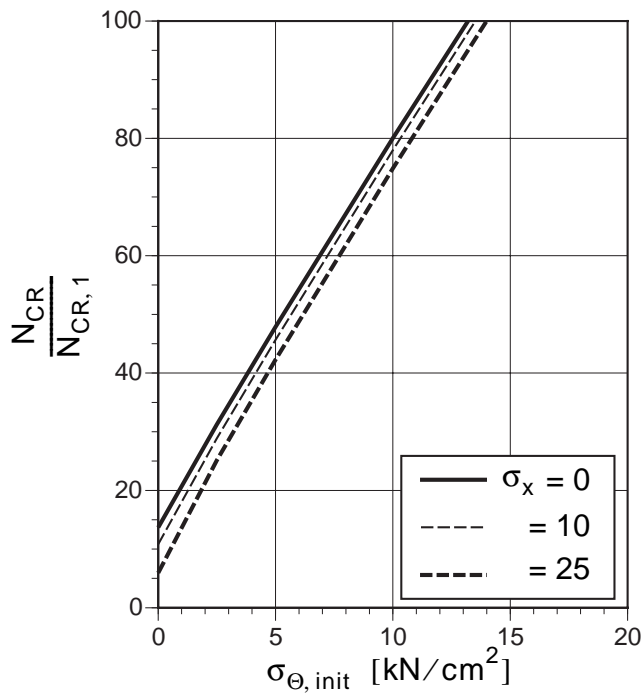


Bild 8-110 Knicklast der Längssteife in Abhängigkeit von $\sigma_{\theta, \text{init}}$ und bei $\sigma_{x, \text{init}} = 0/10/25 \text{ kN/cm}^2$ für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

Doppelbalkenanalogiemodell

In Bild 8-111 ist der Gesamtquerschnitt des Doppelbalkens dargestellt. Der Querschnitt des Ersatzbalkens ist als T-Querschnitt gewählt.

Die Umfangsspannung $\sigma_{\Theta, \text{init}}$ bewirkt eine Erhöhung der Schalensteifigkeit. Mit steigender Umfangsspannung nehmen alle Querschnittsparameter des Ersatzbalkens zu.

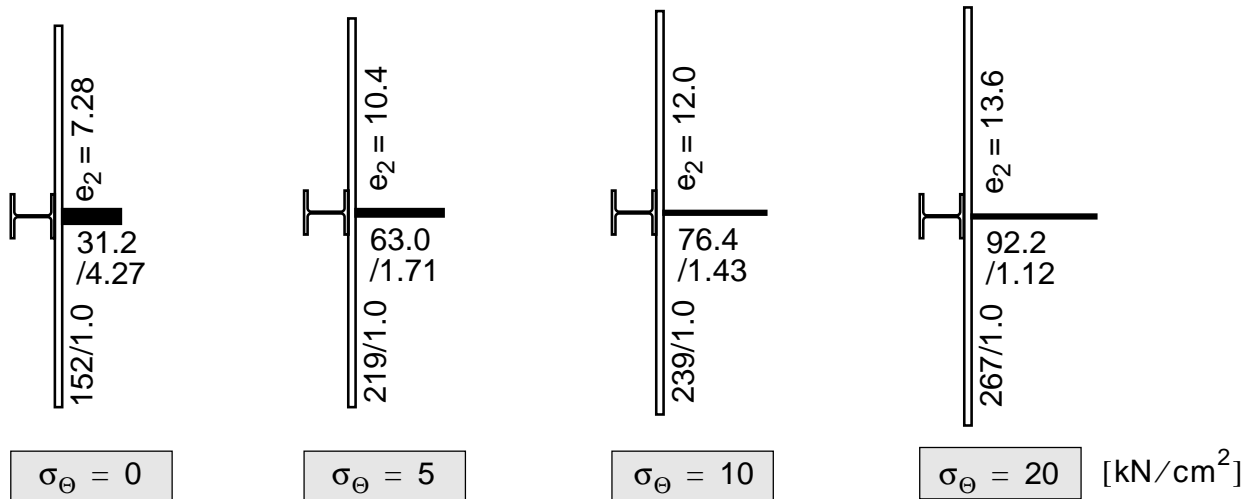


Bild 8-111 Ersatzbalken für $R/t = 500$, $L/R = 2$ und $n_{St} = 4$ in Abhängigkeit der Umfangsspannung $\sigma_{\Theta, \text{init}}$

Bestimmung der Längssteifenknicklast

Die Festlegung der Längssteifenknicklast erfolgt zur Erfassung allfällig wirkender Axialspannungen in zwei Etappen. Der begünstigende Einfluß von Umfangszugspannungen wird vorerst nicht berücksichtigt.

Für die Beurteilung der Stabilität der Längssteife werden somit eine untere bzw. obere Knicklast angegeben. Der obere Wert der Knicklast wird ausgehend von der unbelasteten Schale — die Axialspannungen sind Null ($\sigma_x = 0$) — bestimmt. Aus der erhaltenen Längssteifenknicklast wird eine mittlere Axialspannung entsprechend Gl. (8-93) bestimmt, basierend darauf wird der untere Wert der Längssteifenknicklast berechnet.

$$\sigma_{x, \text{init}} = \frac{N_{CR(\sigma_x = 0)}}{2R\pi \cdot t} \quad (8-93)$$

Mithilfe der Längssteifenknicklast N_{CR} kann der bezogene Schlankheitsgrad $\bar{\lambda} = \sqrt{N_{pl}/N_{CR}}$ und der Knickabminderungsfaktor κ der Längssteife ermittelt werden. Entsprechend der Knicklast wird auch hier eine obere und untere Schranke angegeben.

Der Bezug der Knicklast N_{CR} auf die Referenzlast F_{Ref} dient zur Bestimmung des Knickeigenwertes $\Lambda_{EV} = N_{CR}/F_{Ref}$ und der späteren Gegenüberstellung mit den linearen FE-Vergleichsberechnungen (klassische Beuleigenwertberechnungen).

Tab. 8-19 Bestimmung der Längssteifenknicklast

Variante	$N_{CR,1}$	$\sigma_{x,init}$	$\sigma_{\theta,init}$	$\frac{N_{CR}}{N_{CR,1}}$	N_{CR}	$\bar{\lambda}$	κ	F_{Ref}	Λ_{EV}
	[kN]	[kN/cm ²]		—	[kN]	—	—	[kN]	—
HEB 300 $n_{St} = 4$	5217	0.0	0.0	3.94	20560	0.417	0.920	3576	4.18
		25.0	0.0	2.86	14943	0.489	0.890		5.75
HEB 160 $n_{St} = 6$	516	0.0	0.0	13.7	7064	0.429	0.910	1303	3.86
		13.5	0.0	9.76	5037	0.509	0.880		5.42

Tatsächlicher Verlauf der Normalkraft

Am realen Schaft-Längssteifen-System kommt es bedingt durch das Zusammenwirken von Schaft und Längssteife zur Umlagerung der Längssteifennormalkraft. Der Verlauf weist eine Veränderlichkeit auf, dies bewirkt ein Ansteigen der Längssteifenknicklast gegenüber dem idealisierten Modell. Für Lastfall II und III sind die Normalkraftverläufe in Kap. 8.3.2.2 dargestellt. Für Lastfall I sind für beide Längssteifenprofile — HEB 300 bzw. HEB 160 — die Verläufe in Bild 8-112 dargestellt. Beim kleineren Längssteifenprofil — HEB 160 — kommt es erwartungsgemäß zu einem stärkeren Umlagerungseffekt zwischen Schaft und Längssteife.

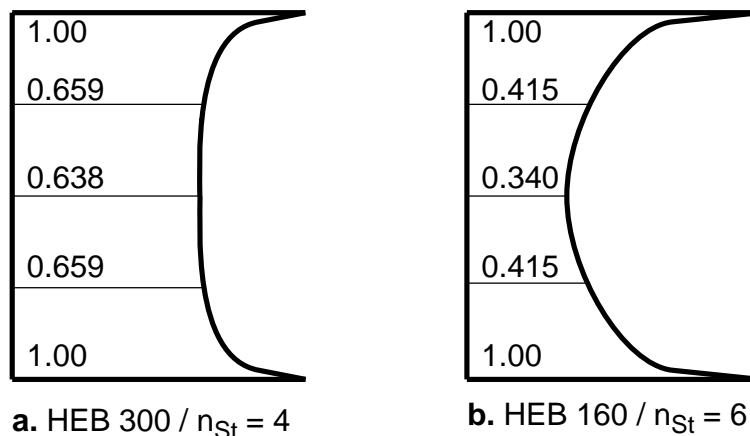


Bild 8-112 Normalkraftverläufe in der Längssteife bei Lastfall I

Bestimmung der Tragfähigkeit der Längssteife (Biegeknicknachweis der Längssteife)

Zugehörig zu den Knicklasten N_{CR} der Längssteife könnte die Tragfähigkeit der Längssteife aufbauend auf den Formeln für den Biegeknicknachweis (z.B. DIN 18800 (1990)) bestimmt werden:

$$\frac{N}{\kappa N_{pl}} + k_y \frac{M}{M_{pl}} \leq 1 \quad (8-94)$$

Die Bestimmung des Interaktionsbeiwertes k_y basiert auf der Momentenverteilung und der bezogenen Normalkraftbeanspruchung $N/\kappa N_{pl}$. Die Anwendung der Biegeknickformel wird aufgrund der vorliegenden, ungleichförmig verteilten Normalkraft und der nicht genau erfaßbaren Momentenverteilung nicht vorgenommen. Durch die linear-elastische Berechnung mit Berücksichtigung von Stabilitätseffekten und Imperfektionen wird anhand des Berechnungsmodelles die reale Tragfähigkeit der Längssteife ohnedies zutreffend bestimmt.

8.3.3.2 Schalenbeulen

Die Beurteilung des Schalenbeulens auf Basis der linearen Spannungsberechnungen wird hinsichtlich der zwei folgenden Gesichtspunkte vorgenommen:

- Abschätzung der idealen Verzweigungslasten, sprich Voraussage der Beuleigenwerte der im späteren durchgeführten klassischen Beuleigenwertberechnungen (CBEV - Classical Buckling-Eigenvalue-Analysis)
- Abschätzung der realen Beultragfähigkeit entsprechend Kap. 8.3.2.7 für den späteren Vergleich mit geometrisch und materiell nichtlinearen Beulberechnungen (GMNA)

Bestimmung des Beuleigenwertes

Die Voraussage des Beuleigenwertes basiert auf den vorhandenen Axialspannungen im Beulmeridian. Die Höhe des Beuleigenwertes ergibt sich durch Vergleich mit der idealen Axialbeulspannung $\sigma_{x,i}$:

$$\Lambda_{EV} = \frac{\sigma_{x,i}/f_y}{n_x/f_y t} \quad (8-95)$$

Bestimmung der realen Beultragfähigkeit

Die reale Beultragfähigkeit wird mithilfe des bezogenen Schalenschlankheitsgrad $\bar{\lambda}$ und dem zugehörigen Beulabminderungsfaktor κ für Axialbeulen bestimmt. Die zugehörige Lastfaktor wird im folgenden durch die Gegenüberstellung der Beultragfähigkeit und der maximalen Axialdruckspannung im Beulmeridian bestimmt.

$$\Lambda = \frac{\kappa}{n_x/f_y t} \quad (8-96)$$

Die ideale Axialbeulspannung $\sigma_{x,i}$ und der bezogene Schalenschlankheitsgrad $\bar{\lambda}$ werden entsprechend DIN 18800 – Teil 4 (1990) bzw. Eurocode 3 – Teil 1.6 (1999) bestimmt. In DIN 18800 – Teil 4 wird dieser Abminderungsfaktor mit κ_2 bezeichnet. Der Abminderungsfaktor κ_{EC3} nach Eurocode 3 – Teil 1.6 wird über den elastischen Beulabminderungsfaktor α , dem Spannungsverteilungsfaktor ψ und dem zur Herstellungsgenauigkeitsklasse A zugehörigen Faktor Q bestimmt. Der Faktor ψ wird für konstante Axialdruckspannung mit $\psi = 1$ eingesetzt, da nicht wie in Eurocode 3 – Teil 1.6 die maximale Druckspannung entlang eines Horizontalschnittes, sondern die Axialspannung im Beulmeridian als Bezugsgröße verwendet wird.

$$\sigma_{x,i} = 0,605 \cdot E \cdot t/R$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{f_y/\sigma_{x,i}}$$
(8-97)

Die Beulabminderungsfaktoren nehmen folgende Größenwerte ein:

$$\kappa_{EC3} = 0,359 \text{ (EC 3)}$$
(8-98a)

$$\kappa_2 = 0,326 \text{ (DIN)}$$
(8-98b)

In der nächsten Tabelle sind die Ergebnisse — die maßgebenden Axialspannungen des Beulmeridians entsprechend Bild 8-82 und Bild 8-90, die approximativ bestimmten Beuleigenwerte bzw. die Beultragfähigkeit der Schalenwand — für alle 3 Lastfälle zusammengefaßt.

Die realen Beultragfähigkeiten des Schaftes wurden bereits in Tab. 8-18 für Lastfall III dargestellt.

Tab. 8-20 Schalenbeulen — Approximative Bestimmung der Beuleigenwerte und der realen Beultragfähigkeit der Schale auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen

Längs- steifen- profil	Lastfall	F _{Ref} [kN]	Druckaxial- spannung	Beul- eigenwert	reale Beultragfähigkeit	
			σ_x/f_y	Λ_{EV}	Λ_{EC3}	Λ_{DIN}
HEB 300 $n_{St} = 4$	I	3576	0.289	3.66	1.244	1.129
	II	3576	0.213	4.98	1.687	1.532
	III	6476	0.523	2.02	0.687	0.624
HEB 160 $n_{St} = 6$	I	1303	0.238	4.44	1.510	1.371
	II	1303	0.176	6.02	2.042	1.854
	III	4203	0.646	1.64	0.556	0.505

8.3.4 FE-Beulberechnung — lineare Beuleigenwertberechnung

Die linearen FE-Beulberechnungen (klassische Beuleigenwertberechnungen) erfolgen an einem 1/8- bzw. 1/12-Rechenmodell des Gesamtsystemes mit symmetrischen Randbedingungen. Dabei werden nur Eigenwerte zugehörig zu den angenommenen Symmetrieebenen in den Längssteifen- und Schalenmittenmeridianen berechnet. Ein möglicher Wechsel der Randbedingungen im Zuge der Beulanalyse, um auch antimetrische Beulmuster zu erhalten, wird nicht vorgenommen.

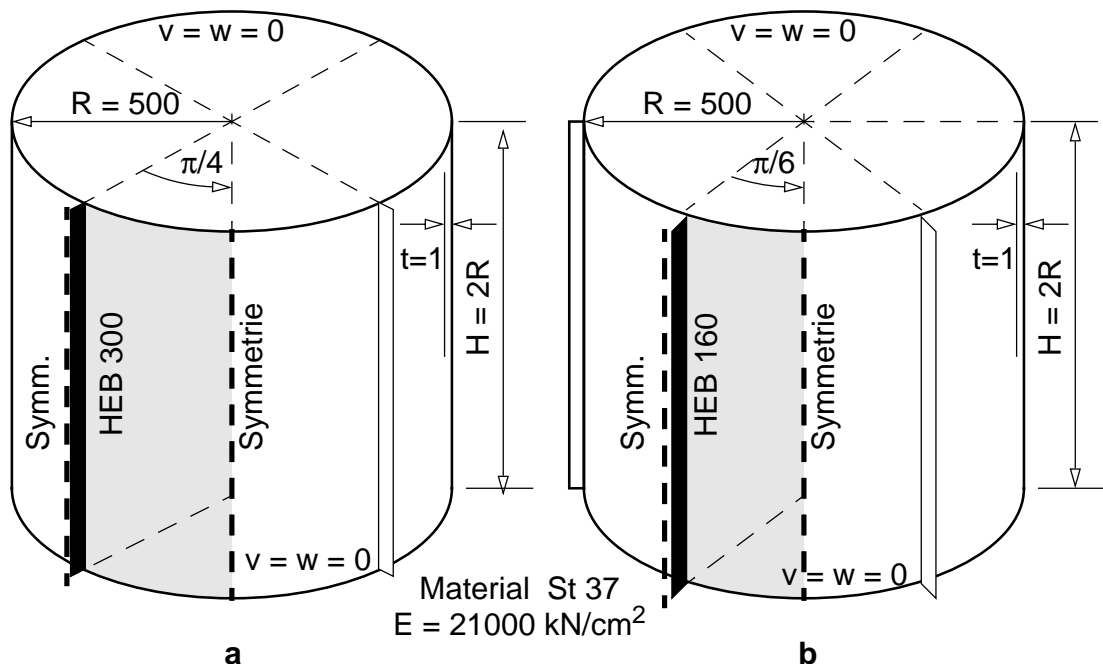


Bild 8-113 Berechnungsmodell für **a.** Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$ und **b.** Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

Die Resultate sind nach der Darstellung der Beulformen der klassischen Beuleigenwertberechnungen in der nachfolgenden Tabelle (Tab. 8-21) zusammengefasst. Neben den Eigenwerten ist auch die Art des Beulmusters - liegt Schalenbeulen (SB), Knicken der Stütze (LK) oder eine Interaktion (LK +SB) beider vor - angegeben.

Zu Vergleichszwecken sind nochmals die Resultate der vereinfachten Stabilitätsberechnungen bei idealisierter Berechnung des Längssteifenknickens bzw. der vereinfachten Beurteilung der Axialbeulung der Schalenwand aufgelistet.

8.3.4.1 Darstellung der Beulversagensformen

Die Darstellung der Resultate erfolgt für beide Längssteifenprofile. Dabei sind zu den in Tab. 8-20 angegebenen Beuleigenwerten die zugehörigen Beulformen dargestellt. Die ersten Beuleigenwerte repräsentieren durchwegs lokale Beulmuster, erst die höheren Eigenwerte können dem globalen Längssteifenknicken bzw. dem Auftreten von globalen und lokalen Beulformen zugeordnet werden.

Die lokalen Schalenbeulmuster bei Lastfall I treten neben dem Längssteifenmeridian über nahezu die gesamte Schalenhöhe auf. Sie stellen Axialbeulmuster dar. Für die Längssteife HEB 300 liegt der Eigenwert des reinen Längssteifenknicken über jenem, des kombinierten Beulens.

Bei Lastfall II und III treten primär Axialbeulen im Auflagerbereich auf. Bei den höheren Beuleigenwerten ist bei der Längssteife HEB 300 (Variante 1) eine Interaktion von globalem Längssteifenknicken mit Schubbeulen im oberen Bereich der Schale gegeben. Bei Lastfall III tritt gleichzeitig Axialbeulen im unteren Bereich und Schubbeulen im oberen Bereich der Schale auf.

Bei Längssteife HEB 160 (Variante 2) treten ausgeprägte Schubbeulen nicht auf, vielmehr ergibt sich ein gemischtes Axial-Schubbeulmuster im unteren Schalenbereich.

Beulformen für Variante 1 — HEB 300

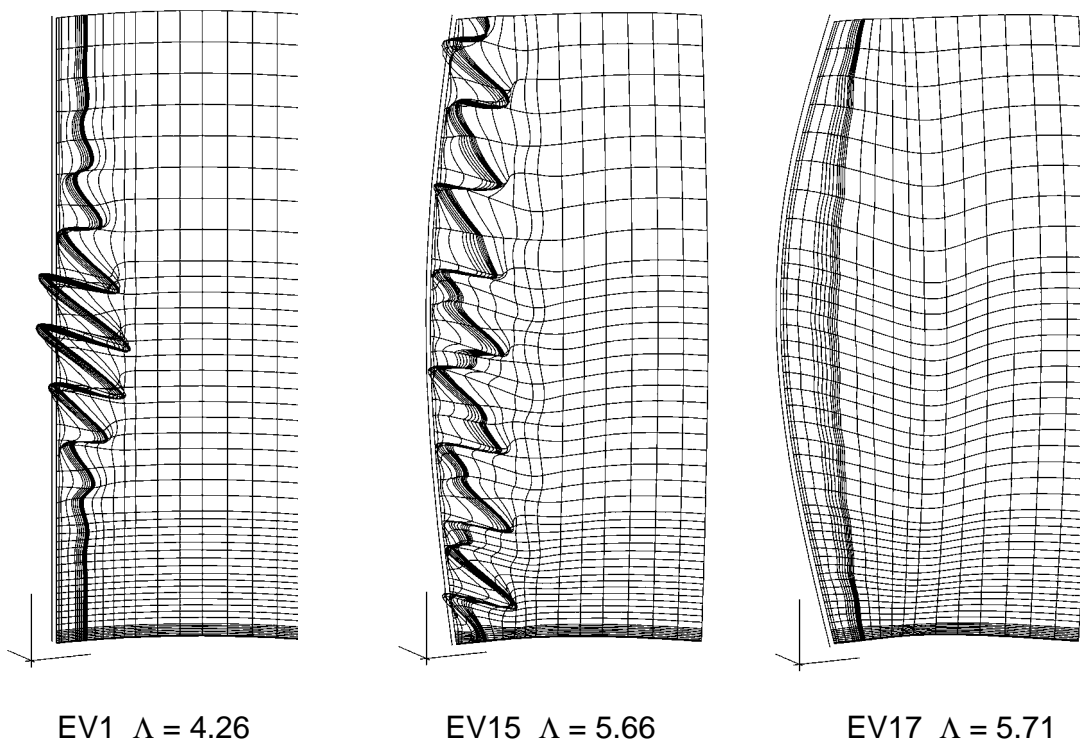
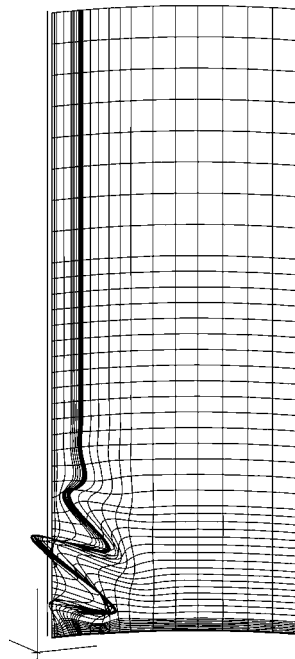
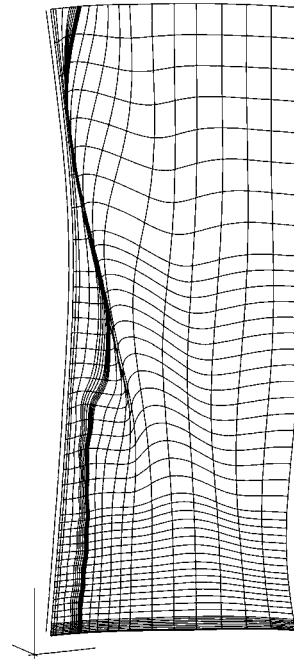


Bild 8-114 Beulformen für Lastfall I — Variante 1, HEB 300

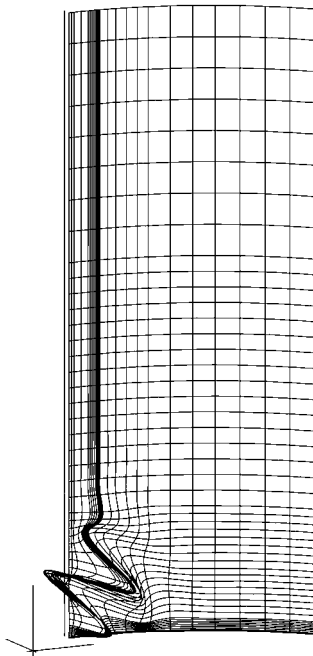


EV1 $\Lambda = 5.02$

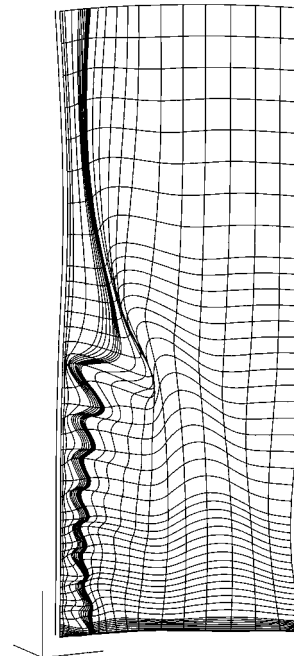


EV9 $\Lambda = 6.12$

Bild 8-115 Beulformen für Lastfall II — Variante 1, HEB 300



EV1 $\Lambda = 1.99$



EV9 $\Lambda = 3.43$

Bild 8-116 Beulformen für Lastfall III — Variante 1, HEB 300

Beulformen für Variante 2 — HEB 160

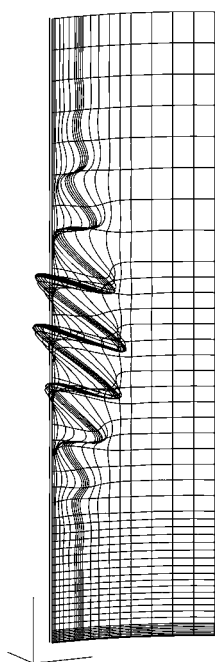
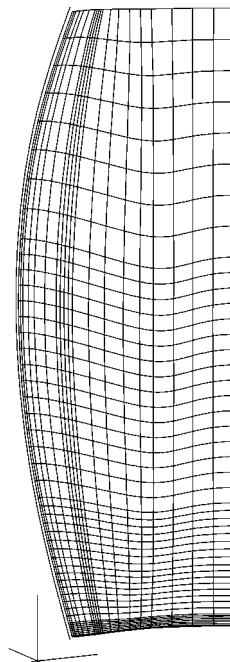
EV1 $\Lambda = 5.41$ EV11 $\Lambda = 6.66$

Bild 8-117 Beulformen für Lastfall I — Variante 2, HEB 160

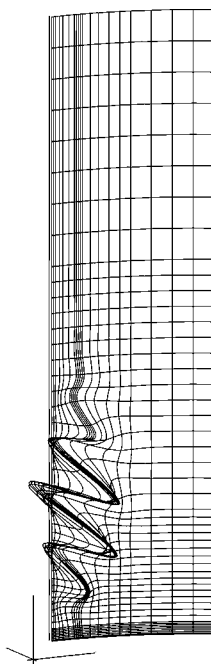
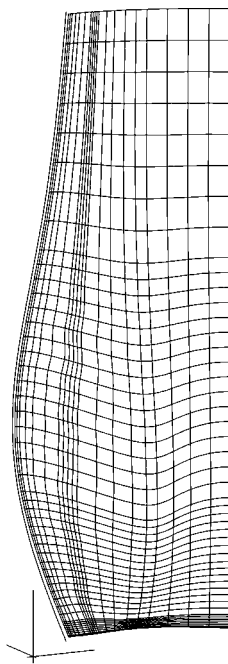
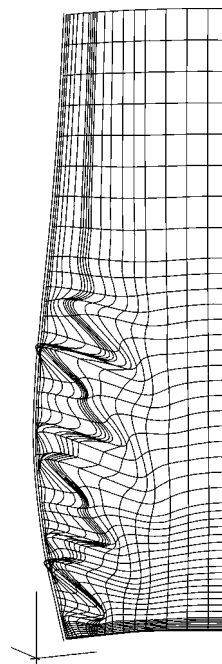
EV1 $\Lambda = 7.79$ EV9 $\Lambda = 9.86$ EV11 $\Lambda = 9.97$

Bild 8-118 Beulformen für Lastfall II — Variante 2, HEB 160

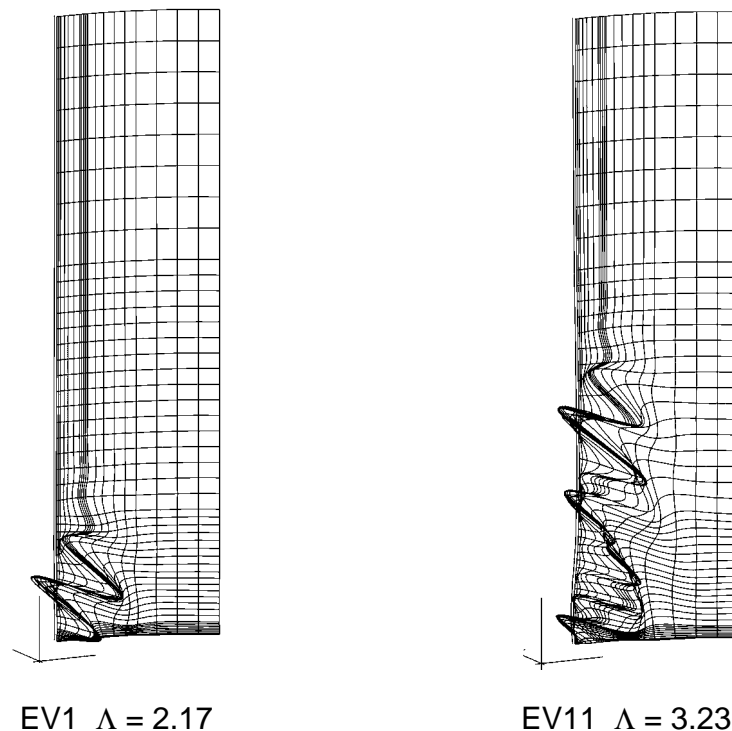


Bild 8-119 Beulformen für Lastfall III — Variante 2, HEB 160

8.3.4.2 Vergleich mit den vereinfachten Stabilitätsberechnungen

Die bestimmten Eigenwerte sind in Tab. 8-21 jenen der vereinfachten Stabilitätsberechnungen (ABEV) gegenübergestellt.

Diese vereinfachten Stabilitätsberechnungen sprich approximativen Beuleigenwertberechnungen (ABEV) basieren auf linear-elastischen Spannungsberechnungen wobei die maßgebenden Druckspannungskomponenten mit ideellen Beulspannungen “klassischer Schalenbeulfälle“ in Bezug gesetzt werden und dadurch so die Beuleigenwerte bestimmt werden.

Längssteifenknicken

Ein direkter Vergleich ist nur für Lastfall I möglich, durch den veränderlichen Verlauf der Normalkraft liegen die CBEV-Resultate stets über den Werten der vereinfachten Stabilitätsberechnungen. Generell ist das Längssteifenknicken den höheren Eigenwerten der CBEV-Analysen zugeordnet.

Schalenbeulen

Bei den vereinfachten Stabilitätsberechnungen (ABEV) werden nur die Axialspannungen betrachtet. Die Beulmuster der niedrigsten Beuleigenwerte sind stets Axialbeulmuster, dies rechtfertigt die vereinfachte Vorgehensweise der ABEV-Analysen. Es ergibt sich für alle 3 Lastfälle eine relativ gute Übereinstimmung der Resultate, die ABEV-Berechnungen liefern dabei zumeist etwas niedrigere Eigenwerte.

Tab. 8-21 Resultate der linearen Beuleigenwertberechnungen (CBEV) und Vergleich mit den vereinfachten Stabilitätsberechnungen

Längssteifenprofil	Lastfall	F_{Ref} [kN]	FE-Beulberechnungen (CBEV)			vereinfachte Stabilitätsberechnungen	
			Beuleigenwert	Verzweigungslastfaktor Λ_{EV}	Beulver-sagensform	abgeschätzter Verzweigungslastfaktor Λ	Beulver-sagensform
HEB 300	I	3576	EV 1 EV 11 EV 15	4.26 5.66 5.71	SB LK+SB LK	3.66 4.18 — 5.75	SB LK
	II	3576	EV 1 EV 9	5.02 6.12	SB LK+SB	4.98	SB
	III	6476	EV 1 EV 15	1.99 3.43	SB LK+SB	2.02	SB
HEB 160	I	1303	EV 1 EV 11	5.41 6.66	SB LK	4.44 3.86 — 5.42	SB LK
	II	1303	EV 1 EV 9 EV 11	7.79 9.86 9.97	SB LK LK+SB	6.02	SB
	III	4203	EV 1 EV 9	2.17 3.23	SB LK+SB	1.64	SB

LK... Längssteifenknicken

SB... Schalenbeulen

LK+SB... gleichzeitiges Längssteifenknicken und Schalenbeulen

8.3.4.3 Beullasterhöhender Einfluß des Innendruckes

Der beullasterhöhende Effekt des Innendruckes wird exemplarisch für den Lastfall I (entgegengesetzt gerichtete Einzelkräfte) untersucht. Dabei wird für eine exemplarische Demonstration eine Innendruckbelastung von $\sigma_{\Theta, \text{init}} = 5,0 \text{ kN/cm}^2$ angesetzt. Für die Axialspannungen der Schale wird, da nur ein qualitativer Vergleich erfolgt, eine Initialspannung von $\sigma_{x, \text{init}} = 25,0 \text{ kN/cm}^2$ verwendet. Die idealisierten Knicklasten der Längssteife (vereinfachte Stabilitätsberechnungen) sind Bild 8-108 und Bild 8-110 entnommen. Es zeigt sich, daß das idealisierte Knickmodell wiederum gut genäherte Werte liefert.

Vor allem die Stützenknicklast wird durch den glättenden und somit steifigkeitserhöhenden Effekt des Innendruck erhöht. Um den dazugehörigen Eigenwert mit vertretbarem Rechenaufwand zu erhalten, wurde für die FE-Berechnung ein gröberes Netz verwendet. Der niedrigste Eigenwert, der zugehörig zum Schalenbeulen ist, wird mit jenem des ursprünglichen FE-Netz verglichen.

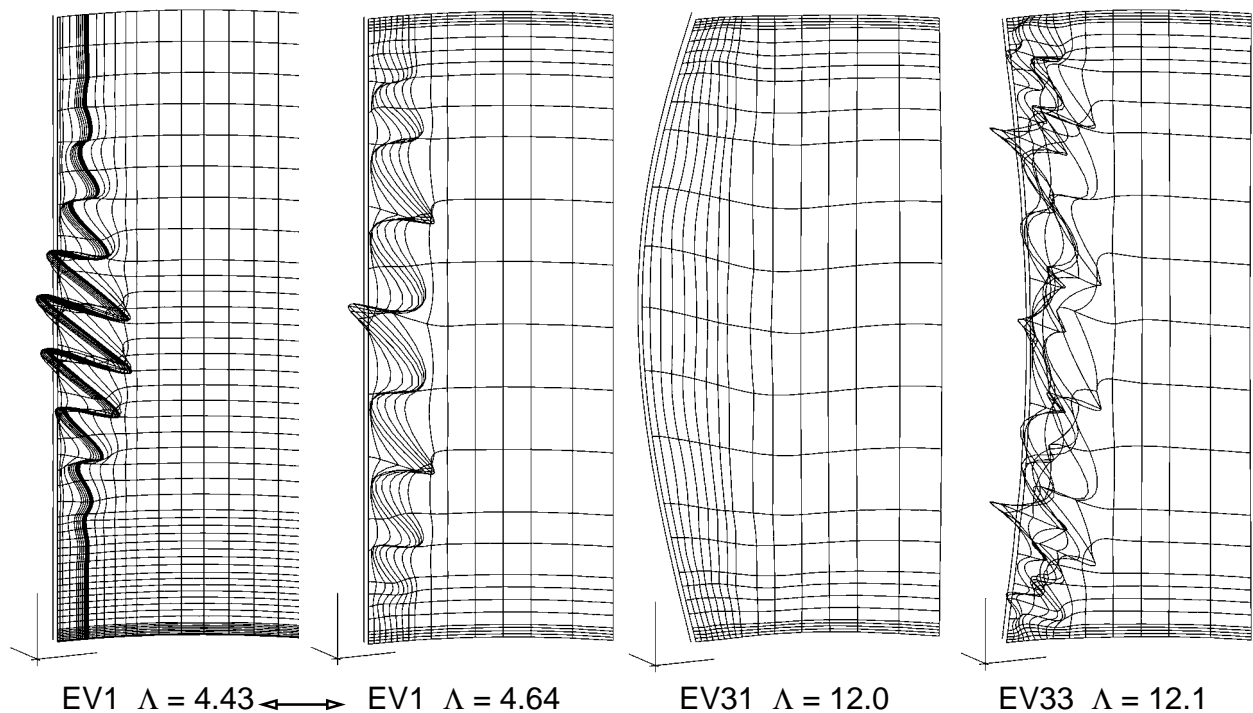


Bild 8-120 Beulformen für Lastfall I — Variante 1, HEB 300 und $\sigma_{\Theta, \text{init}} = 5,0 \text{ kN/cm}^2$

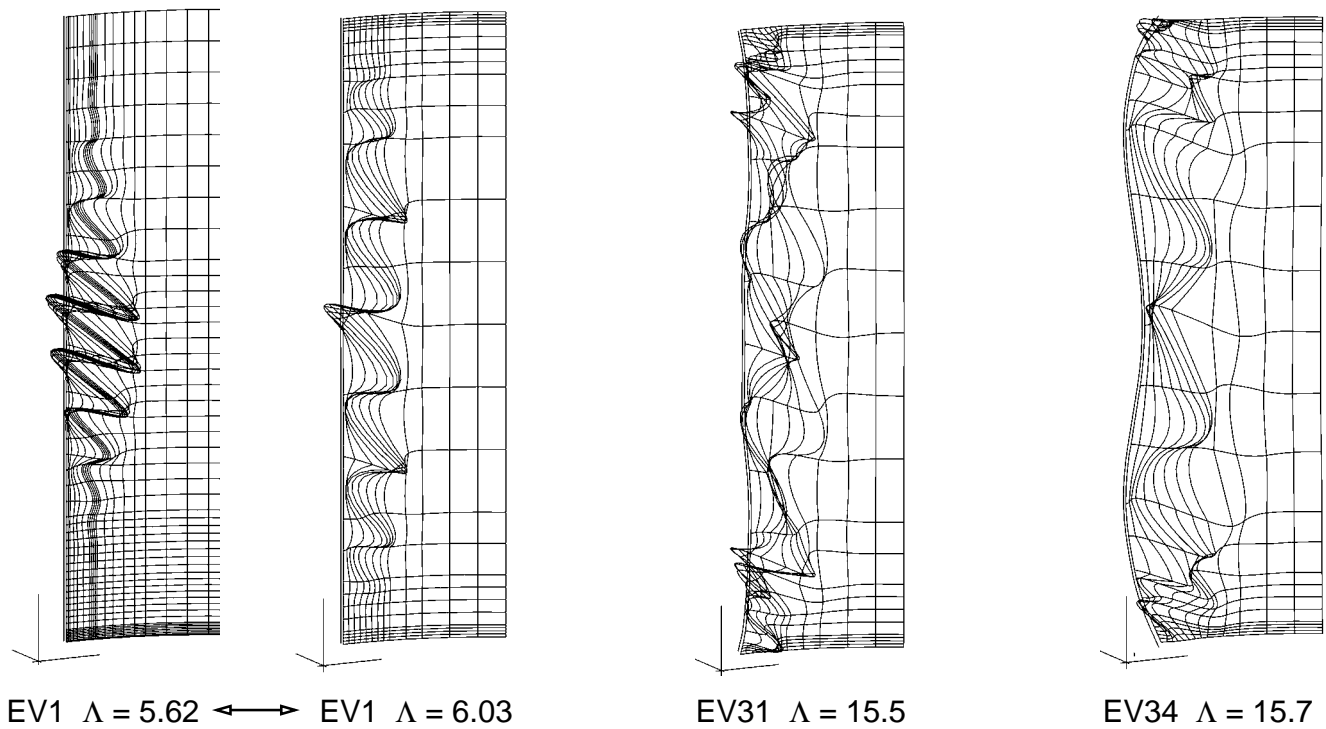


Bild 8-121 Beulformen für Lastfall I — Variante 2, HEB 160 und $\sigma_{\Theta, \text{init}} = 5,0 \text{ kN/cm}^2$

Tab. 8-22 Klassische Beuleigenwert-Analyse - Einfluß des Innendruckes auf die Knicklast der Längssteife

Auflagerlängssteife	Knicklast der isolierten Auflagerlängssteife		vereinfachte Stabilitätsberechnung am Doppelbalkenanalogiemodell — Knicklast der Auflagerlängssteife			FE-Beulberechnung
	$N_{CR, 1}$ [kN]	$\frac{N_{CR}}{N_{CR, 1}}$	N_{CR} [kN]	$N_{\text{ref}} = N_{\text{pl}}$ [kN]	$\Lambda = \frac{N_{CR}}{N_{\text{pl}}}$	Λ_{EV}
HEB 300	5217	7.5	39130	3576	10.9	12.0 (EV 31 / LK)
HEB 160	516	≈ 40.0	20640	1303	15.8	15.7 (EV 34 / LK+SB)

LK.... Längssteifenknicken
 SB.... Schalenbeulen

8.3.4.4 Bestimmung der Beultragfähigkeit des Gesamtsystems auf Basis der linearen Beuleigenwertberechnungen

Die Bestimmung der Beultragfähigkeit basierend auf den klassischen linearen FE-Beulberechnungen erfolgt durch die Bestimmung des Schlankheitsgrades $\bar{\lambda}_{ov}$ des Gesamtsystems. Eingangsgrößen sind die plastische Tragfähigkeit R_{pl} des Gesamtsystems und die kritische Beullast R_{CR} .

Die plastische Tragfähigkeit des Gesamtsystems ergibt sich aus der Gesamtauflagerkraft F , die aus der Summe plastischen Lagertragfähigkeiten so bestimmt wurde, daß der Interaktionseffekt von Axial- und Schubspannungen im Auflagerbereich näherungsweise berücksichtigt wird (siehe Gl. (8-99a)). Die Referenzbelastung entspricht im vorliegenden Fall somit der plastischen Tragfähigkeit.

$$R_{pl} = N_{pl} + 0,7F_{S,y} + 0,7F_{Z,y} \quad (8-99a)$$

$$R_{CR} = R_{pl} \cdot \Lambda_{EV} \quad (8-99b)$$

$$\bar{\lambda}_{ov} = \sqrt{R_{pl}/R_{CR}} = \sqrt{1/\Lambda_{EV}} \quad (8-99c)$$

Der Lastfaktor der Beullast ergibt sich, da die plastische Tragfähigkeit als Referenzlast verwendet wird, direkt aus dem Beulabminderungsfaktor κ . Der Beulabminderungsfaktoren werden konservativ mit den Regelungen für Axialbeulung nach DIN 18000 – Teil 4 bzw. Eurocode – Teil 1.6 (Herstellungsklasse A) ermittelt. Die Tragfähigkeiten sind in Tab. 8-23 zusammengefaßt und mit jenen der vereinfachten Schalenbeulberechnungen nach Tab. 8-20 verglichen

Tab. 8-23 Bestimmung der Beultragfähigkeit des Gesamtsystems

Längssteife	Bestimmung der Beultragfähigkeit auf Basis linearer FE-Beulberechnungen				Abschätzung der Beultragfähigkeit der Schale auf Basis linear-elastischer Spannungsrechnungen	
	Beuleigenwert EV 1	Schalenschlankheitsgrad	Beultragfähigkeit — $\Lambda = \kappa$		Λ (nach Tab. 8-20)	
	Λ_{EV}	$\bar{\lambda}_{ov}$	DIN	EC 3 / 1.6	DIN	EC 3 / 1.6
HEB 300	1.99	0.709	0.572	0.622	0.624	0.687
HEB 160	2.17	0.679	0.600	0.649	0.505	0.656

Die Bestimmung der Beultragfähigkeit auf Basis der klassischen linearen Beuleigenwertberechnungen bedeutet einen ersten Fortschritt der Approximationsqualität gegenüber der, auf Basis der linear-elastisch Spannungsberechnung bestimmten Tragfähigkeit.

In konservativer Art und Weise wird der Beulabminderungsfaktor für Axialbeulung entsprechend DIN 18800 – Teil 4 (1990) bzw. Eurocode 3 – Teil 1.6 (1999) verwendet, um ausgehend von der idealen Verzweigungslast des Gesamtsystems auf die reale Beultragfähigkeit zu bestimmen.

Die Ergebnisse der Beuleigenwertberechnungen und der vereinfachten Schalenbeulberechnungen stimmen gut überein. Dies zeigt sich bereits bei den vereinfacht auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen bzw. exakt mittels linearer FE-Beulberechnung bestimmten Beuleigenwerte.

Die vorliegenden Ergebnisse liefern somit einen ersten Anhaltspunkt für die im folgenden berechneten Beultragfähigkeiten mithilfe nichtlinearer FE-Berechnungsprozeduren.

8.3.5 Nichtlineare FE—Vergleichsberechnungen

Die Tragfähigkeiten des Schaft-Längssteifen-Systems, die basierend auf linear-elastischen Spannungsberechnungen bzw. linearen FE-Beuleigenwertberechnungen bestimmt wurden, werden durch nichtlineare FE-Berechnungen verifiziert. Vorweg erfolgt ein Überblick über die vorliegenden Ergebnisse der linear-elastischen Spannungsberechnungen.

Die plastische Tragfähigkeit der Schalenwand auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen wird ohne Berücksichtigung der hohen Spannungskonzentrationen im Auflagerbereich (die Endschubkräfte zwischen Schaft und Längssteife werden als Kompatibilitätskräfte angesehen) bestimmt. In Kap. 8.3.2 erfolgte lediglich die Festlegung der Auflagerteilkräfte entsprechend einer vereinfachten Berechnung der Vergleichsspannung im Auflagerbereich. Diese Auflagerteilkräfte wurden zugleich als Referenzbelastung zugrundegelegt. Die plastische Grenztragfähigkeit der Schale bzw. des Auflagerbereiches weist somit einen zur Referenzbelastung zugehörigen Lastfaktor von $\Lambda = 1,0$ auf.

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen zeigen bei der getrennten Ermittlung der Tragfähigkeiten als Versagensformen einerseits die Ausbildung eines Fließgelenkes in der Längssteife (elasto-plastisches Knicken) und die Ausnutzung der Beultragfähigkeit bzw. folglich das lokale Beulen der Schalenwand im seitlichen Beulmeridian im unteren Bereich des Schaftes (siehe Kap. 8.3.2 und Kap. 8.3.3).

Die linearen FE-Beulberechnungen zeigen als Versagensform lokale Beulen der Schalenwand. Das Versagen des Schaft-Längssteifen-Systems durch Knicken der Längssteife tritt erst bei höheren Beuleigenwerten auf (siehe Kap. 8.3.4).

Im folgenden werden nichtlineare FE-Berechnungsprozeduren angewandt. Dabei werden am perfekten bzw. imperfekten System folgende Untersuchungen angestellt:

- Bestimmung der Beultragfähigkeit des Schaft-Längssteifen-Systems und der Beulversagensformen, wobei das Hauptaugenmerk auf die Auflagerlängssteife gerichtet ist. Das elasto-plastische Knicken der Längssteife wird dabei als globale Beulversagensform angesehen.
- Bestimmung der tatsächlichen Aufteilung der Lagerkräfte und die Überprüfung der festgelegten Aufteilung der Auflagerkraft von Kap. 8.3.2.

8.3.5.1 Übersicht der nichtlinearen Vergleichsberechnungen

Es werden folgende nichtlineare FE-Berechnungsprozeduren angewandt:

- GNA — geometrisch nichtlineare Analysen des perfekten Systems
- GMNA — geometrisch und materiell nichtlineare Analysen des perfekten Systems
- GMNIA — geometrisch und materiell nichtlineare Analysen des imperfekten Systems
- MNA — materiell nichtlineare Analysen

GNA — geometrisch nichtlineare Analysen des perfekten Systems

Mit den GNA-Analysen soll das reale elastische Beulverhalten des perfekten Systems untersucht werden. Es wird überprüft ob lokales Schalenbeulen oder das globale Knicken der Längssteife das elastische Beulverhalten des Schaft-Längssteifen-Systems dominiert.

GMNA — geometrisch und materiell nichtlineare Analysen

Mit den GMNA-Berechnungen des perfekten Systems wird das elasto-plastische Beulverhalten untersucht. Durch die Implementierung der Materialnichtlinearität stellen diese Berechnungen einen weiteren Schritt zur Bestimmung der realen Beultragfähigkeit dar.

Zur Untermauerung der Ergebnisse wird neben der den linearen Analysen zugrundeliegenden unendlich nachgiebigen Lagerung, die Lagerung wird dabei durch vorgegebene Auflagerkräfte repräsentiert, auch die starre Lagerung des Auflagerbereiches untersucht (Bild 8-122). Dabei sind die Axialverschiebungen der Lagerfläche gesperrt. Das Schottblech, das in seiner Wirkung bei der nachgiebigen Lagerung ersatzweise mit vorgegebenen Schubkräften erfaßt wird, wird bei der starren Lagerung mit einem Ersatzstab simuliert, die Fläche dieses Ersatzstabes entspricht der äquivalenten Lagerfläche des Schottbleches A_S^* (siehe Kap. 8.3.1.2).

GMNIA — geometrisch und materiell nichtlineare Analysen des imperfekten Systems

Die linear-elastischen Spannungsberechnungen in Kap. 8.3.2 zeigen, daß die nach innen gerichtete parabelförmige Vorkrümmung der Längssteife zusätzliche Beanspruchungen liefert und somit die maßgebende Imperfektion hinsichtlich der Tragfähigkeit der Längssteife ist. Für die GMNIA-Berechnungen wird folgendes Imperfektionsmuster gewählt:

- In Umfangsrichtung erstreckt sich das Imperfektionsmuster über den gesamten Bereich des Berechnungsausschnittes ($0 \leq \Theta \leq \pi/n_{St}$). Bild 8-123 zeigt die Beschreibung durch die Imperfektionsamplitude w_0 und dem Produkt der beiden Verlaufsfunktionen $f(x)$ und $f(\Theta)$. In Längsrichtung weist das Imperfektionsmuster somit einen quadratischen und in Umfangsrichtung einen kubischen Verlauf auf.
- Die Berücksichtigung der geometrischen Imperfektionen — Vorkrümmung der Längssteife — kann alternativ analog den linear-elastischen Spannungsberechnungen in Kap. 8.3.2.5 mittels Imperfektionsersatzlast q_z berücksichtigt werden.

MNA — materiell nichtlineare Analysen

Die plastische Grenztragfähigkeit (ULS 1) des Schaft-Längssteifen-Systems wird mittels materiell nichtlinearen Berechnungen bestimmt. Es werden die auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen nach 1. Ordnung abgeschätzten Tragfähigkeiten und die zugrundegelegte Festlegung der Auflagerteilkräfte überprüft.

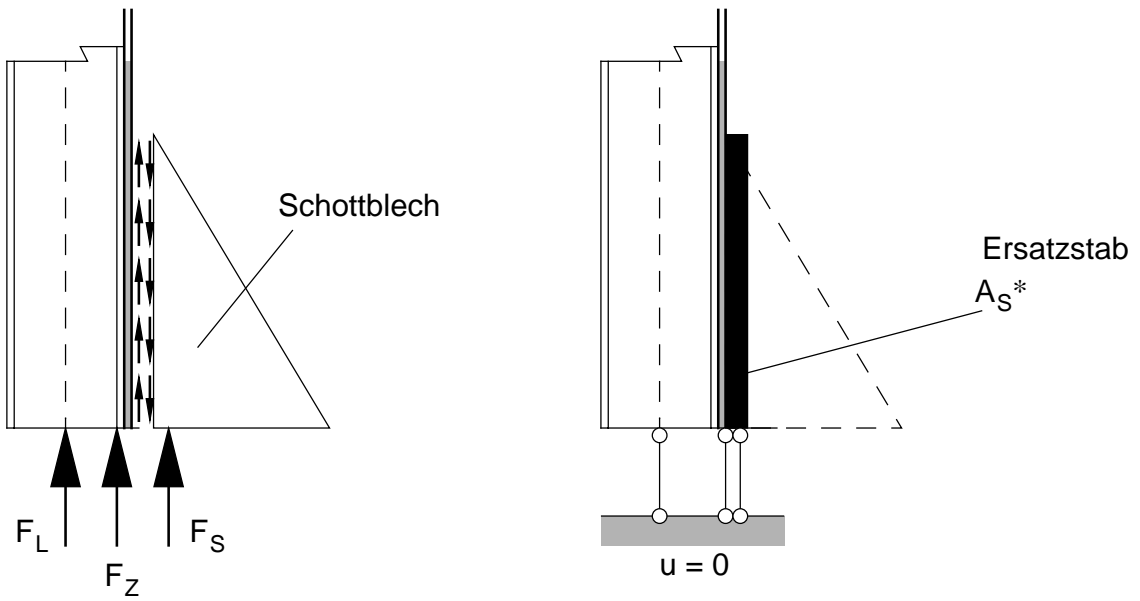
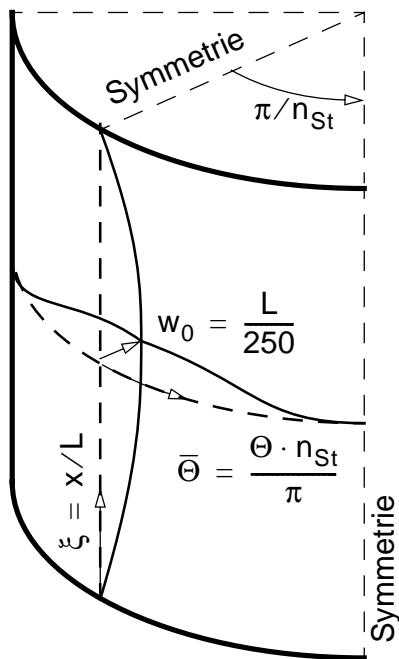


Bild 8-122 Unendlich nachgiebige Auflagerung (Auflagerkraftaufteilung) und starre Lagerung des Schaft-Längssteifen-Systems



$$w(x, \Theta) = w_0 \cdot f(x) \cdot g(\Theta)$$

$$f(x) = 4\xi(1 - \xi)$$

$$g(\Theta) = 1 - 3\bar{\Theta}^2 + 2\bar{\Theta}^3$$

Bild 8-123 Beschreibung des Imperfektionsmusters in der Schale und in der Längssteife bei einer parabel-förmigen Vorkrümmung der Längssteife

8.3.5.2 Geometrisch nichtlineare Beulanalysen (GNA)

Mit den geometrisch nichtlinearen Beulanalysen wird das reale Beulverhalten des elastischen, perfekten Systems untersucht. Es stellt dabei sich die Frage ob bei den GNA-Analysen das Knicken der Längssteife oder lokale Schalenbeulversagensformen das Stabilitätsverhalten des Schaft-Längssteifen-Systems dominieren.

Die niedrigsten Eigenwerte der klassischen Beulanalysen (CBEV) weisen durchwegs Schalenbeulmuster auf, erst höhere Eigenwerte repräsentieren ein globales Beulverhalten (Knicken der Längssteife). Die folgenden GMNA-Analysen (siehe Kap. 8.3.5.3) zeigen als Versagensform das elasto-plastisches Knicken der Auflagerlängssteife durch Ausbildung eines Fließgelenkes.

Darstellung der Ergebnisse

Es werden folgende Ergebnisse dargestellt:

- Beulverformungen
- Last-Radialverschiebungs- und Last-Axialverschiebungsdiagramme für ausgewählte Punkte

Zu Vergleichszwecken werden die Verzweigungslastfaktoren der linearen FE-Beulberechnungen (CBEV) und vorweg die Traglasten der geometrisch und materiell nichtlinearen Analysen (GMNA siehe Kap. 8.3.5.3 bzw. GMNIA Kap. 8.3.5.4) in den Last-Verschiebungsdiagrammen wiedergegeben.

Ergebnisse der GNA-Analysen

Die Beultragfähigkeiten liegen zwischen jenen der linearen Beultragfähigkeiten (CBEV) und den Tragfähigkeiten der GMNA-Berechnungen. Zu beiden Auflagerlängssteifentypen sind zwei unterschiedliche Versagensformen zugehörig. Der Unterschied der Versagensformen begründet sich auf den unterschiedlichen Biegesteifigkeiten der Längssteifen.

Für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300 — liegt als Versagensform lokales Beulen neben der Längssteife im unteren Drittel der Schale vor. Das Nachbeulminimum liegt bei 90% des primären Lastmaximums, danach steigt die Last wieder an (Bild 8-124). Das sekundäre Lastmaximum — Knicken der Längssteife — ist bei der vorliegenden Berechnung nicht erreicht. Das Last-Axialverschiebungsdiagramm (Bild 8-125) zeigt einen kaum veränderten Anstieg im Nachbeulbereich gegenüber dem Vorbeulbereich. Nach Auftreten der lokalen Schalenbeulen und dem Lastabfall zum Nachbeulminimum steigt die Last-Verschiebungskurve in Verlängerung des Vorbeulastes an. Hinsichtlich der Tragfähigkeit des imperfekten Gesamtsystems kann angenommen werden, daß bei Wahl entsprechender Imperfektionen der Schalenwand das lokale Lastmaximum und sein zugehöriger Nachbeulbereich quasi unterfahren in Bild 8-124 bzw. Bild 8-125 wird und somit letztendlich das Knicken der Auflagerlängssteifen der maßgebende Versagensmodus wird.

Für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160 — liegt als Versagensform das Knicken der Längssteife vor (Bild 8-126). Gekennzeichnet ist dies durch die starke Zunahme der Verschiebungen vor Erreichen des Lastmaximums.

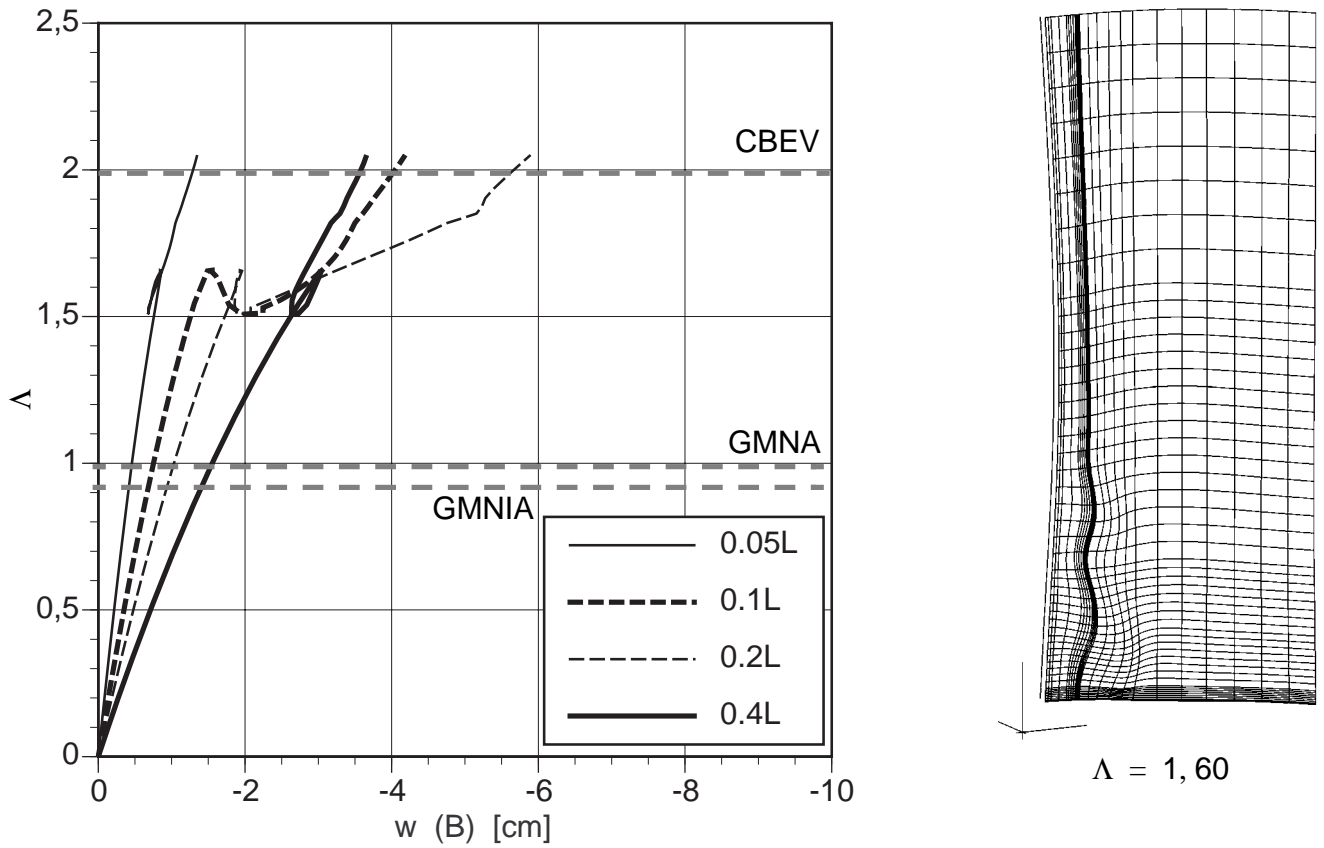


Bild 8-124 Last-Radialverschiebungsdiagramm und Beulverformungen für Variante 1 —
Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GNA-Berechnung

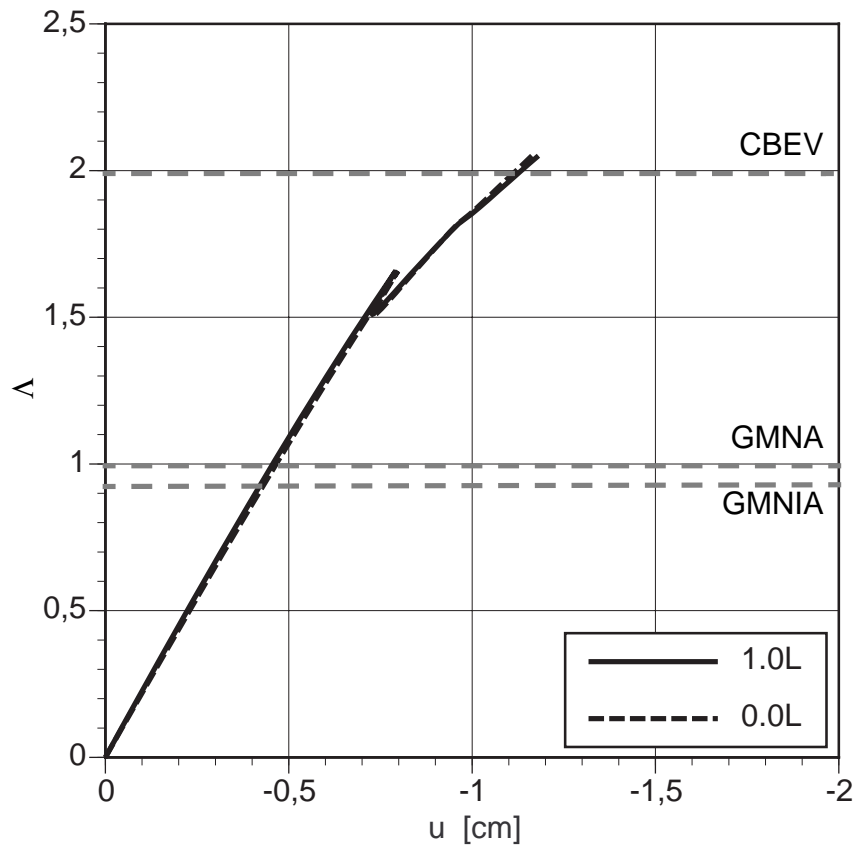


Bild 8-125 Last-Axialverschiebungsdiagramm für Variante 1 —
Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GNA-Berechnung

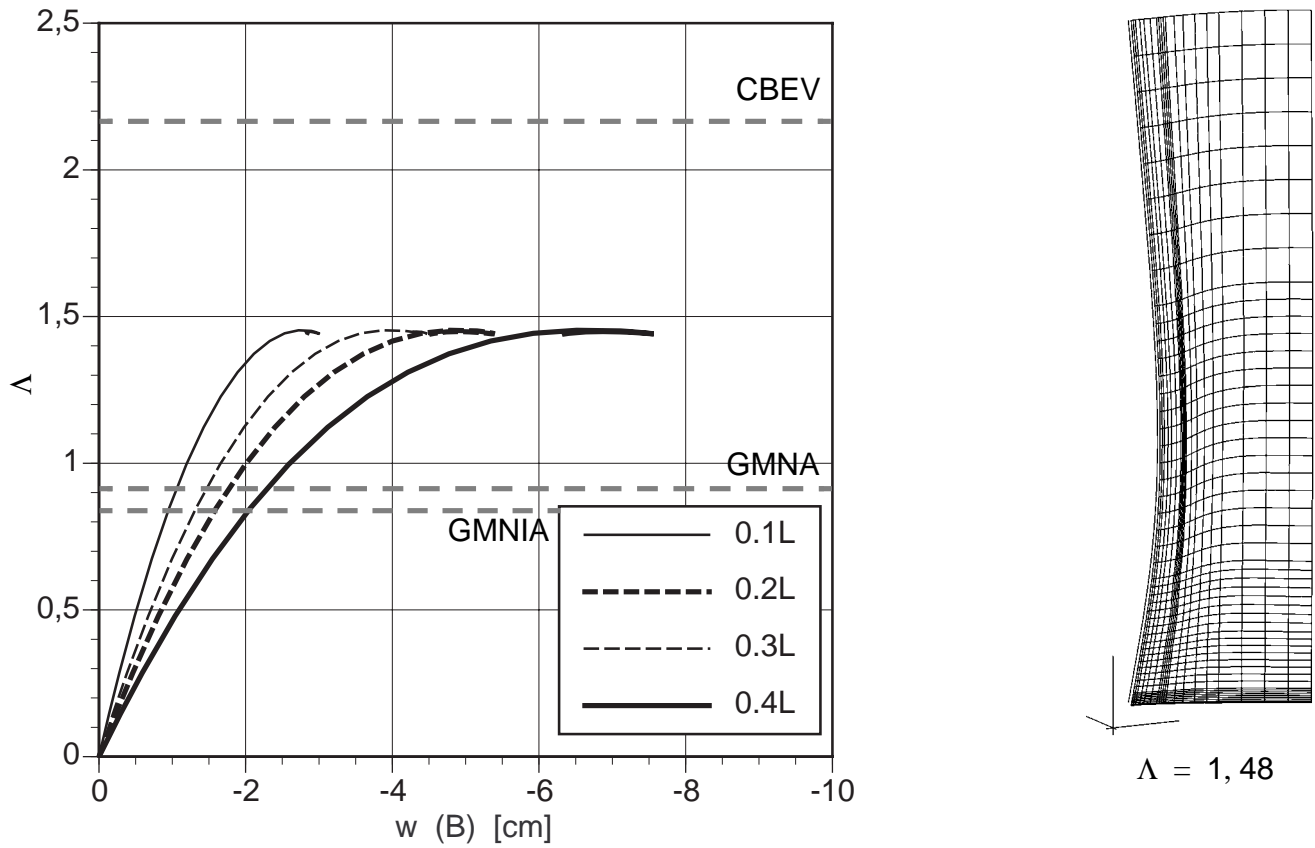


Bild 8-126 Last-Radialverschiebungsdiagramm und Beulverformungen für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; GNA-Berechnung

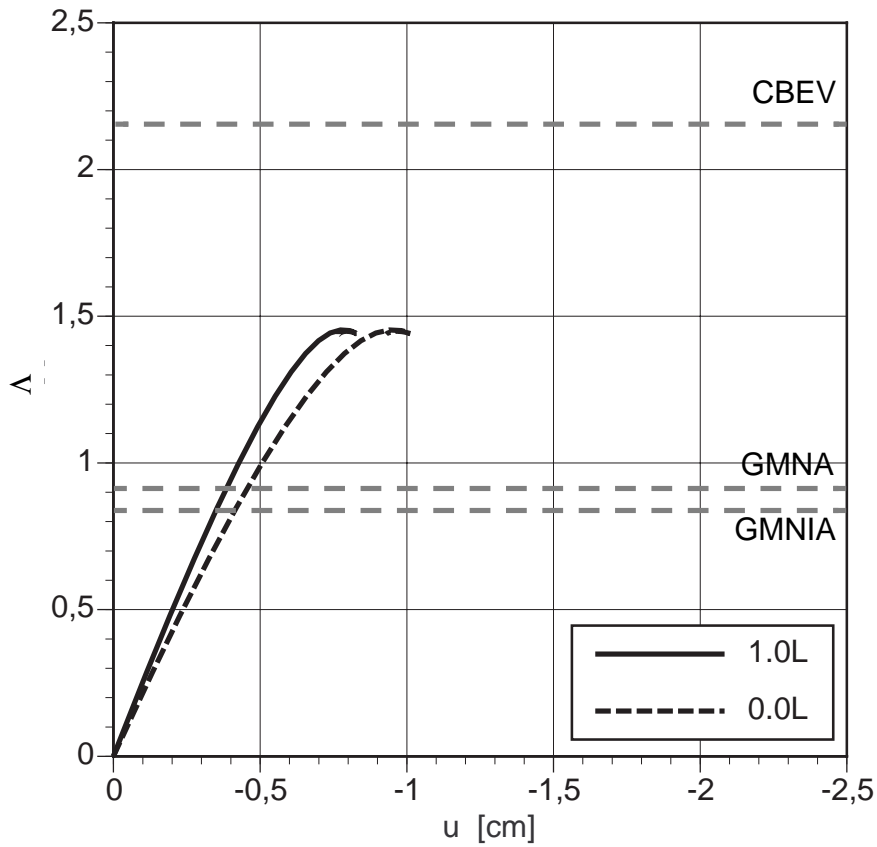


Bild 8-127 Last-Axialverschiebungsdiagramm für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$; GNA-Berechnung

8.3.5.3 Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen (GMNA)

Die folgenden geometrisch und materiell nichtlinearen Berechnungen des perfekten Systems sollen klären ob das Knicken der Längssteife oder das Beulversagen der Schalenwand dominierend ist.

Darstellung der Ergebnisse

Es werden folgende Ergebnisse für beide Varianten (HEB 300 bzw. HEB 160) dargestellt:

- Beulverformungen werden anhand von Liniendiagrammen für ausgewählte Laststufen im Längssteifenmeridian (Linien A, B bzw. C) und im seitlich situierten Beulmeridian (Linien A', B' bzw. C') dargestellt. Die Nachbeulform wird für die Endlaststufe der nichtlinearen Berechnung dargestellt.
- Last-Radialverschiebungs- und Last-Axialverschiebungsdiagramme für ausgewählte Punkte des Auflagerlängssteifenmeridians. Die Last-Radialverschiebungskurve für den Punkt $x/L = 0,4$ wird mit jener der linear-elastischen Spannungsberechnungen inklusive Stabilitätseffekten verglichen.
- Die Querschnittsausnutzung der Auflagerlängssteife zufolge der Interaktion von Normalkraft und Biegemoment ist ebenfalls für ausgewählte Laststufen dargestellt. Es wird die Beanspruchung des Innen- bzw. Außengurtes ("i" bzw. "o") und die Normalkraftbeanspruchung "n" der Auflagerlängssteife dargestellt. Sie dienen zum Vergleich mit den Beanspruchungen der Längssteife im Zuge der linear-elastischen Spannungsberechnungen.

Der glättende Effekt der Innendruckbelastung ist in diesen nichtlinearen Beulberechnungen nicht berücksichtigt.

Ergebnisse für Variante 1 - HEB 300

Die maximale Ausnutzung durch die Normalkraft der Längssteife ist in unmittelbarer Auflagernähe gegeben. Die Schale selbst weist dort ebenfalls hohe Axial- und Schubspannungen durch die Einleitung der Lagerkräfte auf. Primär ergibt sich analog den linearen Analysen eine globale Verformung des Längssteifenmeridians nach innen. Durch das Absinken der Steifigkeit der Längssteife im Auflagerbereich durch zunehmende Plastifizierung knickt die Längssteife nun nach außen, daneben bildet sich eine lokale Beule — Elefantenfuß — in der Schale aus (siehe Bild 8-128).

Das Last-Radialverschiebungsdiagramm (Bild 8-129) spiegelt die Entwicklung der Beulverformungen wieder. der primäre Anstieg erfolgt nahezu linear, beim Erreichen der maximalen Last ändert sich durch die Ausbildung des Elefantenfußes die Richtung des Verformungsprozesses. Im Nachbeulbereich kommt es zu einem steten Absinken der Last. Zum Vergleich ist die Lastverschiebungskurve der linear-elastischen Berechnungen inklusive Stabilitätseffekten mit Doppelreihenlösung für den Punkt $x/L = 0,4$ dargestellt. Die fix gehaltenen Abtriebsterme zufolge $n_{x, \text{init}}$ (Schale) und N_{init} (Längssteife) wirken dabei als konstante Steifigkeitsreduktion, die Lastverschiebungskurve des linear-elastischen Berechnungen stellt somit die Sekantensteifigkeit der Lastverschiebungskurve der nichtlinearen Berechnung dar.

Die Querschnittsausnutzung der Längssteife in Bild 8-131 bzw. Bild 8-132 zeigt eine gute Übereinstimmung mit den linearen Berechnungen, die Fließzone breitet sich im Bereich $0 \leq x/L \leq 0,1$ aus.

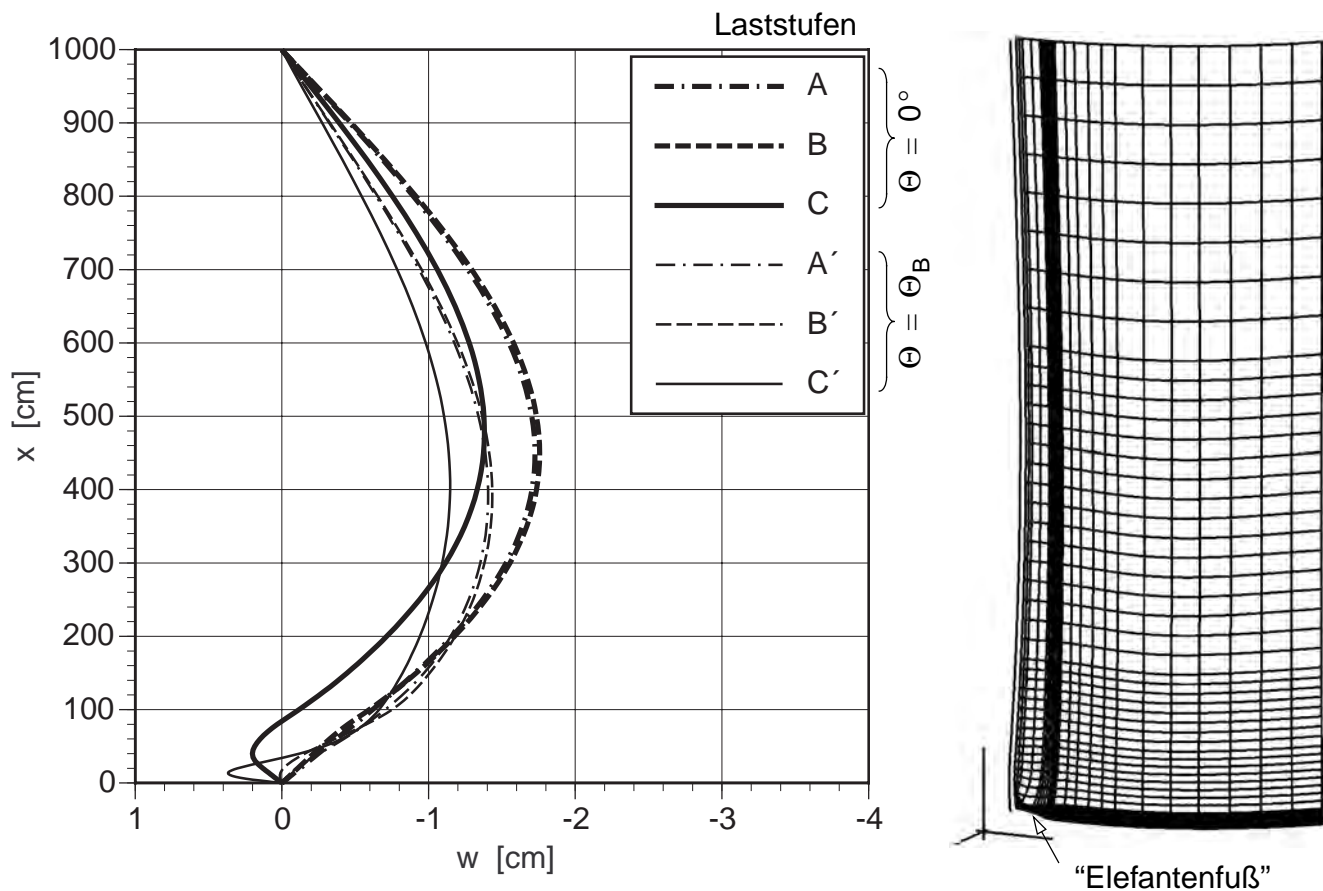


Bild 8-128 Radialverformungen für die Laststufen A, B, C und Beulverformung (Laststufe C) für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{st} = 4$; GMNA-Berechnung

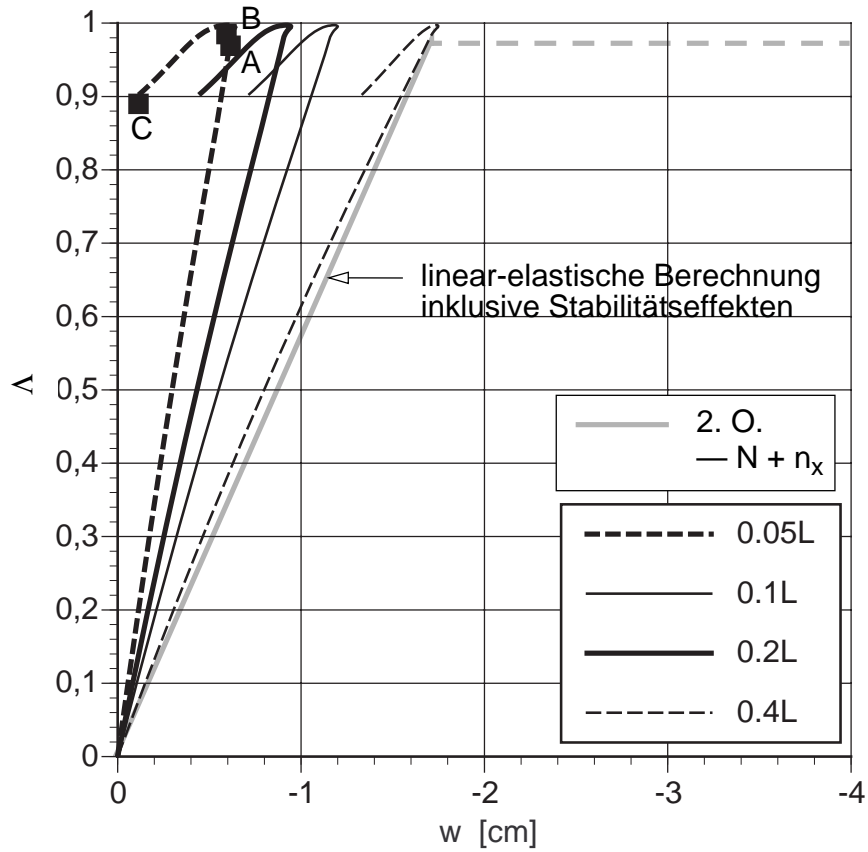


Bild 8-129 Last-Radialverschiebungsdiagramm für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GMNA-Berechnung

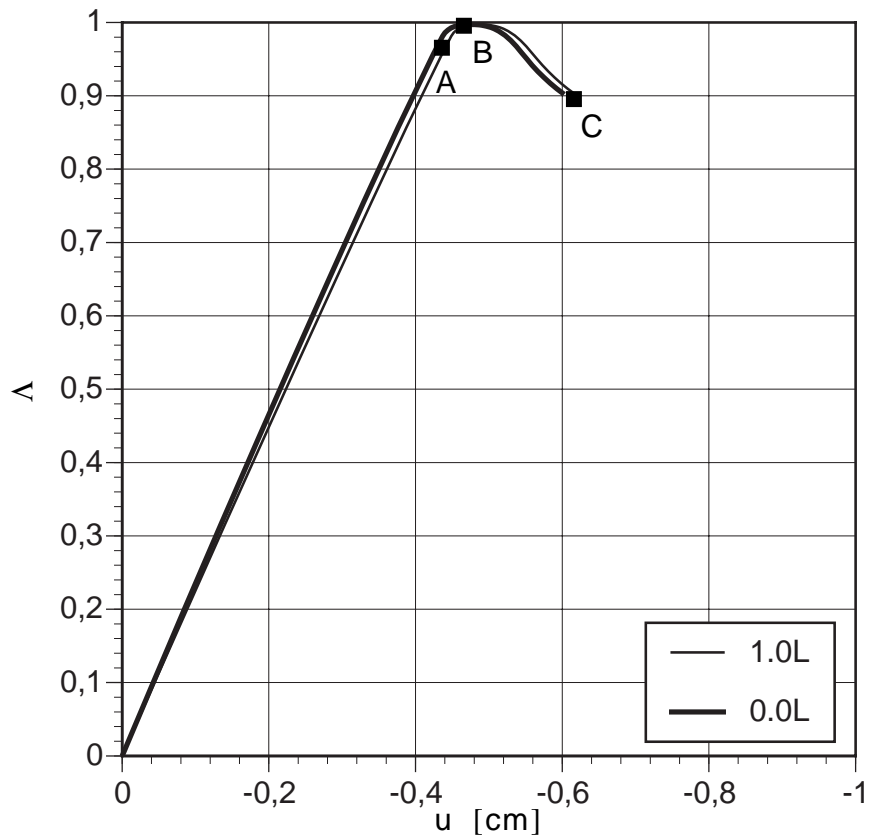


Bild 8-130 Last-Axialverschiebungsdiagramm für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GMNA-Berechnung

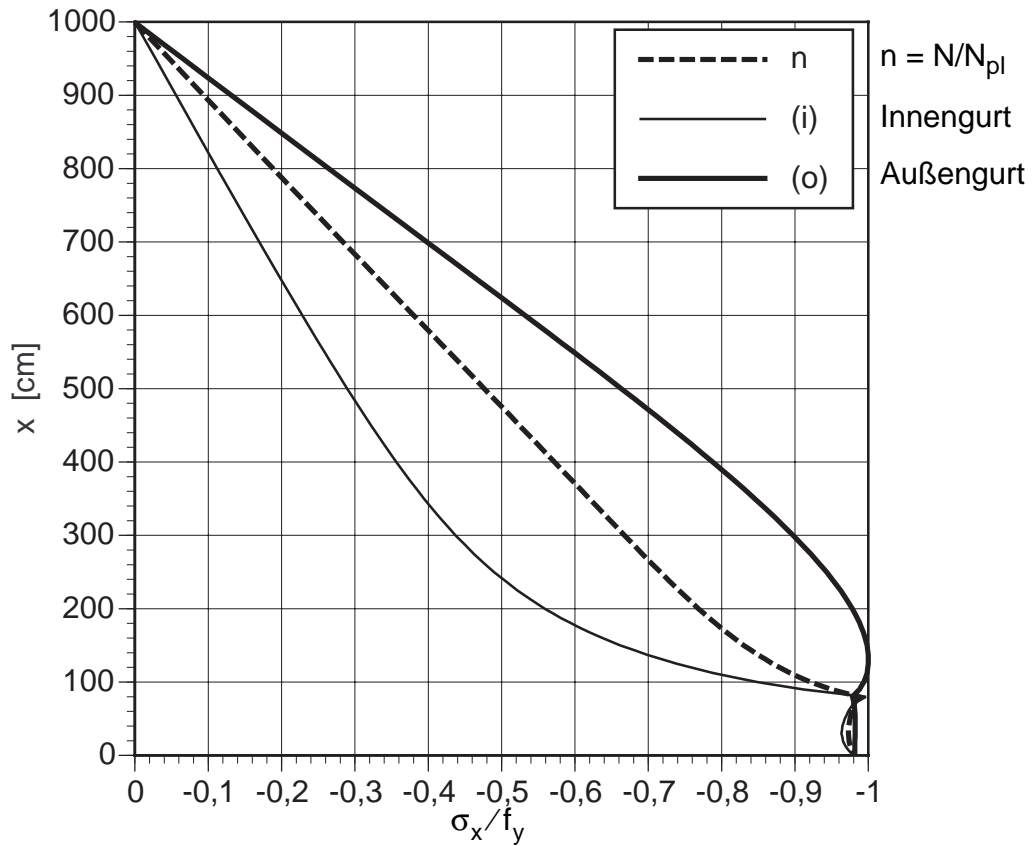


Bild 8-131 Querschnittsbeanspruchung der Längssteife an der Laststufe A für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GMNA-Berechnung

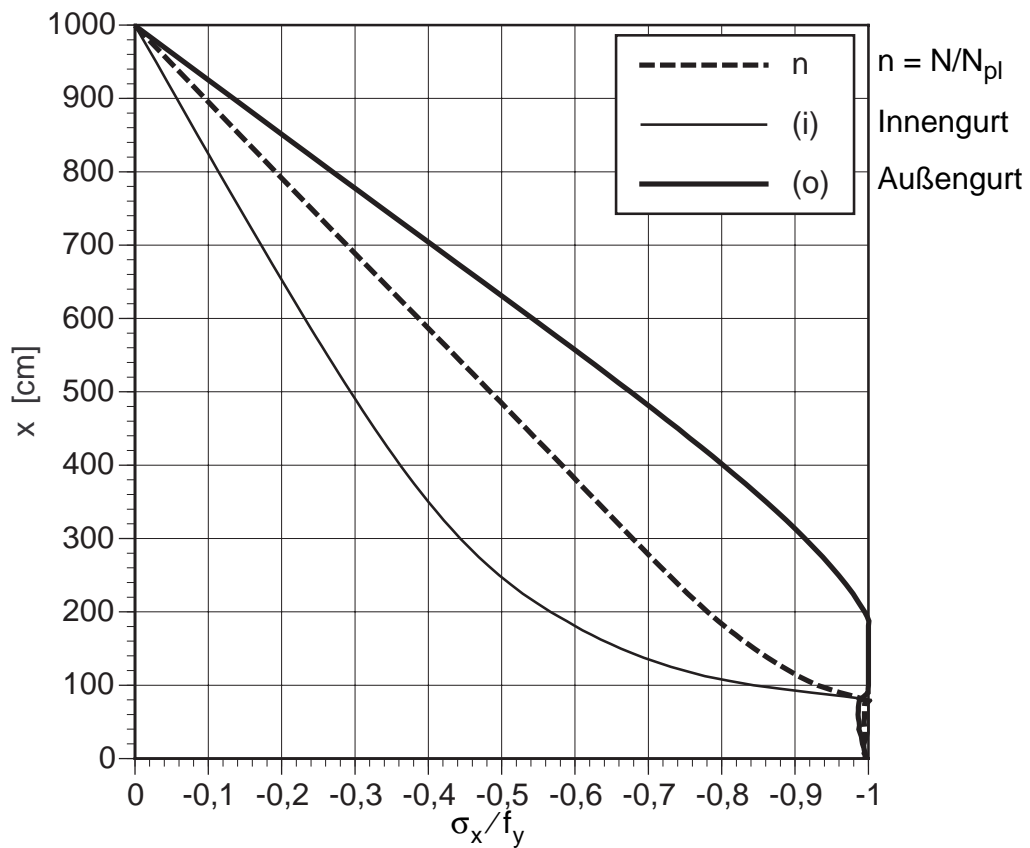


Bild 8-132 Querschnittsbeanspruchung an der Laststufe B für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GMNA-Berechnung

Variante 2 — HEB 160

Die maximale Beanspruchung der Längssteife liegt nicht im unmittelbaren Auflagerbereich, sie ist in ca. $x/L = 0,125$ vom unteren Rand entfernt. Dadurch entsteht als maßgebender Versagensmodus das elasto-plastische Knicken der Längssteife durch Ausbildung eines Fließgelenkes (siehe Bild 8-133 bzw. Bild 8-136).

Das Last-Radialverschiebungsdiagramm (Bild 8-134) zeigt charakteristisch das elasto-plastische Knickversagen der Längssteife. Die Radialverformungen steigen bis zu 90% des Lastmaximums nahezu linear an, danach nehmen sie progressiv zu. Bei ca. 90% des Lastmaximums wird die rein elastische Beanspruchung des Querschnittes überschritten. Danach wird durch die fortschreitende Ausbildung des Fließbereiches die Steifigkeit der Längssteife stark reduziert, die Radialverformungen nehmen progressiv zu. Zum Vergleich ist wiederum die Lastverschiebungskurve der linear-elastischen Berechnungen inklusive Stabilitätseffekten mit Doppelreihenlösung für den Punkt $x/L = 0,4$ dargestellt. Die Abtriebssterme $n_{x,init}$ und N_{init} liefern die Sekantensteifigkeit der nichtlinearen Lastverschiebungskurve bis zu 70% des Lastmaximums, danach ergeben sich durch die Ausbildung der Fließzone in der Längssteife Abweichungen zwischen den beiden Berechnungsarten.

Die Querschnittsausnutzung der Längssteife in Bild 8-136 für Laststufe A zeigt wiederum eine gute Übereinstimmung mit den linearen Berechnungen auf. In Bild 8-137 ist für Laststufe B des Nachbeulbereiches die aktuelle Last der nichtlinearen Berechnung abgefallen, das Fließgelenk in $x/L = 0,125$ bleibt aber erhalten.

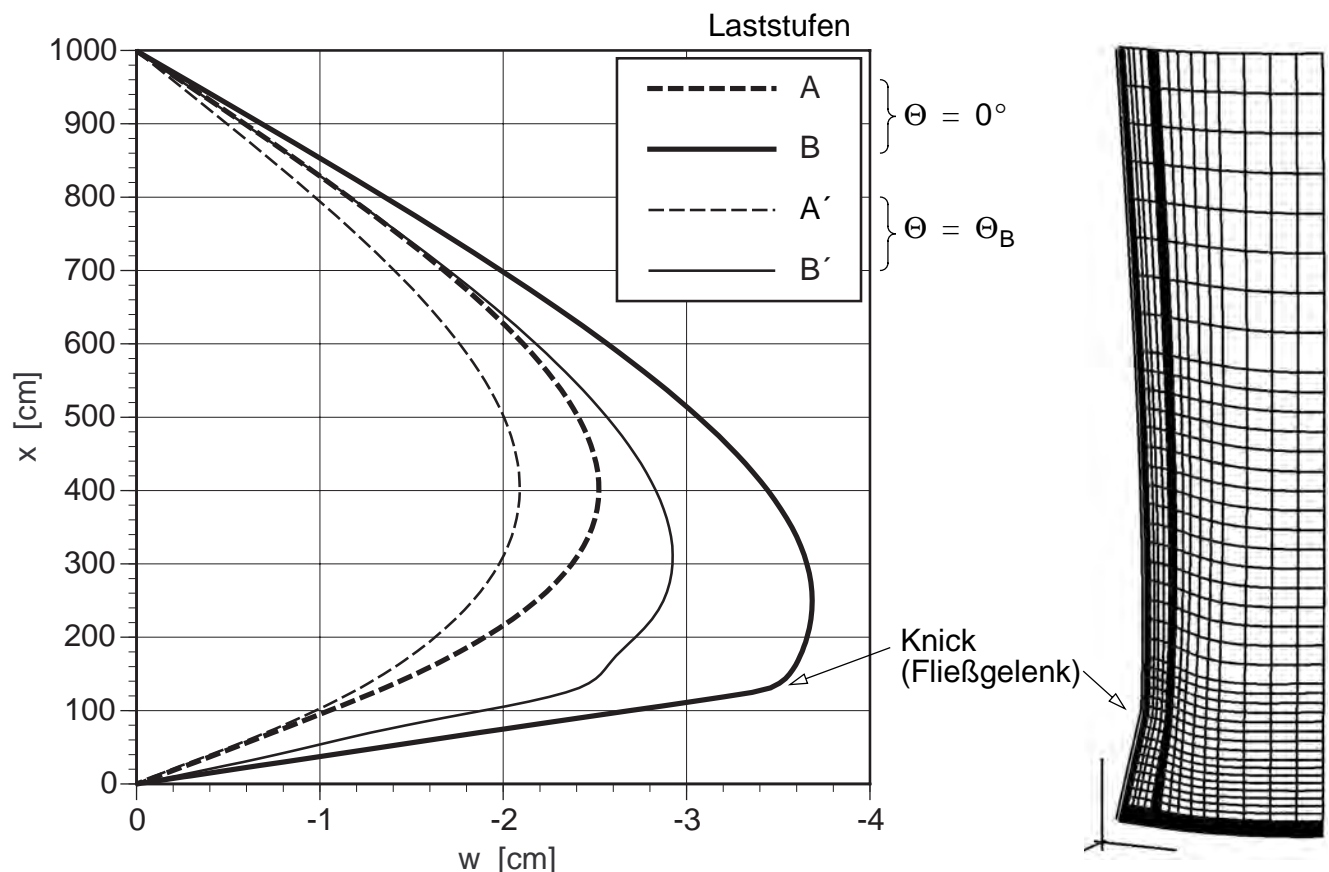


Bild 8-133 Radialverformungen für die Laststufen A, B und Beulverformung (Laststufe B) für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; *GMNA-Berechnung*

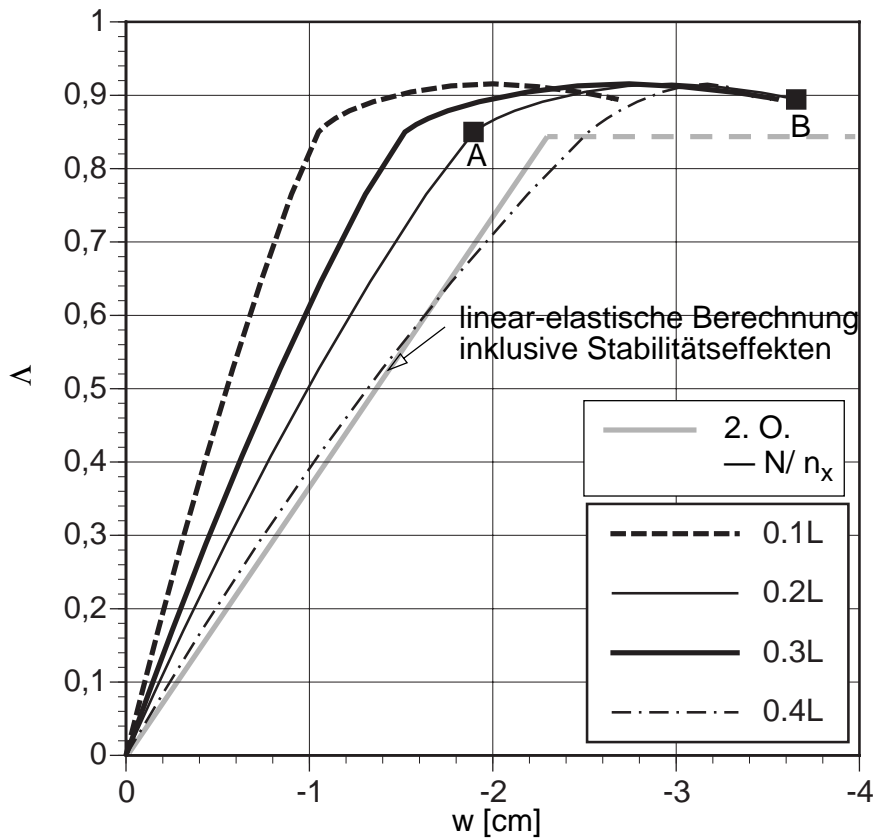


Bild 8-134 Last-Radialverschiebungsdiagramm für
Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; GMNA-Berechnung

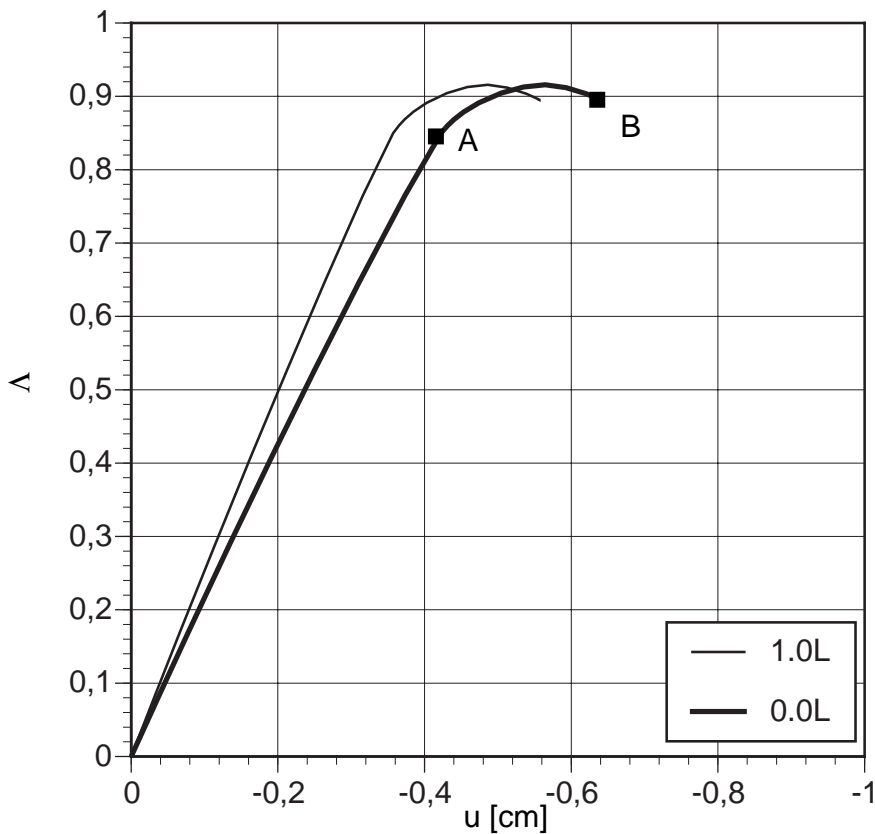


Bild 8-135 Last-Axialverschiebungsdiagramm für
Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; GMNA-Berechnung

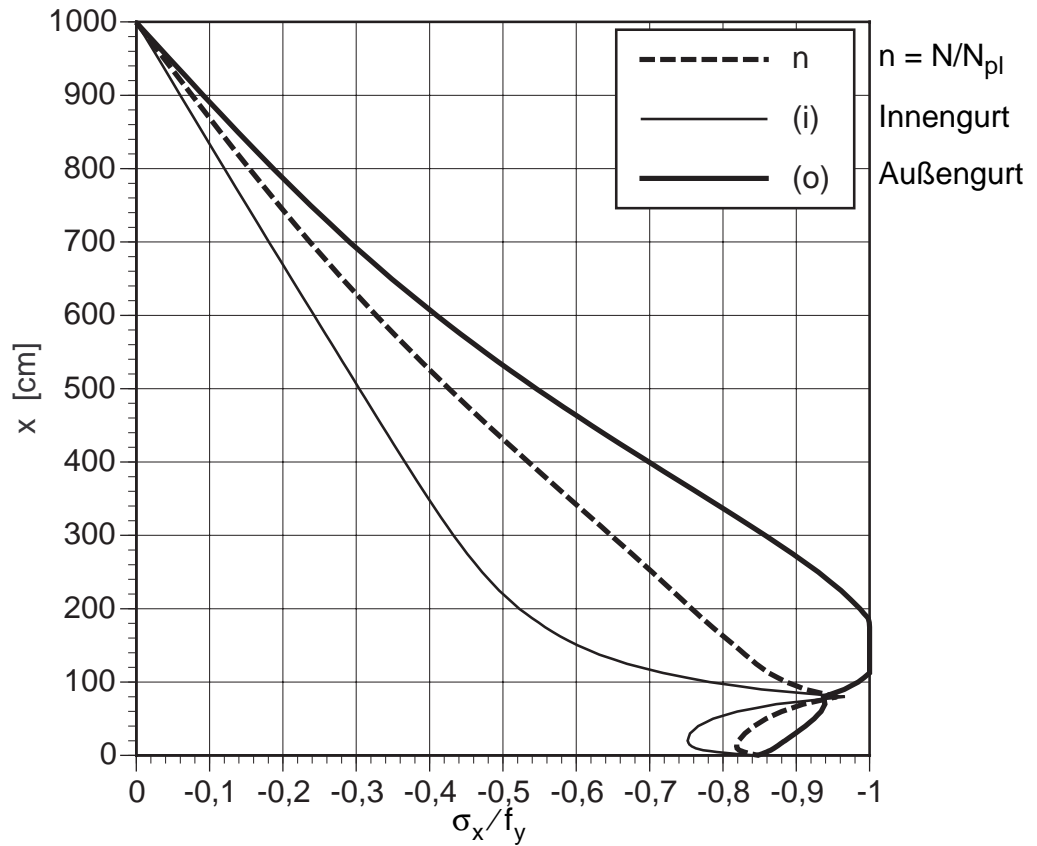


Bild 8-136 Querschnittsbeanspruchung der Längssteife an der Laststufe A für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; *GMNA-Berechnung*

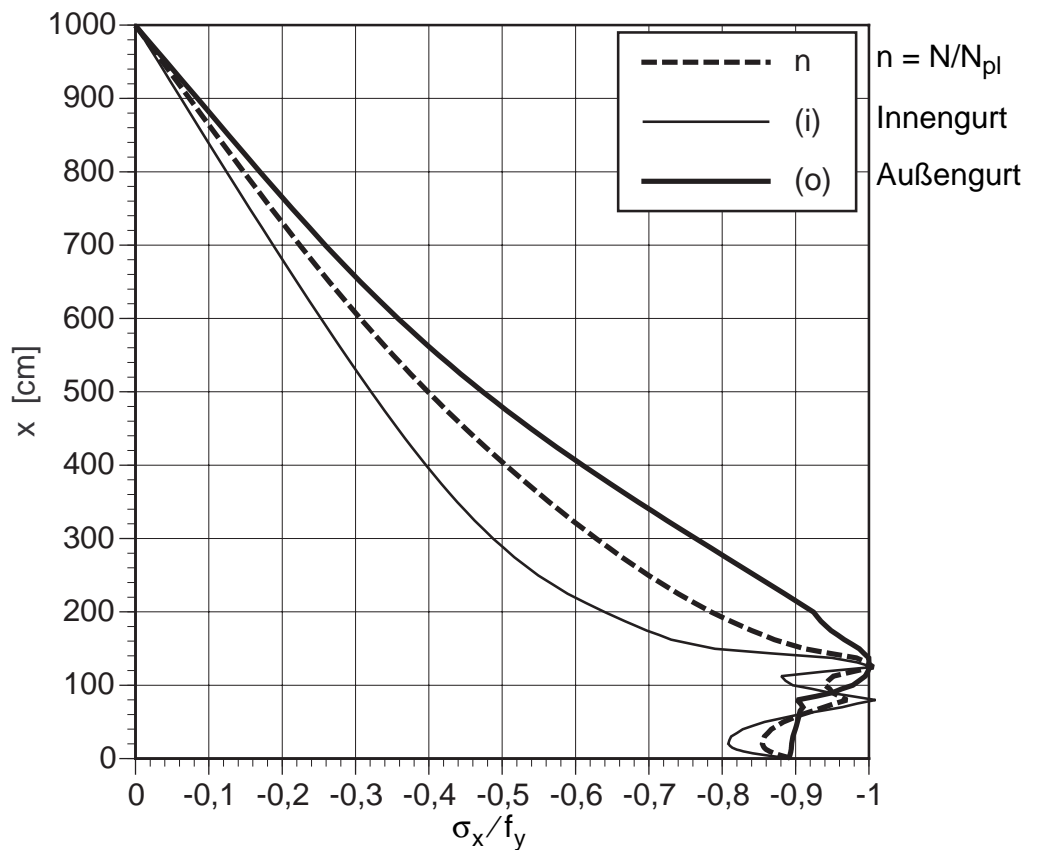


Bild 8-137 Querschnittsbeanspruchung der Längssteife an der Laststufe B für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; *GMNA-Berechnung*

8.3.5.4 Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen des imperfekten Systems (GMNIA)

Die GMNA-Berechnungen des perfekten Systems zeigen für Variante 1 (Auflagerlängssteife HEB 300) ein gemeinsames plastisches Versagen von Schale und Längssteife durch Ausbildung eines sogenannten Elefantenfußes im Auflagerbereich. Bei Variante 2 (Auflagerlängssteife HEB 160) liegt als Versagensform das elasto-plastische Knicken der Längssteife vor.

Vorkrümmung der Längssteife — Imperfektionsersatzlast

Den folgenden, dargestellten Berechnungsergebnissen liegt statt des imperfekten Systems (parabelförmige Verlauf in Meridianrichtung und kubischer Verlauf der Imperfektionsform in Umfangsrichtung in Bild 8-138.a) das perfekte System zugrunde. Ersatzweise wirkt die äquivalente Imperfektionsersatzlast an der Auflagerlängssteife (siehe Kap. 8.3.2.5).

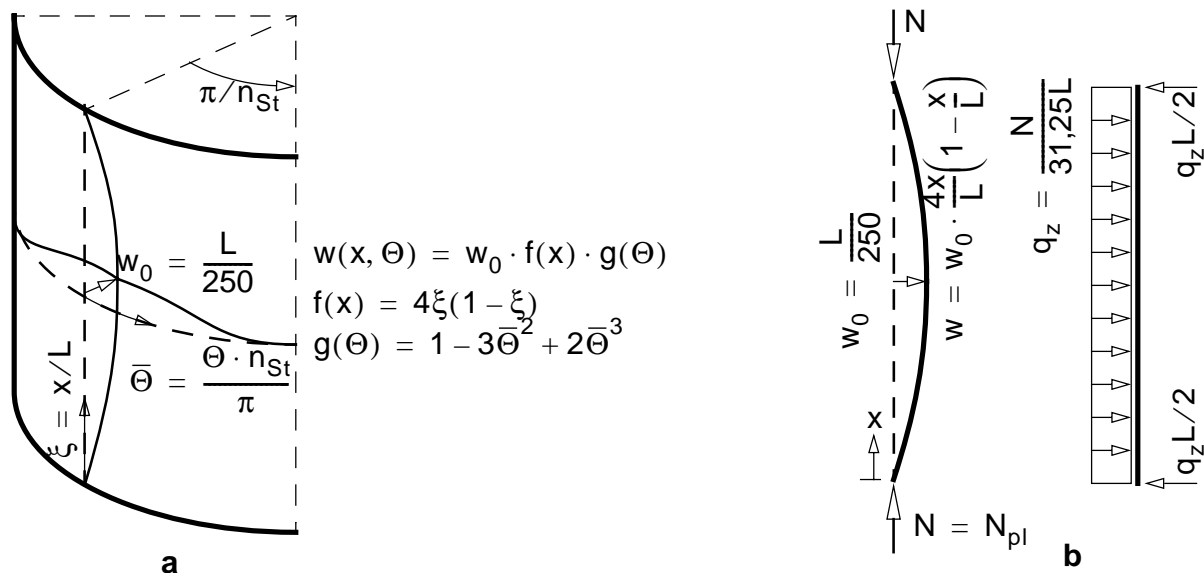


Bild 8-138 Berücksichtigung von Imperfektionen — **a.** geometrische Imperfektionsform und **b.** Imperfektionsersatzlast der Auflagerlängssteife

Darstellung der Ergebnisse

Es werden folgende Ergebnisse für beide Auflagerlängssteifen dargestellt:

- Beulverformungen analog den GMNA-Berechnungen anhand von Liniendiagrammen für ausgewählte Laststufen und die Nachbeulform für die Endlaststufe
- Last-Axial- und Last-Radialverschiebungsdiagramme für ausgewählte Punkte des Auflagerlängssteifenmeridians. Die Last-Radialverschiebungskurve für den Punkt $x/L = 0,4$ wird mit jener der linear-elastischen Berechnungen inklusive Stabilitätseffekten verglichen.

Ergebnisse für Variante 1 — HEB 300

Durch die zusätzliche Beanspruchung der Längssteife zufolge der Imperfektionslast verschiebt sich die maximal beanspruchte Stelle der Längssteife vom Auflagerbereich weg. Es bildet sich ein Fließgelenk in der Längssteife bei $x/L = 0,15$ aus, im Nachbeulbereich entsteht ein Knick in der Längssteife (siehe Bild 8-139).

Die Last-Verschiebungsdiagramme in Bild 8-140 spiegeln das elasto-plastische Knickversagen wieder. Zum Vergleich ist wiederum die Lastverschiebungskurve der linear-elastischen Berechnungen inklusive Stabilitätseffekten mit Doppelreihenlösung für den Punkt $x/L = 0,4$ dargestellt. Die Abtriebssterme $n_{x,init}$ und N_{init} der linear-elastischen Berechnungen liefern die Sekantensteifigkeit der Lastverschiebungskurve der GMNIA-Berechnungen bis zu 90% des Lastmaximums, danach ergeben sich durch die Ausbildung der Fließzone in der Längssteife zu Abweichungen zwischen den beiden Berechnungsarten. Es ergibt sich eine sichtlich gute Korrelation der bestimmten Tragfähigkeiten.

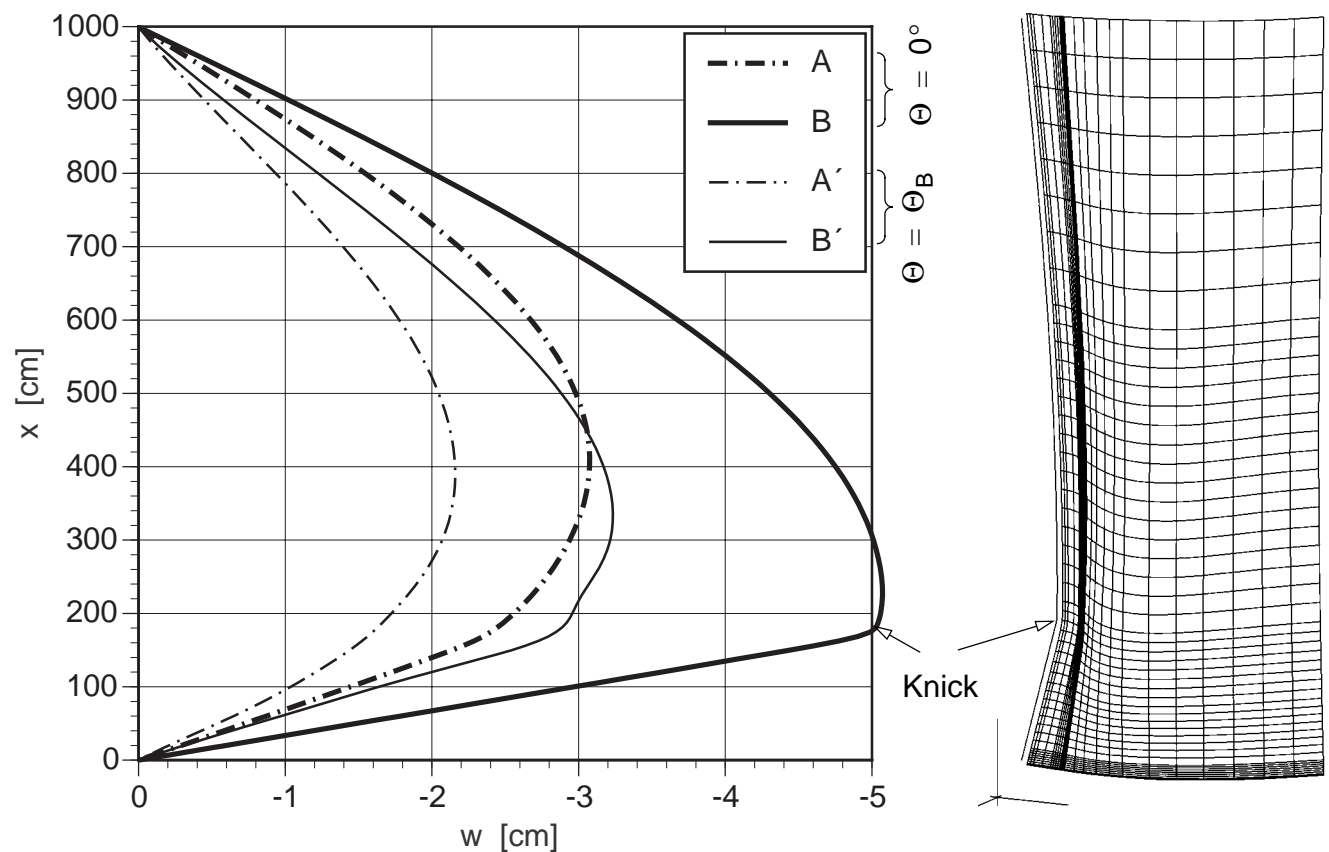


Bild 8-139 Radialverformungen für die Laststufen A, B und Beulverformung (Laststufe B)
— Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GMNIA-Berechnung

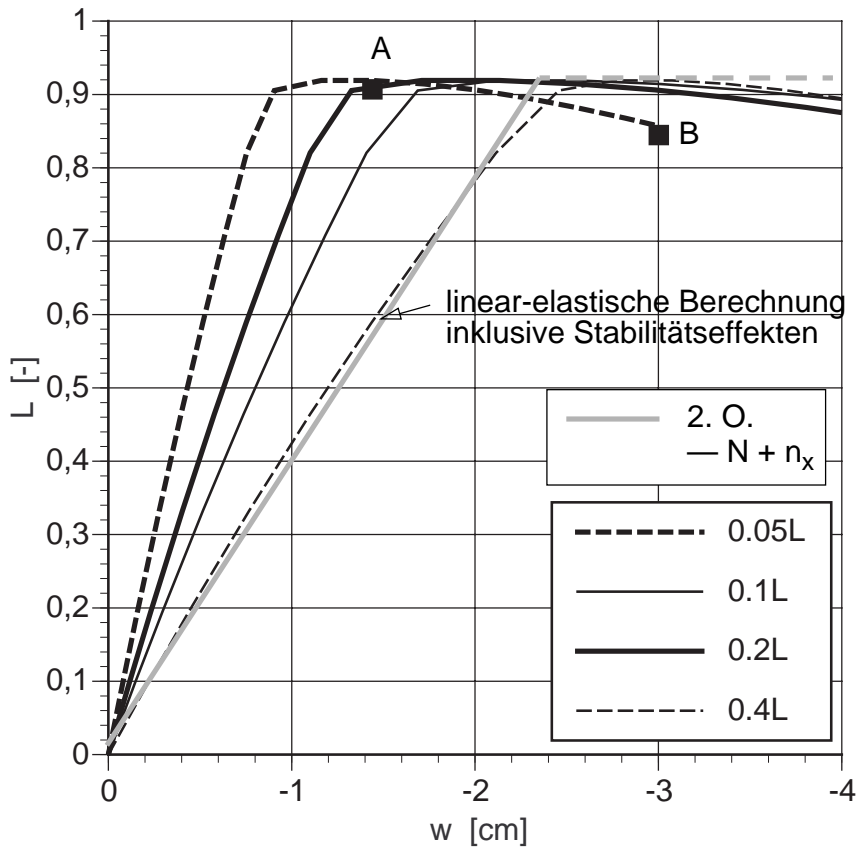


Bild 8-140 Last-Radialverschiebungsdiagramm für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GMNIA-Berechnung

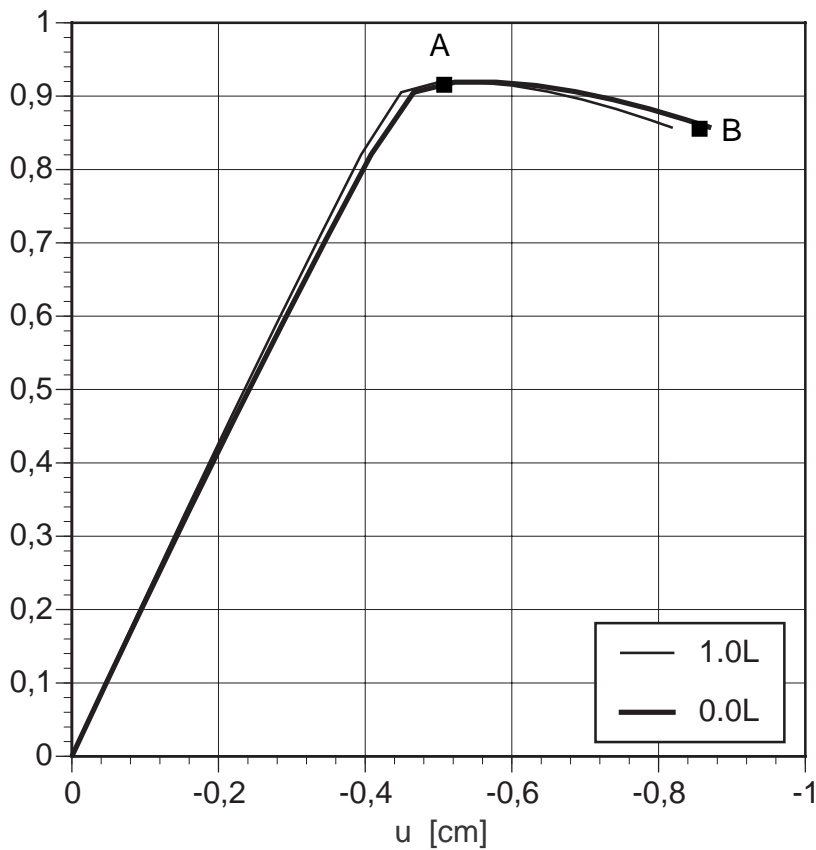


Bild 8-141 Last-Axialverschiebungsdiagramm für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$; GMNIA-Berechnung

Ergebnisse für Variante 2 — HEB 160

Die Ausbildung des Fließgelenkes in der Längssteife erfolgt nun noch prägnanter. Im Nachbeulbereich (Laststufe C) ist die Längssteife scharnierartig abgeknickt, im restlichen Bereich weist sie einen nahezu linearen Verlauf der Radialverformungen auf.

Zum Vergleich ist wiederum die Lastverschiebungskurve der linear-elastischen Berechnungen inklusive Stabilitätseffekten mit Doppelreihenlösung für den Punkt $x/L = 0,4$ in Bild 8-143 dargestellt. Die vordefinierten Abtriebskräfte der linear-elastischen Berechnungen liefern die Sekantensteifigkeit der nichtlinearen Lastverschiebungskurve bis zu 60% des Lastmaximums, danach ergeben sich durch die Ausbildung der Fließzone in der Längssteife zu Abweichungen zwischen den beiden Berechnungsarten. Es ergibt sich wiederum eine sichtlich gute Korrelation der bestimmten Tragfähigkeiten.

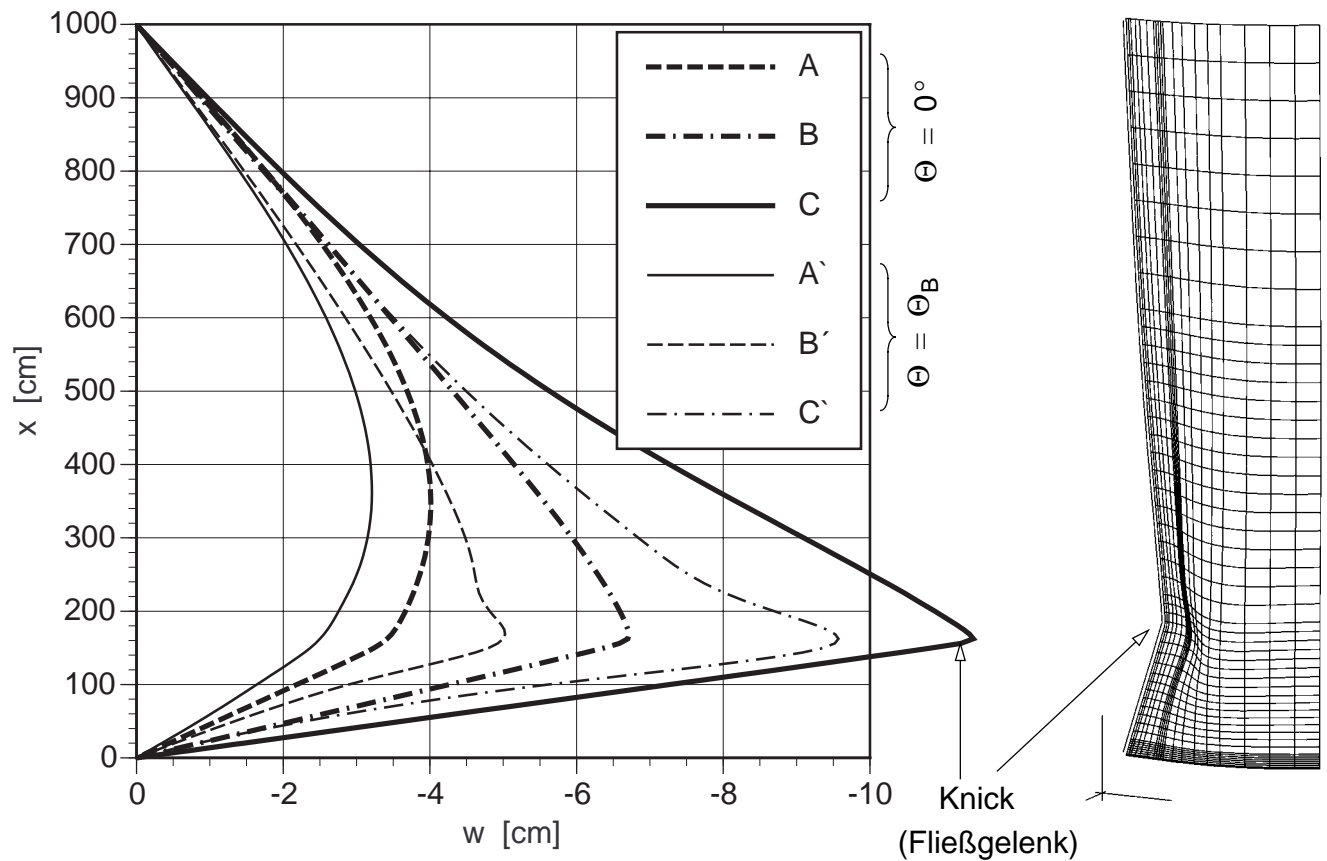


Bild 8-142 Radialverformungen für die Laststufen A, B, C und Beulverformung (Laststufe C) für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; GMNIA-Berechnung

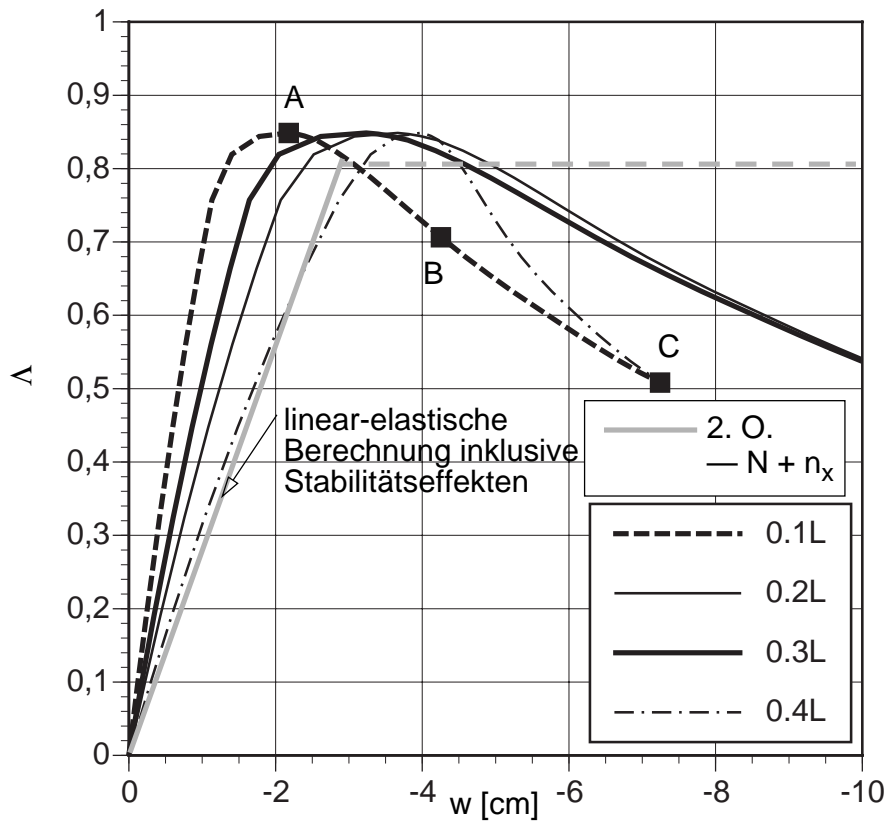


Bild 8-143 Last-Radialverschiebungsdiagramm für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; *GMNIA-Berechnung*

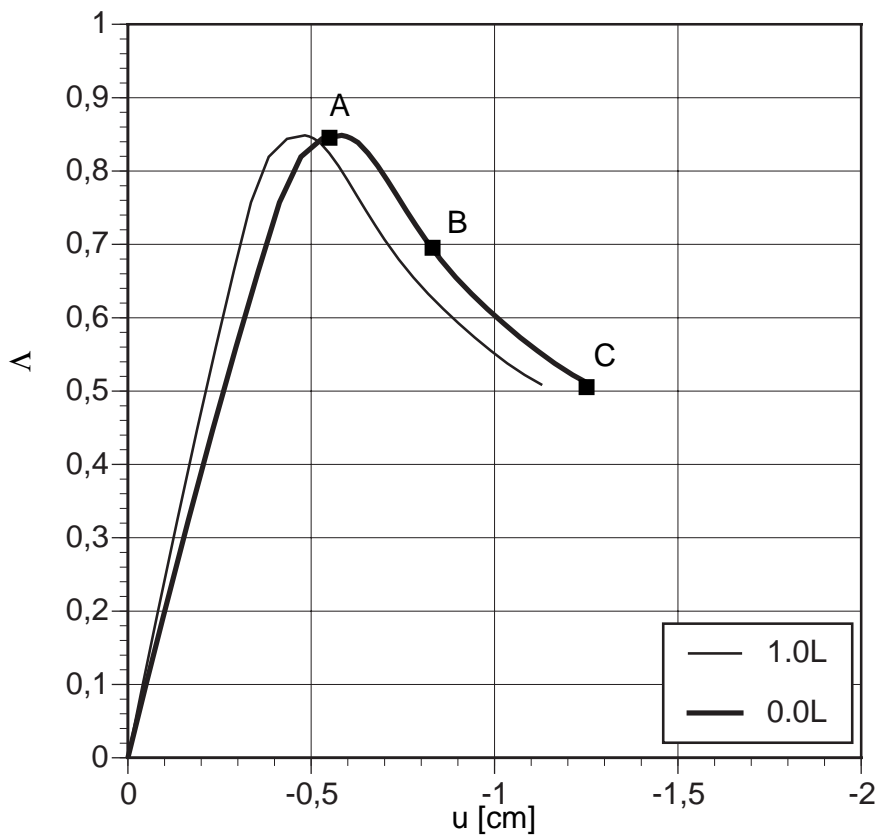


Bild 8-144 Last-Axialverschiebungsdiagramm für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$; *GMNIA-Berechnung*

8.3.5.5 Vergleich der Tragfähigkeiten

Der Vergleich der Tragfähigkeiten erfolgt für das

- perfekte System
- imperfekte System

Die Gegenüberstellung der Tragfähigkeitswerte erfolgt folgendermaßen:

- Tragfähigkeitswerte nach Theorie 1. Ordnung mit den Ergebnissen der MNA-Berechnungen
- Tragfähigkeitswerte nach Theorie 2. Ordnung mit den Ergebnissen der GMNA- bzw. GMNIA-Berechnungen

Die plastische Tragfähigkeit der Schalenwand bzw. des Auflagerbereiches entspricht auf Basis der linear-elastischen Berechnungen aufgrund der Festlegung der Auflagerteilkräfte und der zugeordneten Referenzbelastung dem Lastfaktor $\Lambda = 1, 0$.

Perfektes System

In Tab. 8-25 sind die Tragfähigkeiten der linearen Berechnungen und die Tragfähigkeiten der nichtlinearen Berechnungen für das perfekte System miteinander verglichen. Die Tragfähigkeiten der linearen Analysen (LA) sind zugehörig zum Versagen der Längssteife. Die Tragfähigkeiten, die sich aus der Beultragfähigkeit basierend auf der klassischen Beulberechnung (CBEV) ergibt, stellt eine untere Schranke der Tragfähigkeit des Gesamtsystems dar. Ein Grund dafür ist die Bestimmung der Beultragfähigkeit durch Anwendung der Beulabminderungsfaktoren für Axialbeulung.

Zusätzlich wird der Einfluß des Innendruckes berücksichtigt. Bei den GMNA-Analysen kommt es dabei zu einem Abfall der Tragfähigkeit mit steigendem Innendruck. Dies zeigt sich bereits bei der einfachen Spannungsinteraktion im Auflagerbereich im Zuge der linear-elastischen Spannungsberechnungen. Der Referenzdruck p_n entspricht der Initialumfangskraft $n_{\Theta, \text{init}}$.

Die Nichtberücksichtigung der hohen Beanspruchung der Schale durch die Axialkräfte und die hohen Randschubkräfte rechtfertigen die Resultate der MNA- bzw. GMNA-Analysen. Die Randschubkräfte entstehen aus Kompatibilitätsgründen, sie werden durch Plastifizierungen umgelagert. Vorweg wurden die Teillagerkräfte entsprechend einer vereinfachten Vergleichsspannungsbestimmung festgelegt. Der zugehörige Lastfaktor ist $\Lambda = 1, 0$.

Bei wölbstarrer Lagerung ergeben sich höhere Tragfähigkeiten für die MNA-Analysen, es stellt sich die bestmögliche Lagerkraftaufteilung automatisch ein. Die nachgiebige Lagerung erzwingt hingegen ein frühzeitiges Versagen am ungünstigsten Ort, eine Umlagerung ist nicht mehr möglich. Bei den GMNA-Analysen erhält man nahezu idente Ergebnisse, das Versagen ist durch die Ausbildung eines Fließgelenkes in der Längssteife bestimmt. Dies ist aber von der lokalen Situation im unmittelbaren Auflagerbereich unbeeinflusst. Weitere Untersuchungen werden mittels materiell nichtlinearen Berechnungen zur Bestimmung der optimalen Lagerkraftaufteilung in Kap. 8.3.6 durchgeführt.

Tab. 8-24 Vergleich der Tragfähigkeiten (Lastfaktoren Λ) der linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) mit den materiell nichtlinearen Analysen (MNA) des perfekten Systems

Variante	Linear-elastische Berechnung nach Theorie 1. Ordnung	nachgiebige Auflagerung ($F_L + F_S + F_Z$)	starre Auflagerung
	Lastfaktor Λ		
HEB 300, $n_{St} = 4$	0.985 1.000 ¹⁾	1.00	1.075
HEB 160, $n_{St} = 6$	0.872 1.000 ¹⁾	0.977	1.06

¹⁾ Spannungsinteraktion im Auflagerbereich

Tab. 8-25 Vergleich der Tragfähigkeiten (Lastfaktoren Λ) der linear-elastischen Spannungsberechnungen bzw. nichtlinearen FE-Beulberechnungen des perfekten Systems

Variante	Linear-elastische Berechnung nach Theorie 1. bzw. 2. Ordnung		geometrisch und materiell nichtlineare FE-Beulberechnungen (GMNA)		
			Innendruckbelastung	“nachgiebige” Auflagerung $F_L + F_S + F_Z$	starre Auflagerung
	Lastfaktor Λ			Lastfaktor Λ	
HEB 300, $n_{St} = 4$	2.O — N + n_x	0.979 1.000 ¹⁾	0· p_n	0.997	0.943
	2.O — N + n_x + n_Θ	0.990 ²⁾ 0.900 ¹⁾	p_n	0.934	0.946
HEB 160, $n_{St} = 6$	2.O — N + n_x	0.840 1.000 ¹⁾	0.0· p_n	0.916	0.929
	2.O — N + n_x + n_Θ	0.965 ²⁾ 0.900 ¹⁾	p_n	0.960	0.931

¹⁾ Spannungsinteraktion im Auflagerbereich

²⁾ ohne Berücksichtigung der Zusatzbeanspruchungen der Längssteife und der Schalenwand durch die Innendruckbelastung

Imperfektes System

In Tab. 8-26 sind die Tragfähigkeiten des imperfekten Systems miteinander verglichen. Bei den GMNIA-Analysen sind die Vorkrümmung der Längssteife sowohl als geometrische Imperfektion als auch als Ersatzlast berücksichtigt.

Bei Ansatz der geometrischen Imperfektion ergeben sich geringere Tragfähigkeiten, da das Imperfektionsmuster von Anfang an der nichtlinearen Berechnung am System in voller Größe aufgebracht ist und somit höhere Abtriebswirkungen am System bewirkt. Die Ersatzlast wird sukzessive im Zuge der nichtlinearen Berechnung mitgesteigert, die Reduktion der Tragfähigkeit ist nicht so groß.

Tab. 8-26 Vergleich der Tragfähigkeiten (Lastfaktoren Λ) der linear-elastischen Spannungsberechnungen (LA) bzw. geometrisch und materiell nichtlinearen Analysen (GMNIA) des imperfekten Systems

Variante	linear-elastische Berechnungen nach Theorie 2. Ordnung		nachgiebige Auflagerung ($F_L + F_S + F_Z$)		
			GMNA	GMNIA (Ersatzlast)	GMNIA (geom. Imp.)
	Lastfaktor Λ		Lastfaktor Λ		
HEB 300 $n_{St} = 4$	2.O — N + n_x	0.919	0.977	0.919	0.909
HEB 160 $n_{St} = 6$	2.O — N + n_x	0.805	0.916	0.849	0.760

8.3.6 Optimale Auflagerkraftaufteilung

Für das Anwendungsbeispiel wurden die Auflagerteilkräfte vorweg durch eine A-Priori-Annahme entsprechend einer vereinfachten Bestimmung der Vergleichsspannung im Auflagerbereich festgelegt. Nun wird diese Vorgabe der Auflagerteilkräfte überprüft bzw. die Bestimmung der optimalen Lagerkraftaufteilung mit materiell nichtlinearen Berechnungen (MNA) vorgenommen. Dies stellt eine Ergänzung zu Kap. 7 dar, wo nur zwei Auflagerkrafteinleitungsmechanismen — Lagerkraft F_Z der lokalen Randlagerung des Zylinderschafts bzw. Lagerkraft F_Z der lokalen Lagerung des Zylinderschaftes in Meridianrichtung bedingt durch das Schottblech — behandelt wurden.

Die erste Möglichkeit ist analog dem Vorgehen der linear-elastischen Spannungsberechnungen die Vorgabe der Lagerkräfte als gleichmäßig verteilte Kraftgruppen (nachgiebige Lagerung). Die Variation der Aufteilungsverhältnisse der Lagerkräfte im Zuge materiell nichtlinearer FE-Berechnungen und der Vergleich mit den Ergebnissen bei starrer Lagerung sollen Auskunft über die Grundannahmen der linearen Berechnungen geben. Die Vorgabe einer starren Lagerung durch die Behinderung der Axialverschiebungen im Lagerbereich (wölbstarre Auflagerfläche) stellt eine zweite Möglichkeit zur Simulation der Siloauflagerung für die materiell nichtlinearen Berechnungen (MNA) dar. Dabei stellen sich die Lagerkräfte zur Erzielung der maximalen plastischen Tragfähigkeit von selbst ein.

Starre Lagerung (Wölbstarre Auflagerfläche)

Die Lagerung aller Einzelteile im Auflagerbereich erfolgt mit der Verhinderung der Axialverschiebung ($u = 0$), es liegt somit eine Wölbehinderung der Lagerfläche in Bild 8-145 vor. Im FE-Berechnungsmodell wird das Schott mittels eines Fachwerkstabes simuliert. Als Fläche wird die äquivalente Lagerfläche des Schottes A_S^* verwendet. Die Exzentrizität der Anschlußfuge wird mitberücksichtigt um den Interaktionseffekt des entstehenden Schubspannungsfeldes (Bild 8-146 und Bild 8-147) mit den Axialspannungen der lokalen Randlagerung zu erfassen. Ansonsten kommt es zumindest für einen Anteil der Schottlagerkraft durch die Lage der theoretischen Anschlußfuge im Berechnungsmodell zu einer Kraftübertragung vom Schott direkt in die Längssteife. Dies ist in der Realität nur zutreffend wenn eine direkte Verbindung zwischen Schott und Längssteife (zentrischer Schweißanschluß) gegeben ist. Dieser Fall wird zu Vergleichszwecken ebenfalls untersucht.

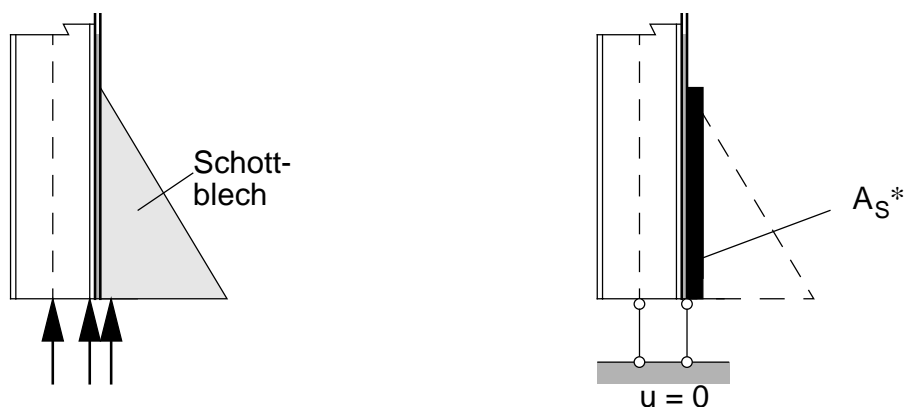


Bild 8-145 Auflagerkraftaufteilung und Vorgabe einer starren Lagerung

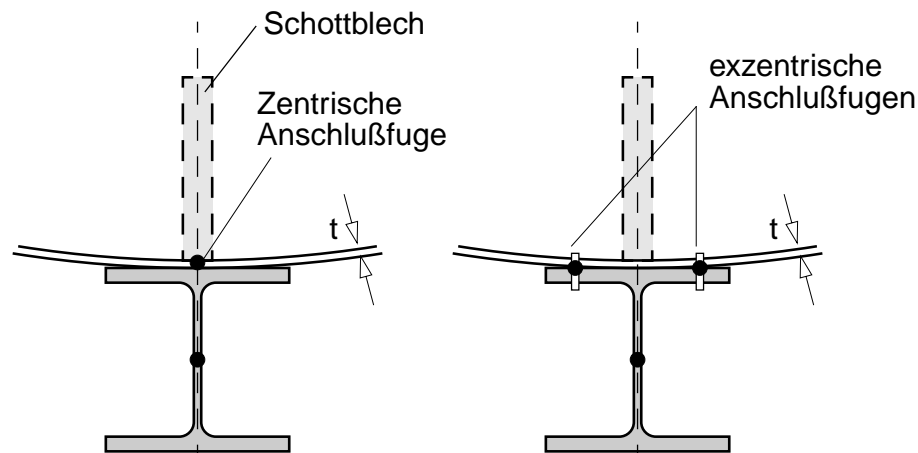


Bild 8-146 Lage der Anschlußfuge zwischen Schaft und Längssteife

Im allgemeinen wird die Schottlagerkraft F_S durch Schubkräfte in den Zylinderschaft geleitet, die Lagerkraft F_Z erzeugt im Auflagerbereich Meridiandruckbeanspruchungen (Bild 8-147). Die Lagerkraft F_L der Längssteife erzeugt im wesentlichen an der Auflagerfläche Druckspannungen in der Längssteife, sie ist in Bild 8-147 nicht dargestellt.

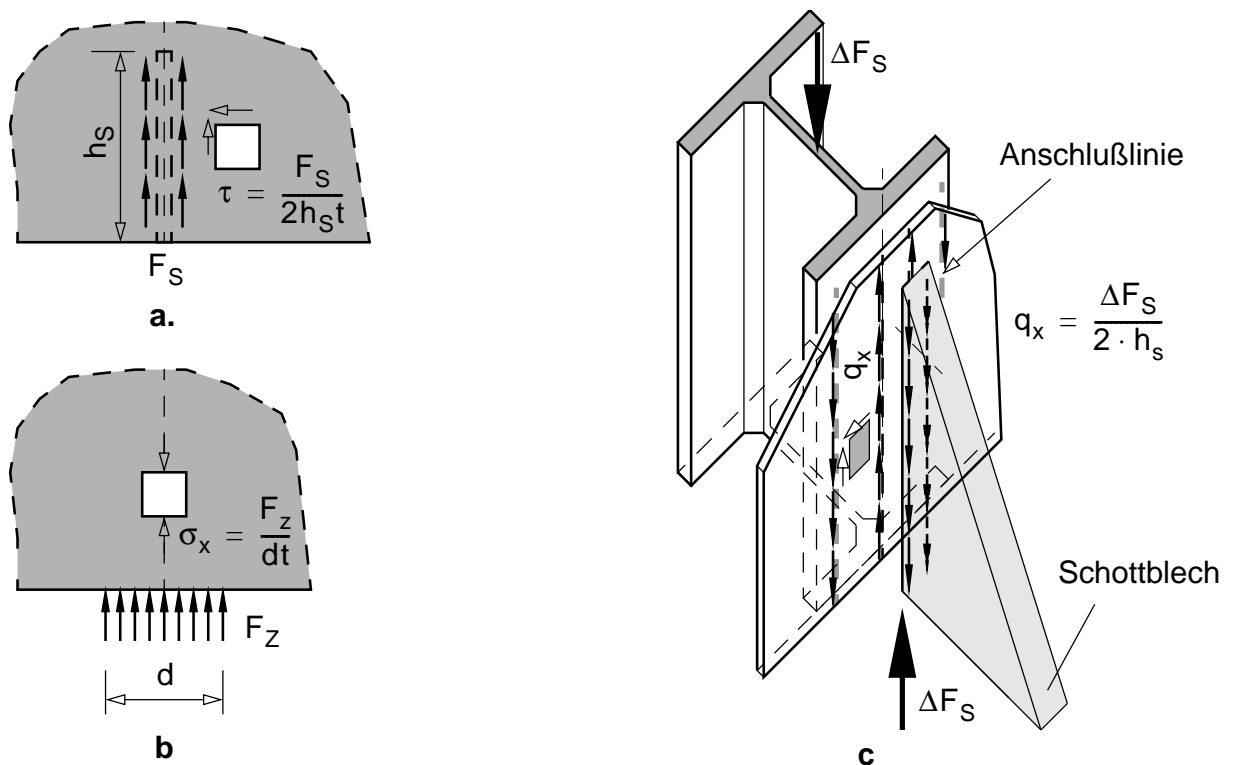


Bild 8-147 Spannungsinteraktion im Auflagerbereich — **a.** Schubspannungen zufolge Schottlagerkraft F_S , **b.** Axialspannungen zufolge Lagerkraft F_Z und **c.** Schubspannungsfeld bei exzentrischer Anschlußfuge für jenen Anteil ΔF_S , der in die Längssteife weitergeleitet wird.

Ist die Anschlußfuge (vertikaler Schraubstoß) zwischen Längssteife und Zylinderschaft exzentrisch, so bildet sich im Auflagerbereich auch für jenen Anteil von F_S , der in die Längssteife weitergeleitet (Kraft ΔF_S in Bild 8-147) wird, ein Schubspannungsfeld aus. Die Interaktion mit den Axialspannungen im Auflagerbereich bewirkt eine Verminderung dieses Anteiles und folglich eine Reduktion der Gesamtlagerkraft gegenüber dem Fall der (theoretischen) zentrischen Verbindungsfuge.

Liegt die zentrische Anschlußfuge vor, kann ein Anteil der Schottlagerkraft direkt in die Längssteife eingeleitet werden. Eine Interaktion mit den Axialspannungen tritt für diesen Anteil nicht auf. Dieser Anteil der Schottlagerkraft ist umso größer, desto geringer die Beanspruchung (Grundaussnutzung durch die Lagerkraft F_L) der Längssteife ist.

Starre Lagerung – Ergebnisse der materiell nichtlinearen Berechnungen

Die Auswertung der MNA-Berechnungen ergibt nun folgende Lagerkraftaufteilung in Tab. 8-27. Für die Modellierung des zentrischen Anschlusses von Längssteife und Schalenwand ergeben sich durchwegs höhere Auflagerteilkräfte. Dies ist, wie bereits erwähnt, durch jenen Anteil von F_S , der direkt ohne Interaktionseffekte mit den Meridiandruckspannungen in die Längssteife weitergeleitet wird, möglich. Die Auflagerkraft F_L erreicht in beiden Fällen nahezu die plastische Normalkrafttragfähigkeit N_{pl} der Längssteife.

Tab. 8-27 Lagerkraftaufteilung bei wölbstarrer Lagerung

Lagerkräfte	exzentrischer Anschluß		zentrischer Anschluß	
	[kN]	$F_i/F_{i,y}$	[kN]	$F_i/F_{i,y}$
F_L	3454	0.966	3456	0.966
F_Z	1931	1.025	1641	0.878
F_S	1354	0.612	1862	0.840
F	6739	—	6959	—

Bei den linear-elastischen Spannungsberechnungen und den zugehörigen nichtlinearen FE-Vergleichsberechnungen wurden die Schottlagerkraft und die Randlagerkraft entsprechend einer vereinfachten Bestimmung der Vergleichsspannung mit 70% ihrer plastischen Grenzkraft festgelegt. Verglichen mit der Teillagerkräften bei wölbstarrer Lagerung liegt man dieser Annahme auf der sicheren Seite.

Unendlich nachgiebige Lagerung – Vorgabe von Teilaufagerkräften

Zur Kontrolle werden nun die Lagerkräfte am Berechnungsmodell aufgebracht und die mit dieser Aufteilung erzielbare Tragfähigkeit berechnet. Hier wird dies exemplarisch für einige Kombinationen von

Aufteilungsfaktoren vorgenommen. Dabei werden Werte für die Einleitung über die Längssteife bzw. die lokale Randlagerung vorgegeben und die mögliche Schottkraft F_S bestimmt. Die Resultate sind in der nächsten Tabelle (Tab. 8-28) dargestellt.

Die Vorgabe der Teilauflegerkräfte behindert eine weitere Umlagerung, die Tragfähigkeit wird durch den ungünstigst beanspruchten Ort definiert. Gibt man die Teilauflegerkräfte F_L und F_Z entsprechend der wölbstarrten Lagerung bei exzentrischer Anschlußfuge vor, so stellt sich die Lagerkraft des Schottbleches erwartungsgemäß entsprechend der wölbstarrten Lagerung ein. Dies ist für diese Kombination der Lagerkräfte unbeeinflusst von der Lage der Anschlußlinie.

Gibt man nun abweichend davon die Teillagerkräfte F_L und F_Z vor, erhält man je nachdem ob eine zentrische oder exzentrische Anschlußfuge vorliegt, abweichende Ergebnisse für die einleitbare Auflagerkraft F_S . Dabei werden die Lagerkräfte der Längssteife F_L und der lokalen Randlagerung F_Z gemeinsam variiert.

Weiters ist in Tab. 8-28 die Gesamtlagerkraft dargestellt. Diese nimmt vor allem für den Fall des exzentrischen Anschlusses merklich ab.

Tab. 8-28 Lagerkraft F_S bei Vorgabe der Teilauflegerkräfte F_L und F_Z

Vorgegebene Teilauflegerkräfte				exzentrische Längssteifenanschlußlinien			zentrische Längssteifenanschlußlinie			
$\frac{F_L}{N_{pl}}$	$\frac{F_Z}{F_{Z,y}}$	F_L [kN]	F_Z [kN]	$\frac{F_S}{F_{S,y}}$	F_S [kN]	$F = F_L + F_Z + F_S$ [kN]	$\frac{F_S}{F_{S,y}}$	F_S [kN]	$F = F_L + F_Z + F_S$ [kN]	
0.95	1.00	3397	1885	0.605	1341	6623	0.621	1376	6658	
0.707	0.707	2529	1333	0.852	1890	4807	1.220	2704	6566	
0.50	0.50	1788	942	0.946	2096	3778	1.550	3436	6166	
Σ 6739 (starre Lagerung)							Σ 6959 (starre Lagerung)			

In Bild 8-148 ist die Interaktion der Teilauflegerkräfte im Auflagerbereich dargestellt. Bei exzentrischer Anschlußlinie der Längssteife bildet sich stets ein Schubspannungsfeld zwischen Schott und Schraubenlinie aus. Die Interaktion mit den Axialspannungen der Randlagerung des Zylinders kann unter Annahme konstanter Spannungsverteilungen mit der quadratischen Interaktion, der auf die jeweiligen plastischen Tragkräfte bezogenen Lagerkräfte beschrieben werden. Die Abweichungen der materiell nichtlinearen Berechnungen ergeben sich durch die ungleichförmigen und somit günstiger wirkenden Spannungsverteilungen. Qualitativ wird aber eine gute Übereinstimmung erzielt. Entsprechend den

vorgegebenen Auflagerkräften F_L und F_Z bei nachgiebiger Lagerung sinkt die Gesamtlagerkraft merklich ab. Der qualitative Verlauf der Interaktion ergibt sich analog der vereinfachten Vergleichsspannungsermittlung mit den Auflagernennspannungen σ_x und τ nach Bild 8-147. Die Variation der Auflagerkraft F_L beeinflusst diese Interaktion nicht, die Behandlung der Einleitungsmechanismen über die lokale Randlagerung in Umfangsrichtung und über das Schottblech kann entsprechend Kap. 7 isoliert erfolgen.

Bei zentrischer Anschlußfuge wird ein Teil der Schottlagerkraft je nach Beanspruchung der Längssteife direkt in die Längssteife eingeleitet. Dieser Anteil geht in die Interaktion mit den Axialspannungen nicht mehr ein. Dadurch steigt die Schottlagerkraft mit abnehmender Lagerkraft der Längssteife F_L und abnehmender Lagerkraft des Zylinders F_Z . Dadurch fällt die Gesamtlagerkraft kaum ab (siehe auch Tab. 8-28).

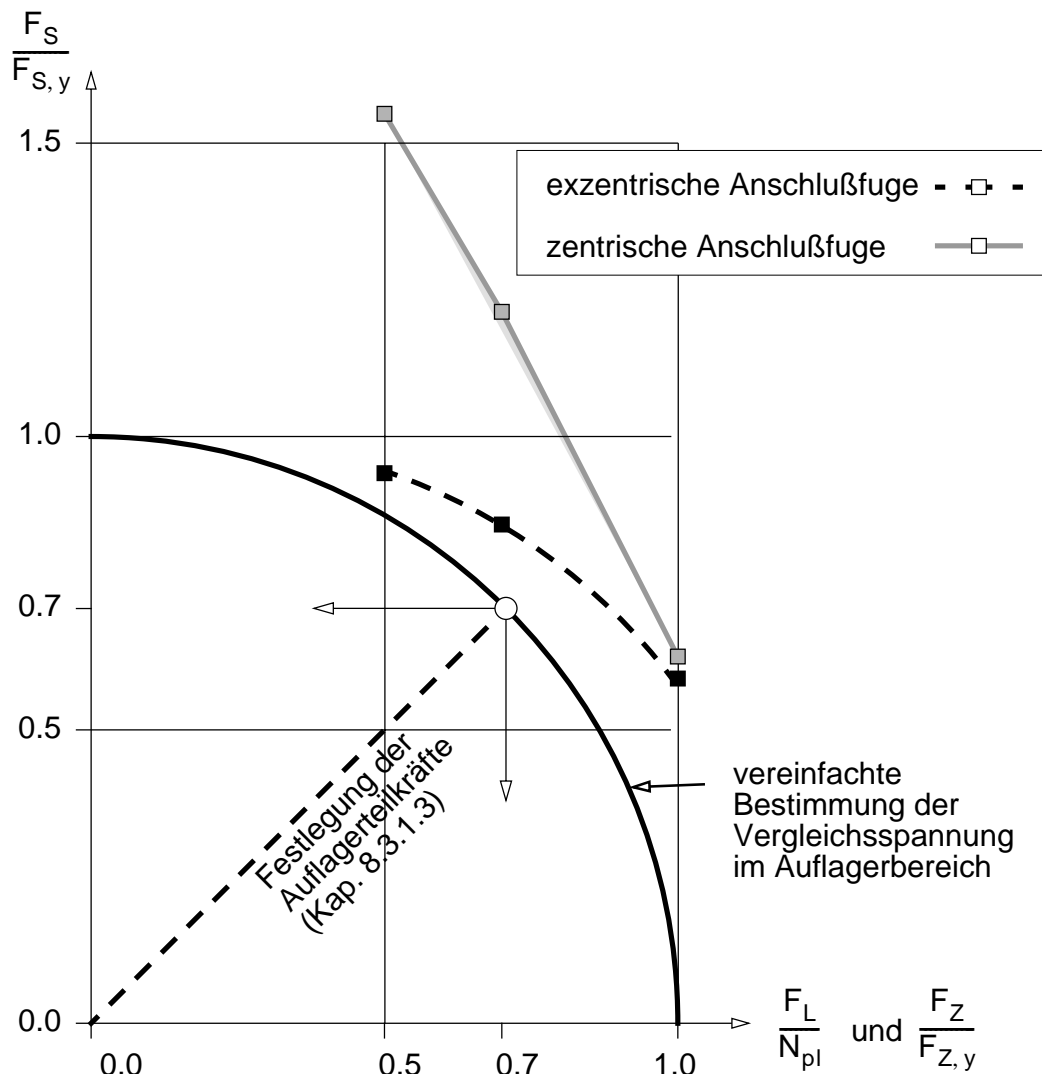


Bild 8-148 Auflagerteilkraft F_S in Abhängigkeit der wirkenden zentrischen Lagerkraft der Auflagerlängssteife F_L und der Randlagerkraft des Zylinderschafts F_Z und der Anordnung der Anschlußfuge

8.3.7 Zusammenfassung von Kap. 8.3.2

Die vorgenommenen Untersuchungen zeigen folgende Effekte:

- Als Versagensform zeigen die linearen und die nichtlinearen Berechnungen das elasto-plastische Knicken der Längssteife. Die Tragfähigkeiten werden mit dem linear elastischen Berechnungsmodell mit Stabilitätseffekten in guter Übereinstimmung berechnet.
- Die plastische Tragfähigkeit der Schalenwand wird mithilfe der linearen Berechnungen nicht durch die Auswertung der maßgebenden Vergleichsspannung bestimmt, ihr wird vorweg durch die festgelegte Auflagerkraftaufteilung Rechnung getragen. Die nichtlinearen Vergleichsberechnungen rechtfertigen diese Annahmen. Die Untersuchung der Auflagerkraftaufteilung bei starrer Lagerung des Schaft-Längssteifen-Systems untermauern diese Annahme.
- Die Beultragfähigkeit der Schale wurde mithilfe von FE-Beulberechnungen bestimmt. Bei den vereinfachten Stabilitätsberechnungen wurde nur die Axialbeulung der Schale beurteilt. Die nichtlinearen Berechnungen des perfekten Systems zeigen keine Tendenz zur Ausbildung lokaler Schalenbeulmuster. Dem imperfekten System wurde eine Vorkrümmung der Längssteife zugrunde gelegt.

Folgende Effekte wurden nicht untersucht:

- Biegedrillknicken der Längssteife,
- Untersuchung der Beultragfähigkeit der Schalenwand
 - Interaktion von Axial- und Schubbeulung in der Schale
 - Bestimmung der maßgebenden Imperfektionsform der Schale

8.4 Plastische Grenztragfähigkeit der Auflagerlängssteife und der Schalenwand

Im folgenden wird das Tragverhalten des Schaft-Längssteifen-Systems bei alleiniger zentrischer Belastung der Längssteife durch die Auflagerkraft F_L und bei konstanter Wandschubbelastung p_x des Schaftes untersucht. Diese Belastung wurde bereits als Teillastfall der linear-elastischen Spannungsberechnungen des Anwendungsbeispiels (siehe Kap. 8.3.2) bzw. als eigens betrachteter Lastfall der linearen FE-Beulberechnungen (Lastfall II siehe Kap. 8.3.4) behandelt.

Es werden folgende Untersuchungen, denen eine rein elastische Auflagerlängssteife zugrundegelegt wird, vorgenommen:

- Plastische Grenztragfähigkeit der Schalenwand
- Berücksichtigung von Stabilitätseffekten:
Bestimmung der Beultragfähigkeit mithilfe von geometrisch nichtlinearen FE-Beulberechnungen
- Berücksichtigung des Glättungseffektes (Versteifungseffektes) zufolge Innendruckbelastung

Plastische Grenztragfähigkeit der Schalenwand

Die traditionelle Modellbildung und die folgende Behandlung des Schaft-Längssteifen-Systems anhand herausgelöster Gleichgewichtssysteme erfolgt durch die Annahme konstant verteilter Koppelschubkräfte q_x zwischen Schaft und Längssteife (siehe Kap. 1.1.4). Dabei bildet sich im Schaft ein reiner Schubmembranspannungszustand aus, der Normkraftverlauf der Längssteife ist linear veränderlich. Diese herausgelösten Gleichgewichtssysteme sind nochmals in Kap. 8.4.1.1 dargestellt.

Am kombinierten Schaft-Längssteifen-System entstehen aus Kompatibilitätsgründen ungleichförmig verteilte Koppelschubkräfte zwischen Schaft und Längssteife. Die folgende Biegemomenten-Normkraftbeanspruchung der Längssteife bzw. die erhöhten Beanspruchungen der Schale limitieren die Tragfähigkeit des Schaft-Längssteifen-Systems (siehe Kap. 8.3.2 bzw. Kap. 8.3.5).

Wird das Versagen der Längssteife ausgeschlossen, so kann es mit dem Ansteigen der Last zu einem zunehmenden plastischen Ausgleich der Schubspannungen in der Schale kommen. Letztendlich könnte ein plastischer Grenzversagensmodus der Schalenwand, der mit seinen Kräfteverteilungen dem idealen Membranspannungszustand entspricht, erreicht werden. Die ungleichförmig verteilten Schubspannungen sind verschwunden, es hat sich entsprechend dem idealen Membranspannungszustand eine in Axialrichtung konstanter und in Umfangsrichtung linear veränderlicher Schubspannungszustand in der Schale eingestellt.

In Kap. 8.2.3 wurden im Zuge linear-elastischer Parameterstudien Steifigkeitsgrenzfälle gezeigt, bei denen sich die Schnittkräfte entsprechend der herausgelösten Gleichgewichtssysteme von Schaft und Längssteife einstellen.

Es stellt sich die Frage, ob sich im Falle einer ausreichend tragfähigen — also entsprechend dimensionierten — Längssteife der ideale Schubmembranspannungszustand im Zuge einer plastischen Berechnung (MNA) wirklich als plastischer Endzustand ausbilden kann. Den folgenden Berechnungen ist, wie bereits erwähnt, eine rein elastische Auflagerlängssteife zugrundegelegt.

Berücksichtigung von Stabilitätseffekten

Die Berücksichtigung von Stabilitätseffekten am realen System — bei der idealisierten Berechnung der Längssteifenknickens mithilfe des erarbeiteten Rechenmodelles inklusive Stabilitätseffekten bzw. den durchgeführten linearen Beulberechnungen (CBEV) — tritt globales bzw. lokales Beulversagen des Schaft-Längssteifen-Systems ein. Dies bedeutet am realen System ein unter Umständen vorzeitiges Versagen, die plastische Grenztragfähigkeit der Schalenwand könnte somit nicht erreicht werden.

Berücksichtigung des Glättungseffektes zufolge Innendruckbelastung

Ein weiterer Effekt, der untersucht wird, ist der versteifende Effekt der Innendruckbelastung. Die linear-elastischen Spannungsberechnungen inklusive Stabilitätseffekten zeigen, daß die Biegebeanspruchung der Längssteife mit steigender Innendruckbelastung sinkt. Dies bedeutet, daß zwar die Längssteife tragfähiger wird aber im Gegenzug die auftretende Umfangsbeanspruchung der Schale eine neue Limitierung der Tragfähigkeit der Schalenwand bedeutet

8.4.1 Materiell nichtlineare Berechnungen (MNA)

8.4.1.1 Herausgelöste Gleichgewichtssysteme

Diese herausgelösten Gleichgewichtssysteme von Schaft und Längssteife wurden bereits in Kap. 1.1.4 behandelt und werden hier nochmals dargestellt. In Bild 8-149 wirkt die zentrische Auflagerkraft F_L der Längssteife und die entgegengesetzt gerichtete Wandschubbelastung p_x am Schaft. Zur Gewährleistung der statischen Kompatibilität wirken zwischen Längssteife und Schale die konstanten Koppelschubkräfte q_x , der Normalkraftverlauf in der Längssteife ist somit linear veränderlich und die Schale wird nur durch Schubmembrankräfte beansprucht.

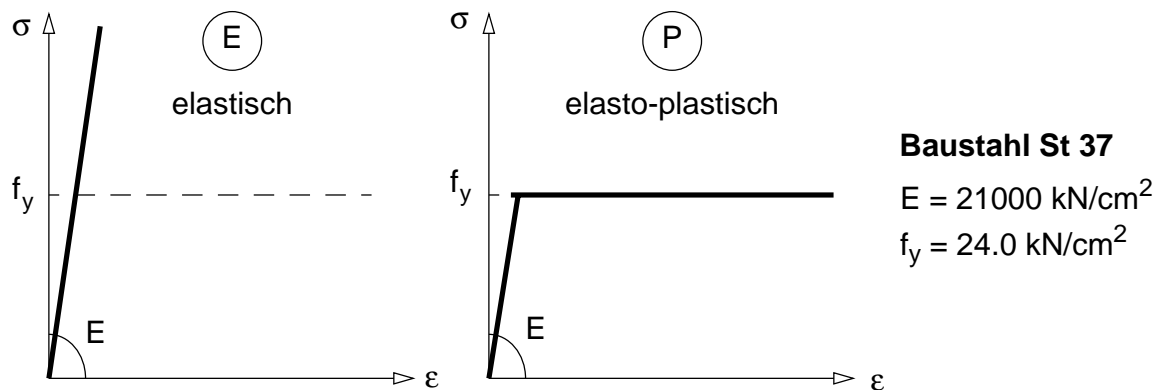


Bild 8-151 Materialverhalten von Auflagerlängssteife und Schalenwand

Elasto-plastische Längssteife

Die Versagenslast wird durch die Normalkrafttragfähigkeit der Längssteife definiert. Dies ist bereits aus den Resultaten der linearen Berechnungen ersichtlich, die maximal beanspruchte Stelle ist im unteren Bereich der Längssteife. Beim vorliegenden Anwendungsbeispiel zeigt sich, daß für beide Varianten — HEB 300 bzw. HEB 160 — die maximal beanspruchte Stelle der Auflagerquerschnitt der Längssteife ist.

Elastische Längssteife

Das Versagen liegt, wie die folgenden Berechnungen zeigen werden, nunmehr in der Zylinderschalenwand. Mit steigender Last (Lastfaktor Λ) können die ungleichförmig verteilten Schubspannungen durch die fortschreitende Ausbildung einer plastische Zone vom unteren Rand des Schaftes her mehr und mehr den Grenzwert der plastischen Schubtragfähigkeit erreichen. Letztendlich bildet sich im Grenzzustand der ideale Membranspannungszustand aus. Kennzeichnend ist, daß für ein praktische relevante Geometrieparameter (Dicke der Schalenwand und Längssteifendimensionen) der ideale Membranspannungszustand im Vergleich mit dem Versagen der plastischen Längssteife beträchtlich höher liegt.

Referenzbelastung

Als Referenzlast F_{ref} wird für die materiell nichtlinearen Berechnungen (MNA) bzw. die folgende Ergebnisdarstellung die mögliche über Schubkräfte in die Zylinderschale einleitbare Last (Schubfließlast) verwendet.

$$F_{\text{ref}} = 2 \cdot f_y \cdot t \cdot H / \sqrt{3} = 27128 \text{ kN} \quad (8-100)$$

Der Lastfaktor Λ_L , der das Erreichen der hier fiktiven plastischen Tragfähigkeit der Längssteife kennzeichnet, erreicht folgenden Wert.

$$\Lambda_L = N_{\text{pl}} / F_{\text{ref}} = 3576 / 27128 = 0,129 \quad (8-101)$$

8.4.1.3 Darstellung der Ergebnisse

In Zustandsdiagrammen werden für mehrere Laststufen die Verläufe folgender signifikanter Größen der Längssteife bzw. der Zylinderschale dargestellt:

- bezogene Normalkraftbeanspruchung $n = N/N_{pl}$ der Auflagerlängssteife (Bild 8-152)
- Biegemomentenbeanspruchung $m = M/M_{pl}$ der Auflagerlängssteife (Bild 8-153)
- Radialverformung w der Auflagerlängssteife der Auflagerlängssteife (Bild 8-154)
- bezogene Membranschubspannung $\tau_{x\theta}/\tau_y$ im Längssteifenmeridian (Bild 8-155)
- bezogene Membranschubspannung $\tau_{x\theta}/\tau_y$ am unteren Rand der Schalenwand (Bild 8-156)
- plastische Vergleichsdehnung ε_{peq} der Schalenmittelfläche entlang des Auflagerlängssteifenmeridianes (Bild 8-157)

Zu Vergleichszwecken werden einige Größen bei elastischer Längssteife und elastischer Schalenwand dargestellt (Linie "E" in den folgenden Abbildungen).

Die Größen bei elastischer Längssteife und elastischer Schalenwand entsprechen, da ja keine geometrischen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden, jenen der linear-elastischen Spannungsberechnungen. Es sind somit die Normalkraft N , das Biegemoment M und die Radialverformung w für die Laststufe $\Lambda = 1,0$ dargestellt, um so den Unterschied zwischen dem plastischen Grenzzustand und den linearen Berechnungsergebnissen zu veranschaulichen.

Der Lastfaktor $\Lambda = 0,129$ stellt jenen Lastfaktor dar, bei dem die plastische Tragfähigkeit der Längssteife erreicht wird ($\Lambda = \Lambda_L$).

Für spezielle Ergebnisgrößen werden im späteren die Abhängigkeiten von der aktuellen Laststufe (Lastfaktor Λ) dargestellt:

- Last-Biegemomentendiagramme (Bild 8-158)
- Last-Radialverschiebungsdiagramme (Bild 8-159)
- Last-Schubspannungsdiagramme (Bild 8-160)
- Last-Dehnungsdiagramme (Bild 8-161)

8.4.1.4 Zustandsdiagramme

Die Normalkraft der Längssteife mit ihrem anfänglich stark abnehmenden Verlauf nimmt mit steigendem Lastfaktor Λ immer mehr einen linear veränderlichen Verlauf an. Dies ist durch die zunehmend plastisch verteilten Schubkräfte der Schalenwand bedingt (siehe Bild 8-156). Der qualitative Unterschied ist durch Vergleich der Linie "E" für eine elastische Schalenwand mit dem Normalkraftbild für $\Lambda = 1,0$ (plastischer Grenzzustand) in Bild 8-152 sehr gut sichtbar.

Das maximale Biegemoment der Längssteife in Bild 8-153 wird circa beim Lastfaktor $\Lambda = 0,60$ erreicht. Dies deckt sich auch mit der Entwicklung der Radialverschiebung w . Der Verlauf des Biegemomentes ändert sich mit steigender Last, das Momentenmaximum verschiebt sich sukzessive zum oberen Rand hin. Dies erfolgt entsprechend der vom unteren Rand her plastisch konstant verteilten Schubkräfte.

Aus den Zustandsdiagrammen für die Membranschubspannungen der Schalenwand bzw. die plastischen Dehnungen ist die Ausbreitung der plastischen Zone zu sehen. Letztendlich nimmt die Membranschubspannung einen in der Axialrichtung konstanten und in Umfangsrichtung linear veränderlichen Verlauf an - siehe Bild 8-155 und Bild 8-156.

Die plastischen Dehnungen ε_{peq} erreichen im Längssteifenmeridian am unteren Rand der Schale ihren Maximalwert. Im Endzustand erreicht man in Bild 8-157 in der Anschlußfuge sehr hohe äquivalente plastische Dehnungen von ca. 50%.

Dabei ist zu bemerken, daß diese hohen Dehnungen im praktischen Fall zu mit einem reiverschluartigen Versagen der Verbundfuge von Auflagerlängssteife und Schalenwand bzw. der Schalenwand selbst führen können. Weiters ist das verwendete plastische Materialmodell (lineare Plastizität), welches den materiell nichtlinearen FE-Berechnungen (ABAQUS (1997)) zugrundeliegt, auf seine Anwendbarkeit für diese höheren Laststufen zu überprüfen.

Bei Erreichen des Lastfaktors $\Lambda_L = 0,129$ (plastische Tragfähigkeit der Längssteife) erreichen diese Dehnungen das ca. dreifache der Fließdehnung ($\varepsilon_{peq} = 4,28 \cdot 10^{-3}$).

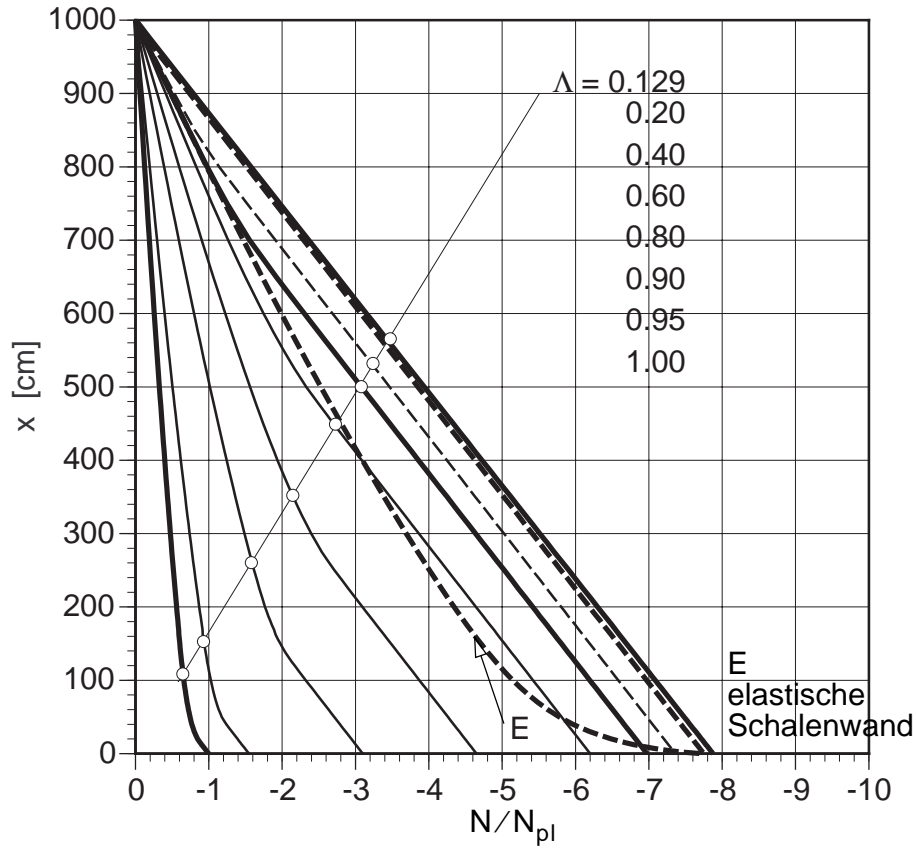


Bild 8-152 Normalkraftbeanspruchung der elastischen Auflagerlängssteife für verschiedene Laststufen

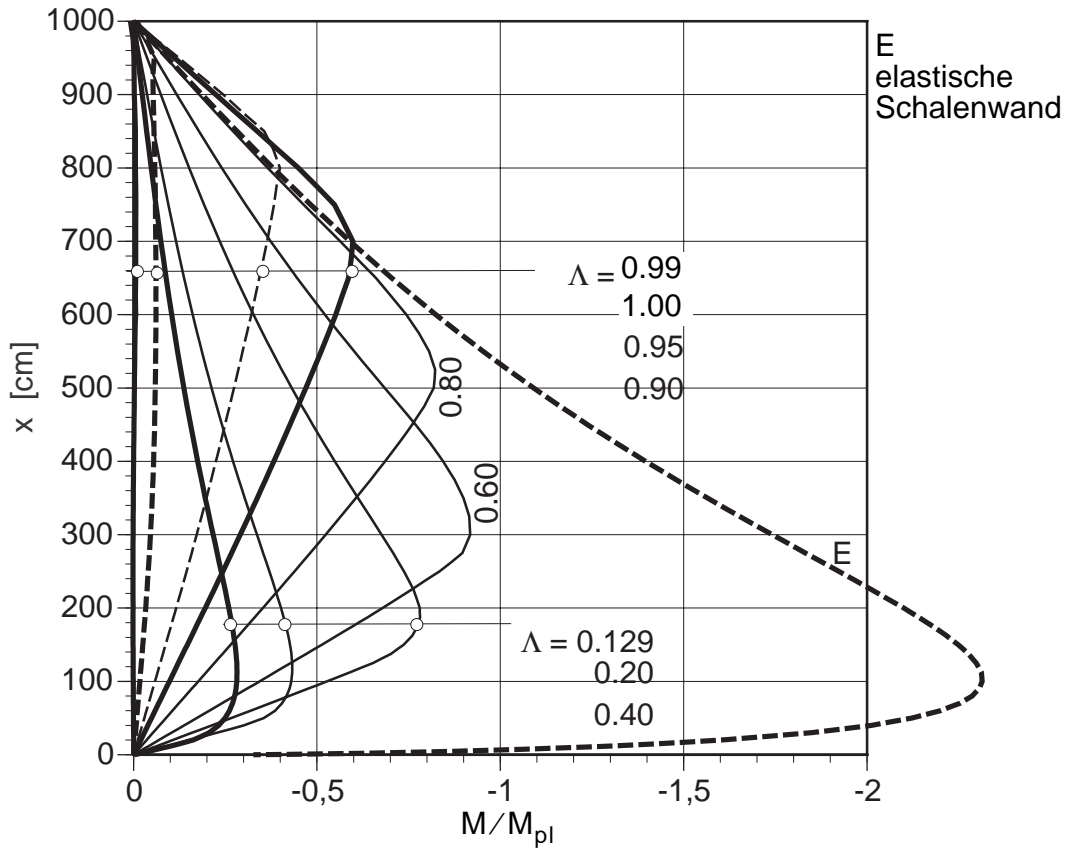


Bild 8-153 Biegemomentenbeanspruchung der elastischen Auflagerlängssteife für verschiedene Laststufen

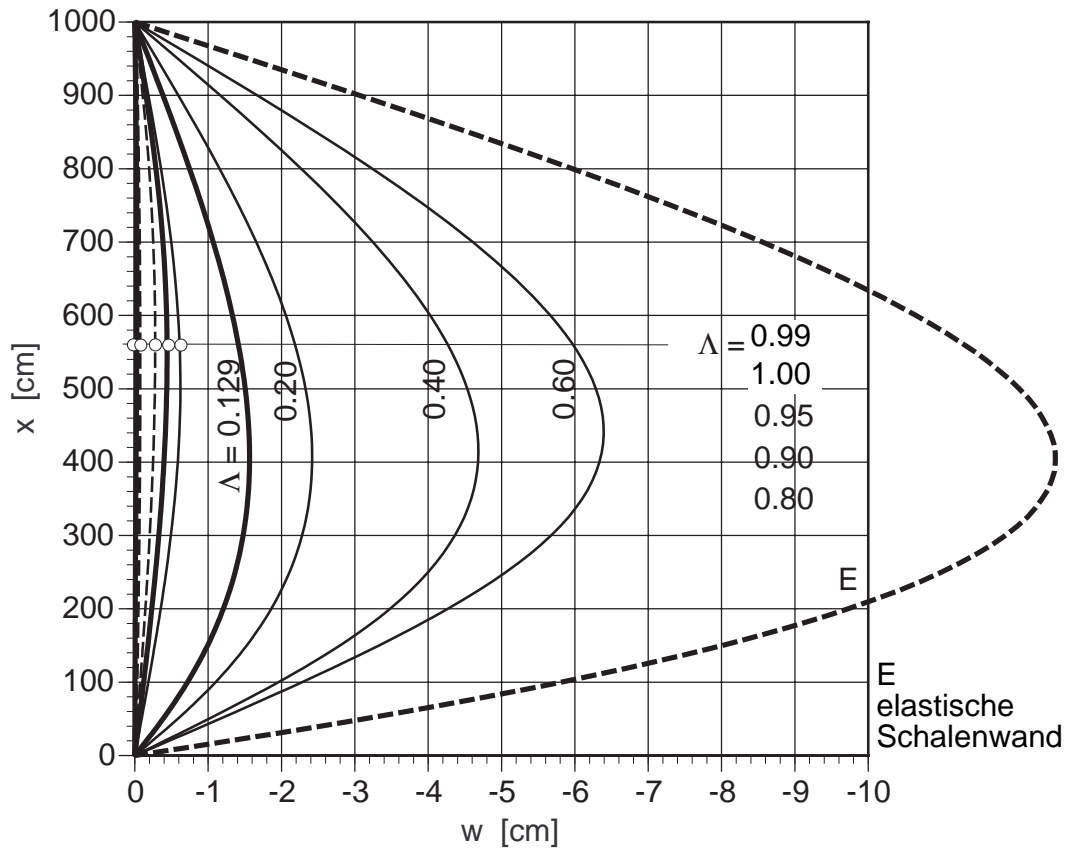


Bild 8-154 Radialverformung der elastischen Auflagerlängssteife für verschiedene Laststufen

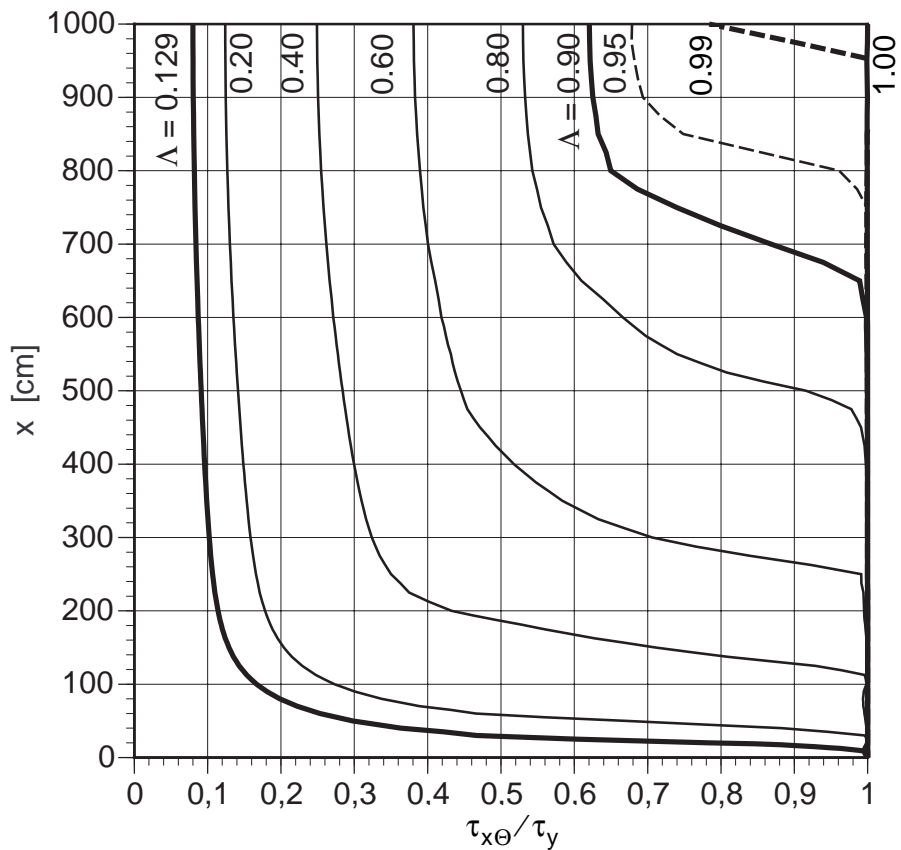


Bild 8-155 Membranschubspannungen der Schalenwand im Auflagerlängssteifenmeridian für verschiedene Laststufen

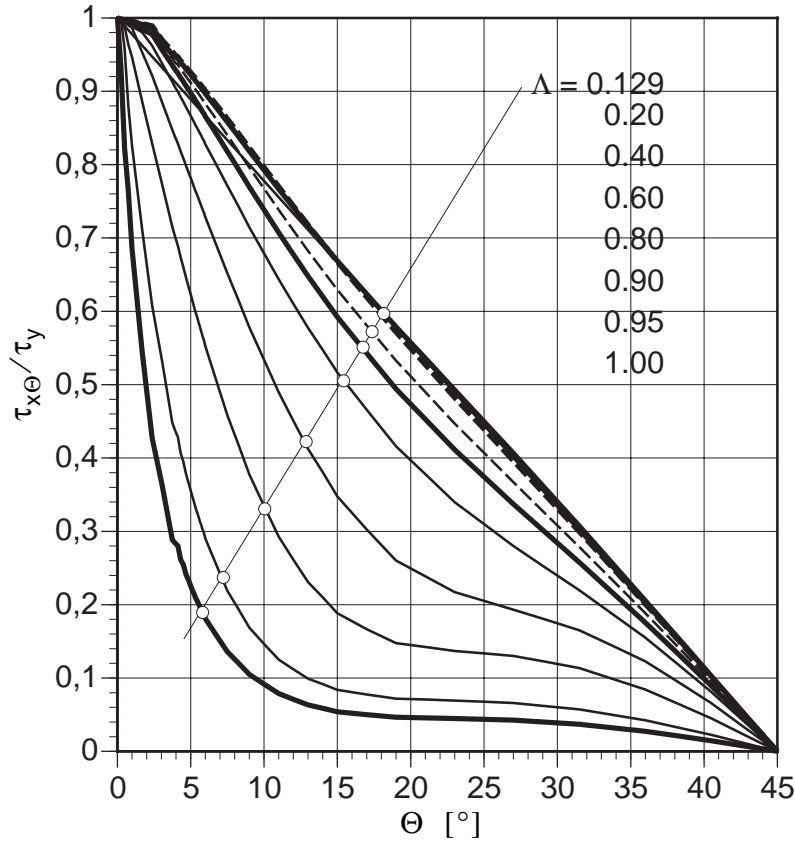


Bild 8-156 Membranschubspannungen am unteren Rand ($x/L = 0$) der Schalenwand dargestellt in Umfangsrichtung für verschiedene Laststufen

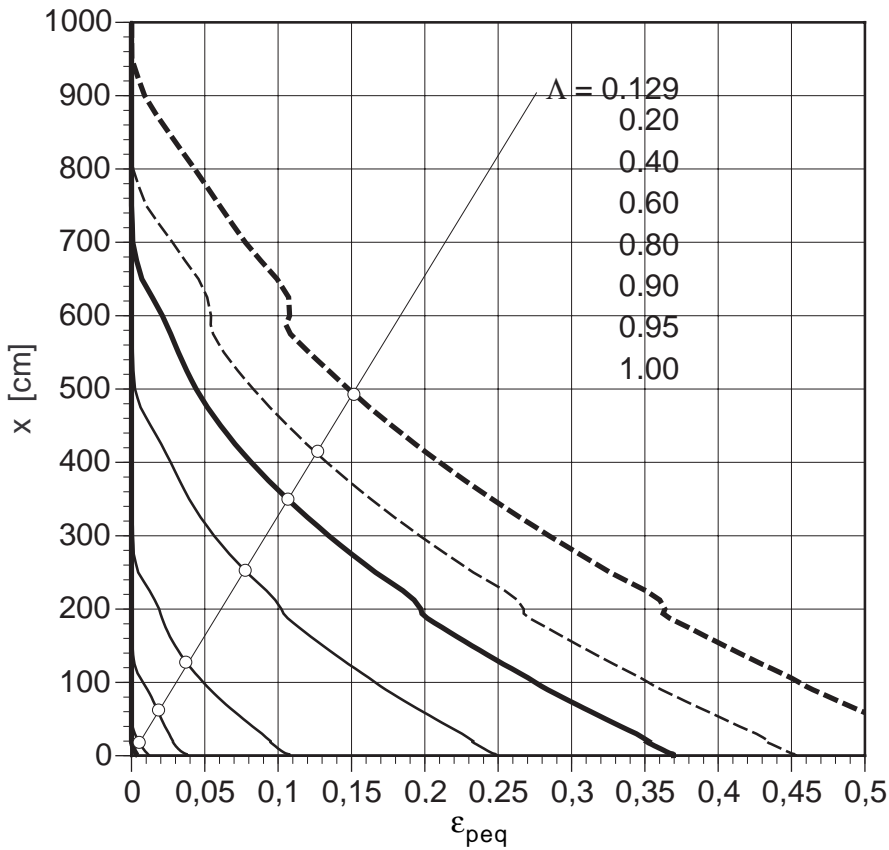


Bild 8-157 Plastische äquivalente Dehnungen der Schalenwand im Auflagerlängssteifenmeridian für verschiedene Laststufen

8.4.1.5 Lastabhängige Diagramme

Für ausgewählte Ergebnisgrößen wird, wie bereits erwähnt, die Lastabhängigkeit dargestellt:

- Last-Biegemomentendiagramme der elastischen Auflagerlängssteife (Bild 8-158)
- Last-Radialverschiebungsdiagramme der elastischen Auflagerlängssteife (Bild 8-159)
- Last-Schubspannungsdiagramme der elastischen Auflagerlängssteife (Bild 8-160)
- Last-Dehnungsdiagramme der elastischen Auflagerlängssteife (Bild 8-161)

Das Biegemoment in der Längssteife ist für zwei verschiedene Orte ($x/L = 0,1$ bzw. $x/L = 0,5$) in Abhängigkeit des Lastfaktors in Kap. Bild 8-158 dargestellt.

Bis zu einem Lastfaktor von ca. $\Lambda = 0,2$ weichen die Biegemomente des Schaft–Längssteifen–Systems mit elastischer Auflagerlängssteife und elasto–plastischer Schalenwand kaum von jenen des Schaft–Längssteifen–Systems mit elastischer Auflagerlängssteife und elastischer Schalenwand (entspricht linear-elastischen Berechnungen — Linie “E”) ab. Danach wird die Abweichung des Momentenbildes bedingt durch die plastisch verteilten Schubkräfte immer signifikanter. Mit dem zunehmendem plastischem Ausgleich der Schubkräfte bei Laststeigerung werden die Biegemomente immer kleiner. Im Endzustand sind die Schubkräfte konstant, das zugehörige Biegemoment in der Längssteife wird zu Null.

Die Radialverformungen in Bild 8-159 für $x/L = 0,4$ stimmen ebenfalls bis zur Laststufe $\Lambda = 0,2$ mit den Radialverformungen der linear-elastischen Berechnungen überein. Danach werden die Abweichungen wie bei den Biegemomenten immer größer. Es kommt ab $\Lambda = 0,7$ zu einer Abnahme der Radialverformungen mit weiter steigender Last, bis im plastischen Endzustand die Radialverformungen zu Null werden.

Die lastabhängige Ausbreitung der plastischen Zone ist anhand der Darstellung der Membranschubspannungen bzw. der plastischen äquivalenten Dehnungen für verschiedene Orte ($x/L = 0, 0/0, 1/0, 5/1, 0$) entlang des Längssteifenmeridians in Bild 8-160 bzw. Bild 8-161 dargestellt.

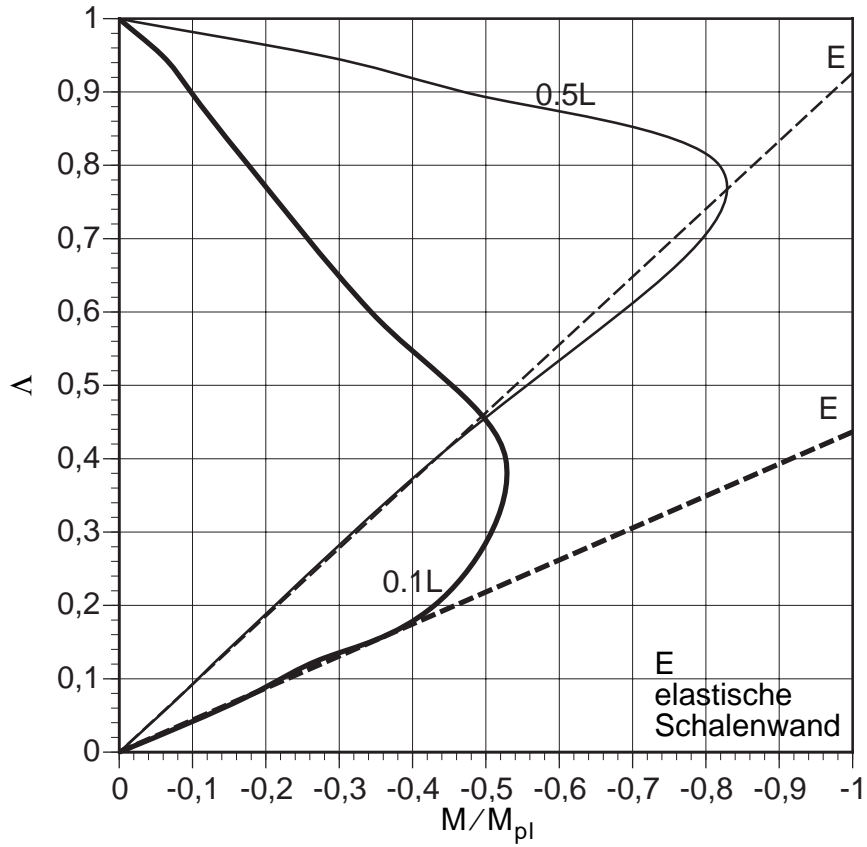


Bild 8-158 Last-Biegemomentendiagramm der elastischen Auflagerlängssteife für $x/L = 0,1$ bzw. $x/L = 0,5$

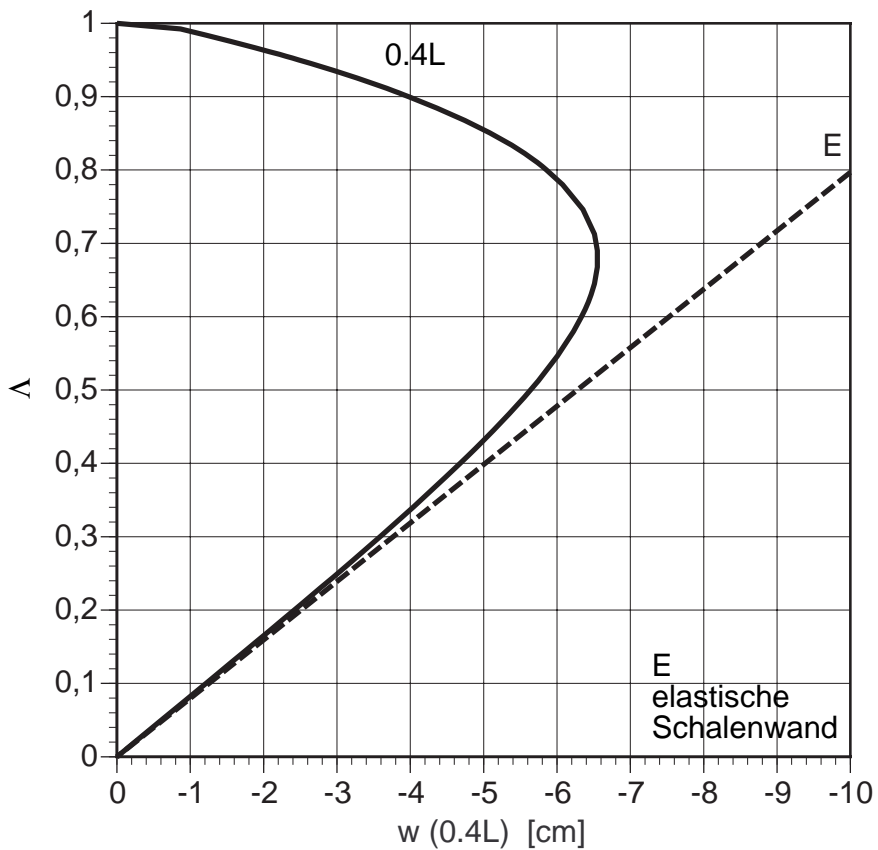


Bild 8-159 Last-Radialverschiebungsdiagramm der elastischen Auflagerlängssteife für $x/L = 0,4$

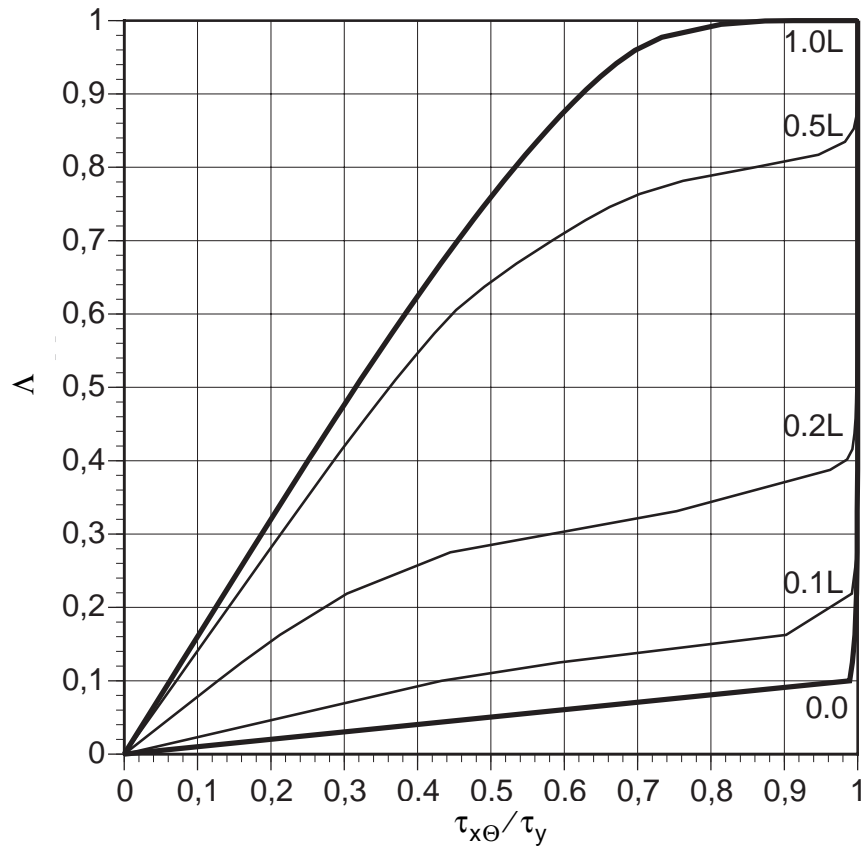


Bild 8-160 Last-Schubspannungs-Diagramm der Schalenwand für $x/L = 0, 0/0, 10/0, 2/0, 5/1, 0$

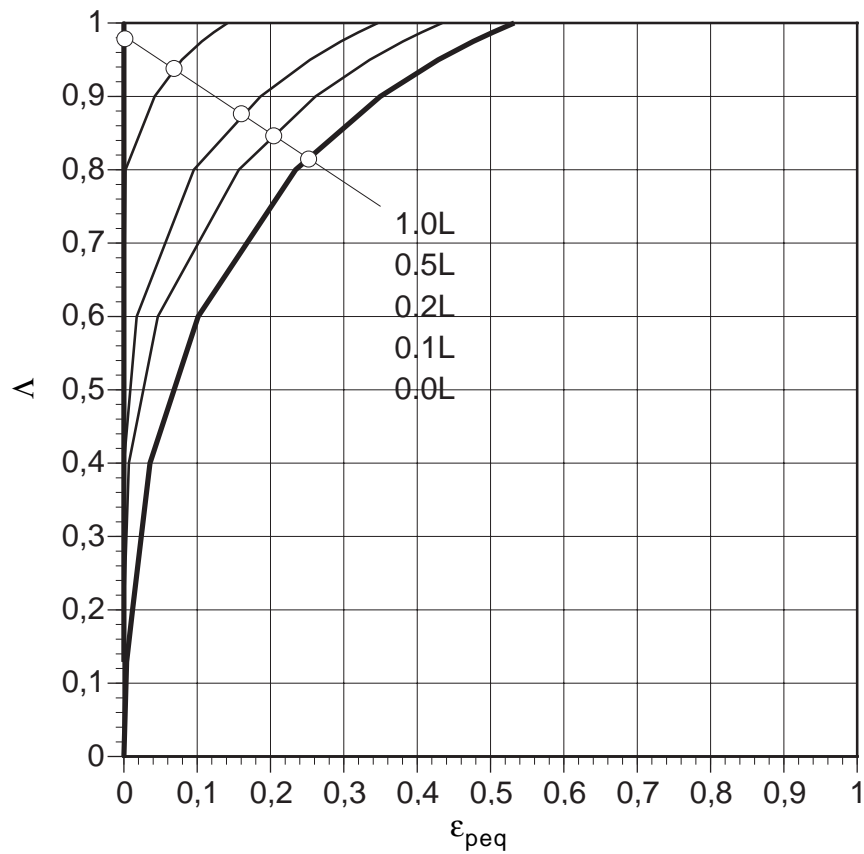


Bild 8-161 Last-Dehnungs-Diagramm der Schalenwand für $x/L = 0, 0/0, 10/0, 2/0, 5/1, 0$

8.4.2 Geometrisch nichtlineare Berechnungen (GNA + GMNA)

Zur Beurteilung des Tragverhaltens des kombinierten Schaft-Längssteifen-Systems stehen der plastischen Grenztragfähigkeit der Schalenwand die idealisiert bestimmte Knicklast der Längssteife (=globales Beulen des Schaft-Längssteifen-Systems) bzw. das Auftreten lokalen Schalenbeulens (lineare FE-Beuleigenwertberechnungen) gegenüber. Dabei liegt die Knicklast deutlich unter jener des plastischen Grenzversagensmodus. Die niedrigsten Eigenwerte der linearen FE-Beulberechnungen (CBEV) zeigen lokale Beulversagensformen der Schale, sie liegen im vorliegenden Fall über der Knicklast der Längssteife aber ebenfalls unter dem plastischen Grenzversagensmodus der Schalenwand.

Das Erreichen des vollplastischen Grenzversagensmodus ist im vorliegenden Fall somit am realen Schaft-Längssteifen-System nicht zu erwarten, es ist viel mehr mit globalem bzw. lokalem Beulversagen zu rechnen. In Bild 8-162 ist jener eingegrenzte Bereich des Last-Radialverschiebungsdiagrammes dargestellt, in dem die Lastverschiebungskurve der nichtlinearen Beulberechnungen (GNA, GMNA) zu erwarten ist.

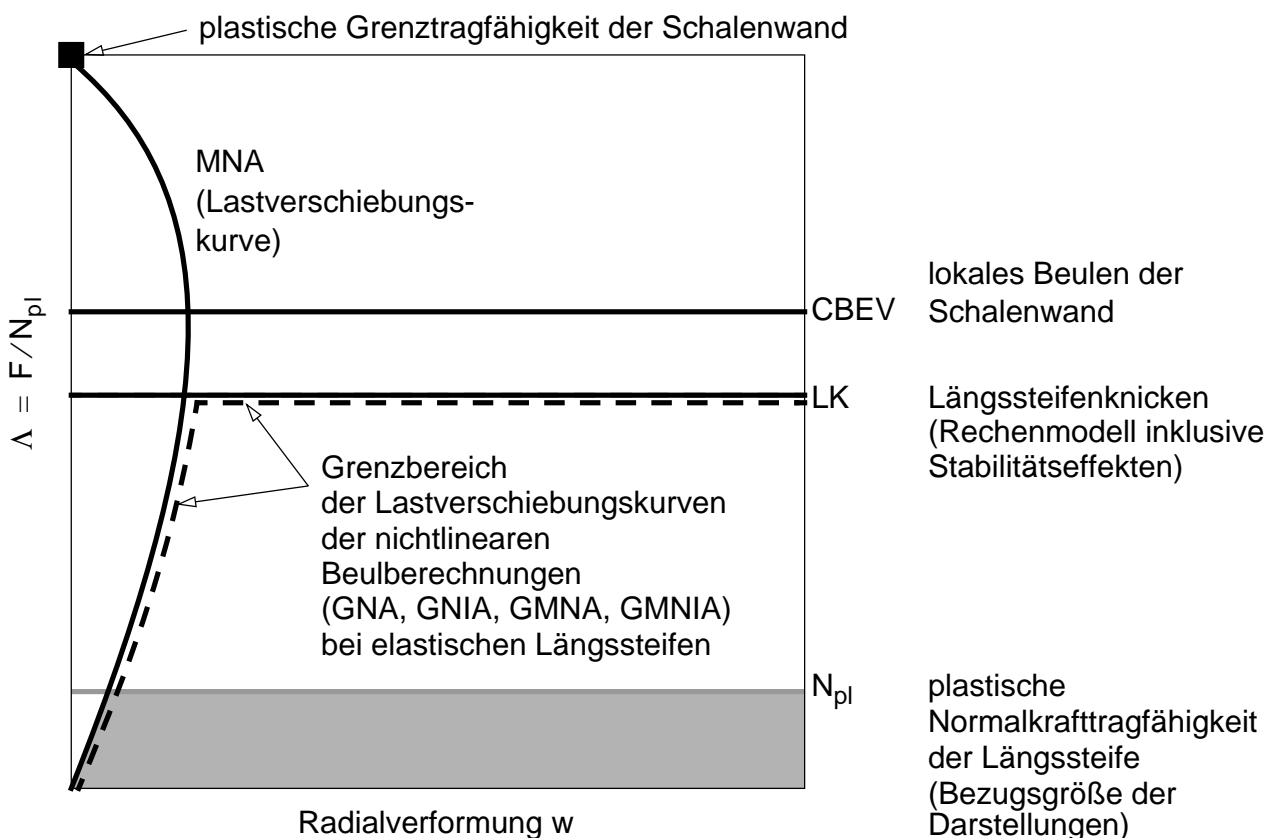


Bild 8-162 Schematische Darstellung des Last-Radialverschiebungsdiagrammes

Variation des Materialverhaltens

In den folgenden Untersuchungen werden nun zusätzlich zur materiell nichtlinearen Berechnung (MNA) mit elastischer Längssteife geometrische nichtlineare Analysen durchgeführt.

Eine Übersicht über die Berechnungsfälle und das zugrundegelegte Materialverhalten — elastisch (E) oder elasto-plastisch (P)— von Längssteife bzw. Schale ist in Tab. 8-29 ersichtlich. Zu beachten ist, daß bei allen Berechnungsfällen außer bei den GMNIA-Analysen die Längssteife stets rein elastisches Materialverhalten aufweist.

Bei den GMNIA-Analysen des imperfekten Systems wird wiederum als Imperfektion die Vorkrümmung der Längssteife zugrundegelegt und als Imperfektionsersatzlast q_z der Längssteife berücksichtigt.

Tab. 8-29 Variation des Materialverhaltens von Auflagerlängssteife bzw. Schalenwand

	Nichtlineare Berechnungsprozedur					
	GNA	GNIA	MNA	GMNA	GMNIA	GMNIA (P)
Längssteife	E	E	E	E	E	P
Schalenwand	E	E	P	P	P	P

Darstellung der Ergebnisse

Im folgenden werden für die beiden Varianten mit den Auflagerlängssteifen HEB 300 ($n_{St} = 4$) bzw. HEB 160 ($n_{St} = 6$) für die GNA und GMNA-Analysen folgende Ergebnisse dargestellt:

- Beulverformungen
- Last-Radialverschiebungsdiagramme für den Punkt $x/L = 0, 15$ des Längssteifenmeridians. Dabei sind die Last-Verschiebungskurven aller nichtlinearen Berechnungen enthalten, zur besseren Darstellung sind noch Detailausschnitte dargestellt.

Beulverformungen

Es tritt im Fall der elastischen Auflagerlängssteife durchwegs globales Beulversagen, gekennzeichnet durch das Knicken der Auflagerlängssteife, auf. In den Last-Radialverschiebungsdiagrammen ist ersichtlich, daß die Last-Verschiebungskurven der GNA-Analysen durch jene des plastischen Grenzversagensmodus und der horizontalen Linie, welche die Knicklast der Längssteife (LK)

repräsentiert, eingeschränkt sind. Bereits im linearen Anfangsbereich wird die Längssteife in radialer Richtung nach innen verformt. Dieser Effekt nimmt nun bedingt durch die geometrischen Nichtlinearität progressiv zu. Im Gegensatz dazu steht die MNA-Berechnung, die Radialverformung nimmt durch den plastischen Ausgleich der Schubkräfte mit steigender Last wieder ab.

Die GNIA-Analysen liefern erwartungsgemäß niedrigere Traglasten, die Last-Verschiebungskurven sind affin zu jenen der GNA-Analysen.

Lastverschiebungsdiagramme

Die Last-Verschiebungskurven der GMNA- bzw. der GMNIA-Analysen stimmen in einem weiten Bereich mit jenen der GNA- bzw. GNIA-Analysen überein. Dies ist dadurch begründet, daß der zunehmende geometrische Steifigkeitsverlust (Abtriebskräfte) der Längssteife dominierend ist und nicht die Abnahme der Schalensteifigkeit durch zunehmende Plastifizierung der Schale.

Die Last-Verschiebungskurven der GMNIA-Analysen mit plastischer Längssteife (GMNIA (P)) sind durch die plastische Tragfähigkeit der Längssteife N_{pl} limitiert, bis zur Ausbildung eines Fließgelenkes im unteren Längssteifenbereich sind ident mit jenen der GMNIA-Analysen mit elastischer Längssteife.

Darstellung der Ergebnisse für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300

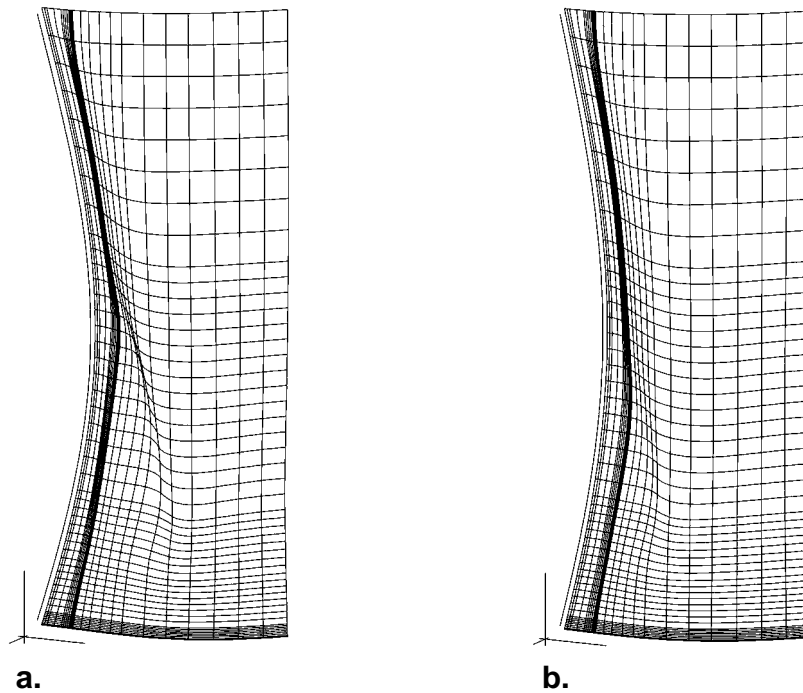


Bild 8-163 Beulverformungen für das **a.** perfekte und **b.** imperfekte System (Imperfektionsersatzlast) für Variante 1 — elastische Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$ — *GNA- und GNIA-Berechnungen*

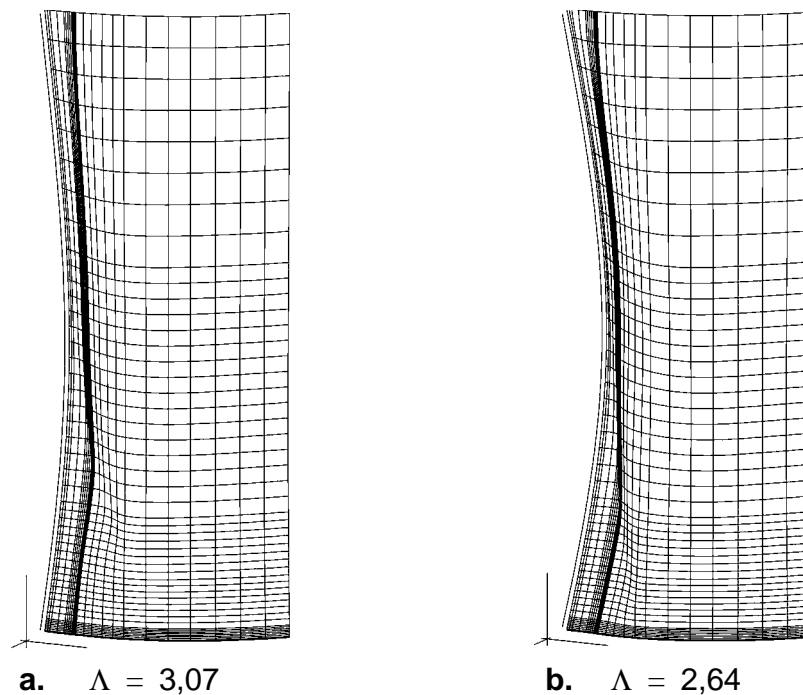


Bild 8-164 Beulverformungen für das **a.** perfekte und **b.** imperfekte System (Imperfektionsersatzlast) für Variante 1 — elastische Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$ — *GMNA- und GMNIA-Berechnungen*

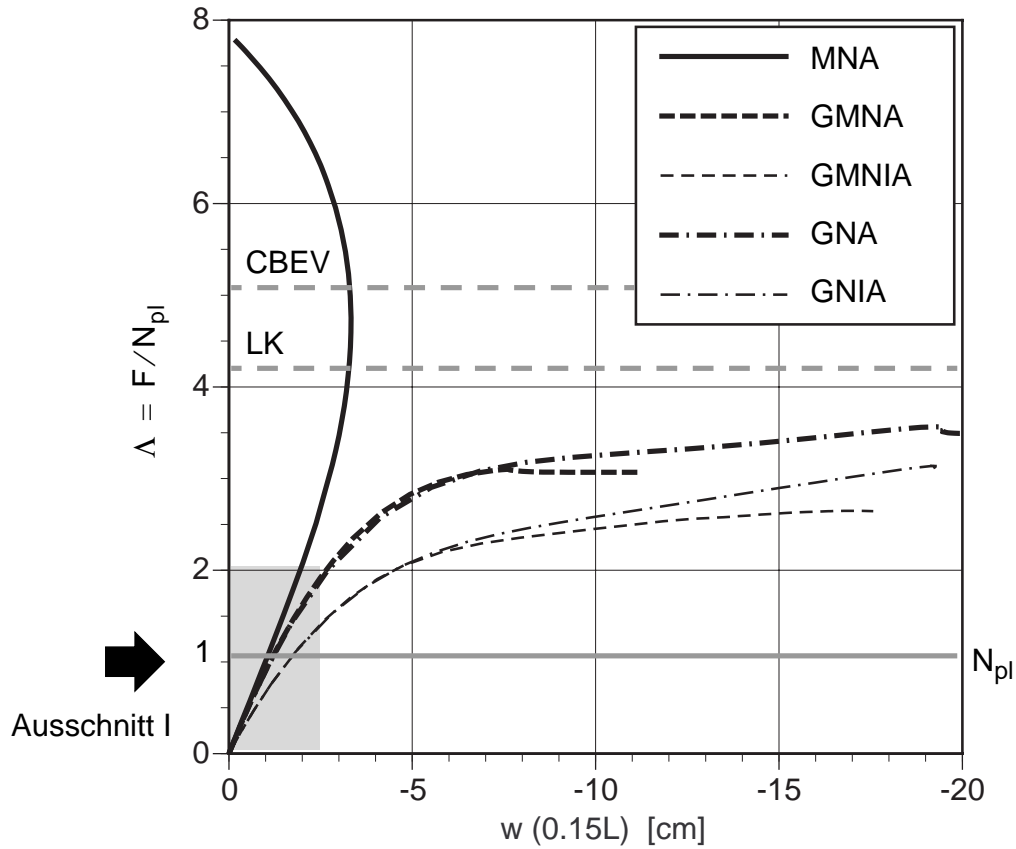


Bild 8-165 Last-Radialverschiebungdiagramm (für $x = 0.15L$) für Variante 1 — elastische Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$

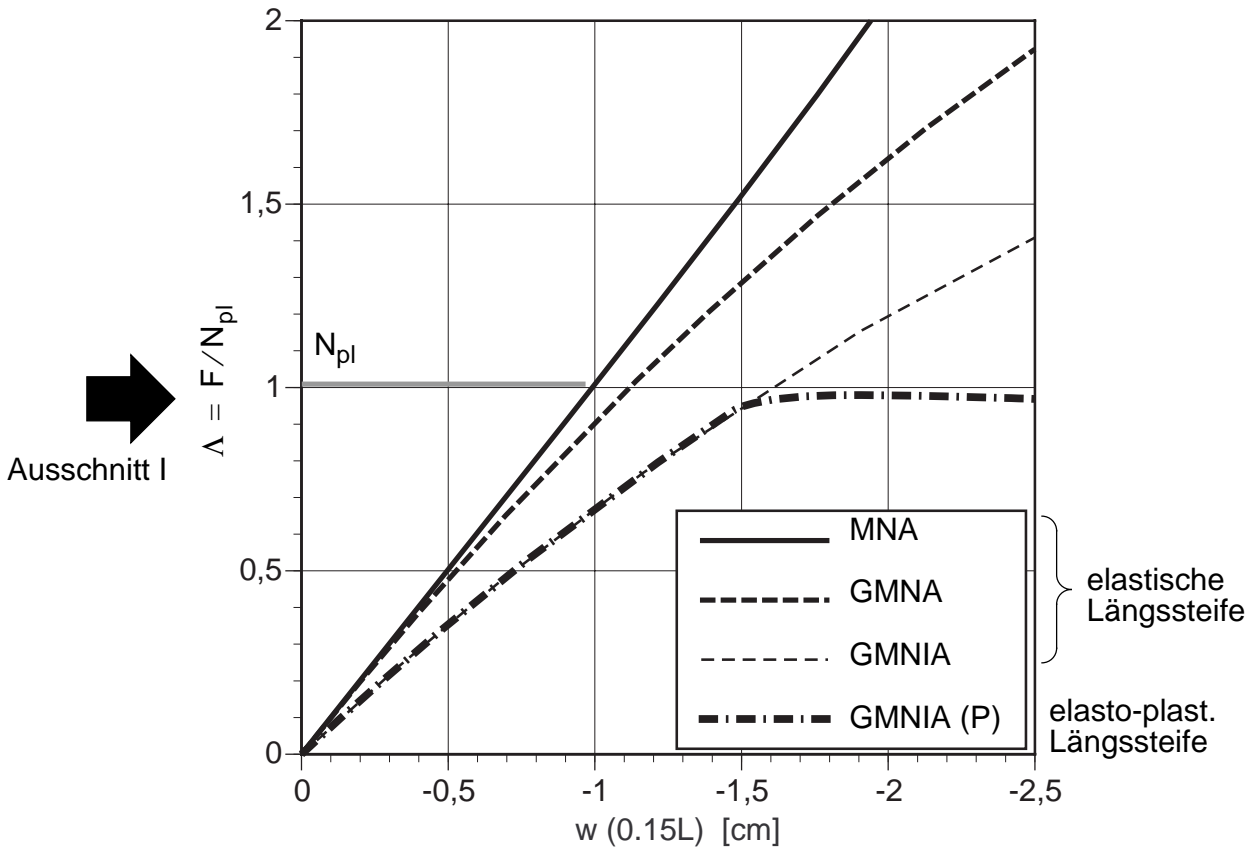


Bild 8-166 Last-Radialverschiebungdiagramm für $x = 0.15L$ — Ausschnitt I für Variante 1 — elastische bzw. elasto-plastische Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$

Darstellung der Ergebnisse für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160

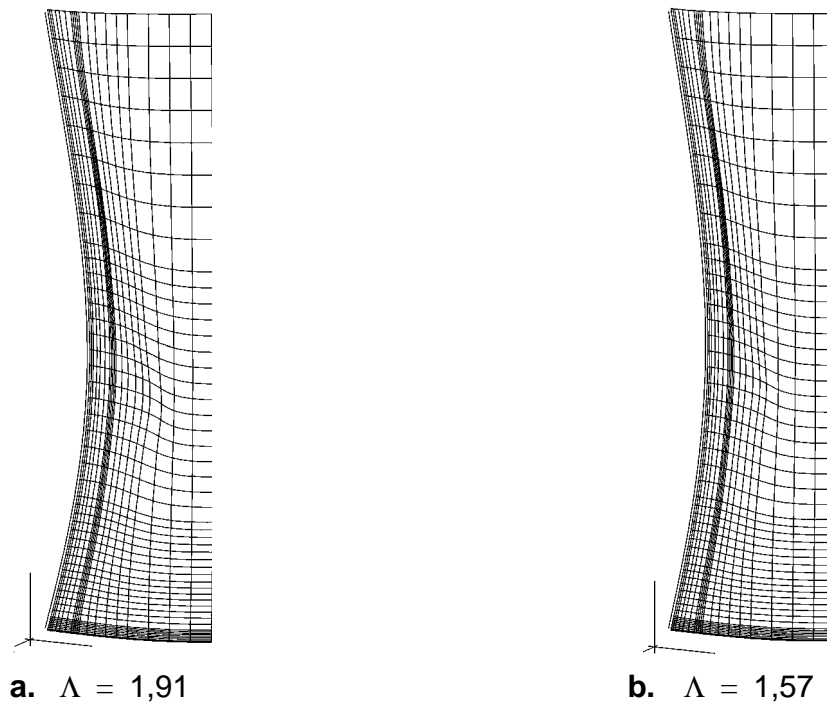


Bild 8-167 Beulverformungen für das **a.** perfekte und **b.** imperfekte System (Imperfektionsersatzlast) für Variante 2 — elastische Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$ — *GNA- und GNIA-Berechnungen*

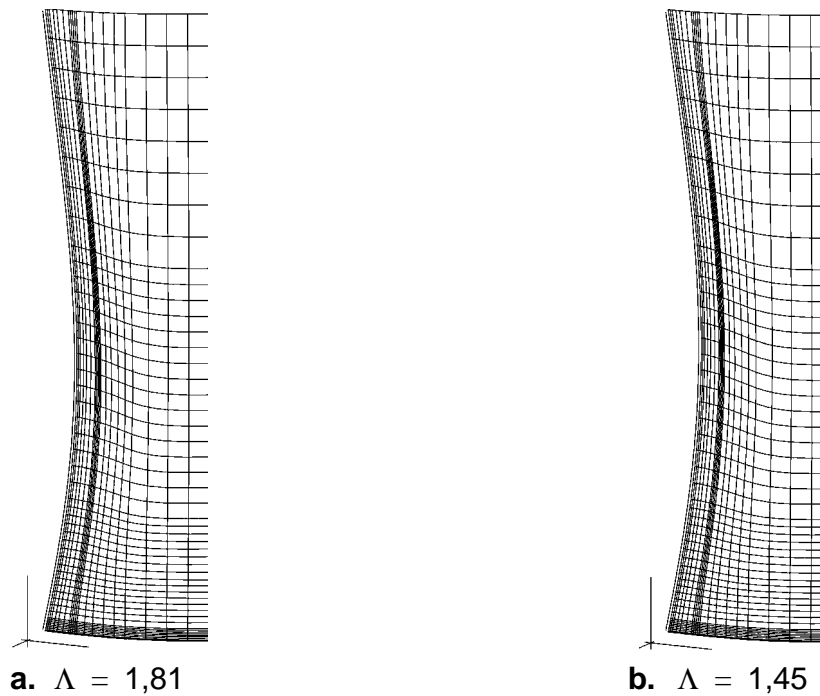


Bild 8-168 Beulverformungen für das **a.** perfekte und **b.** imperfekte System (Ersatzlast) für Variante 2 — elastische Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$ — *GMNA- und GMNIA-Berechnungen*

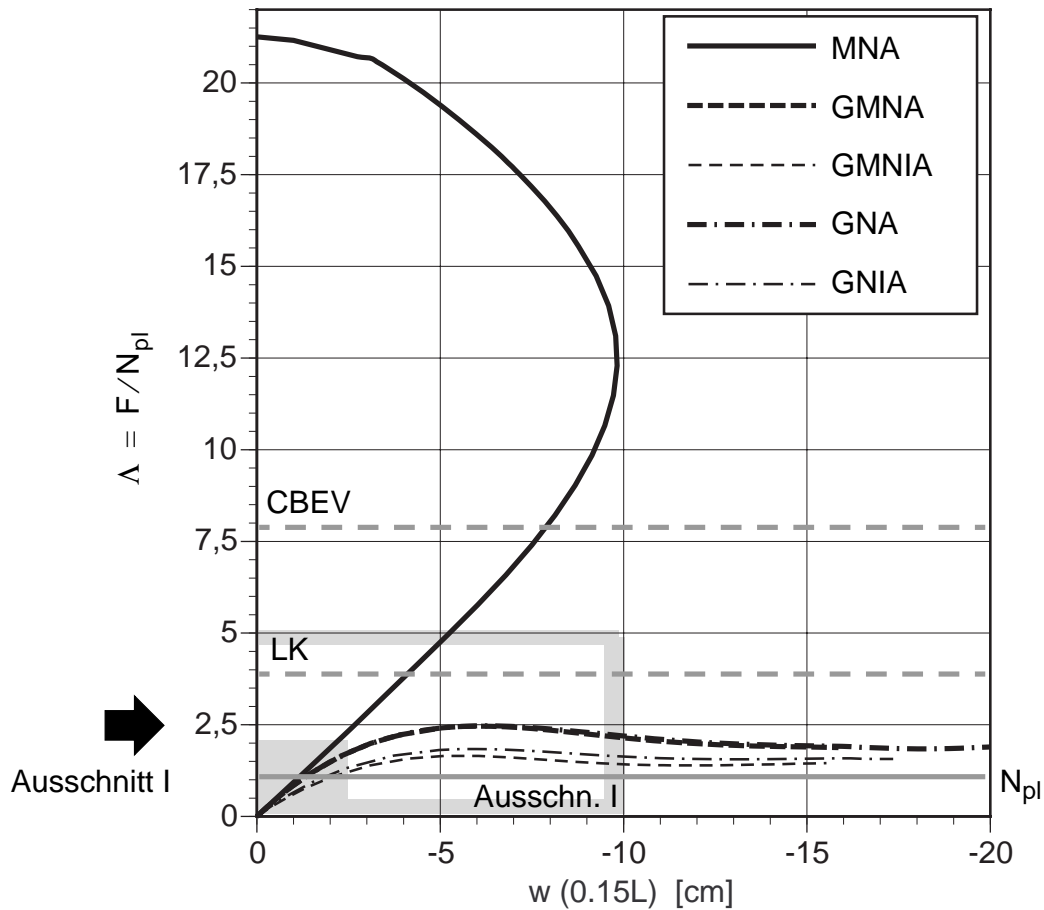


Bild 8-169 Last-Radialverschiebungsdiagramm (für $x = 0.15L$) für Variante 2 — elastische Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

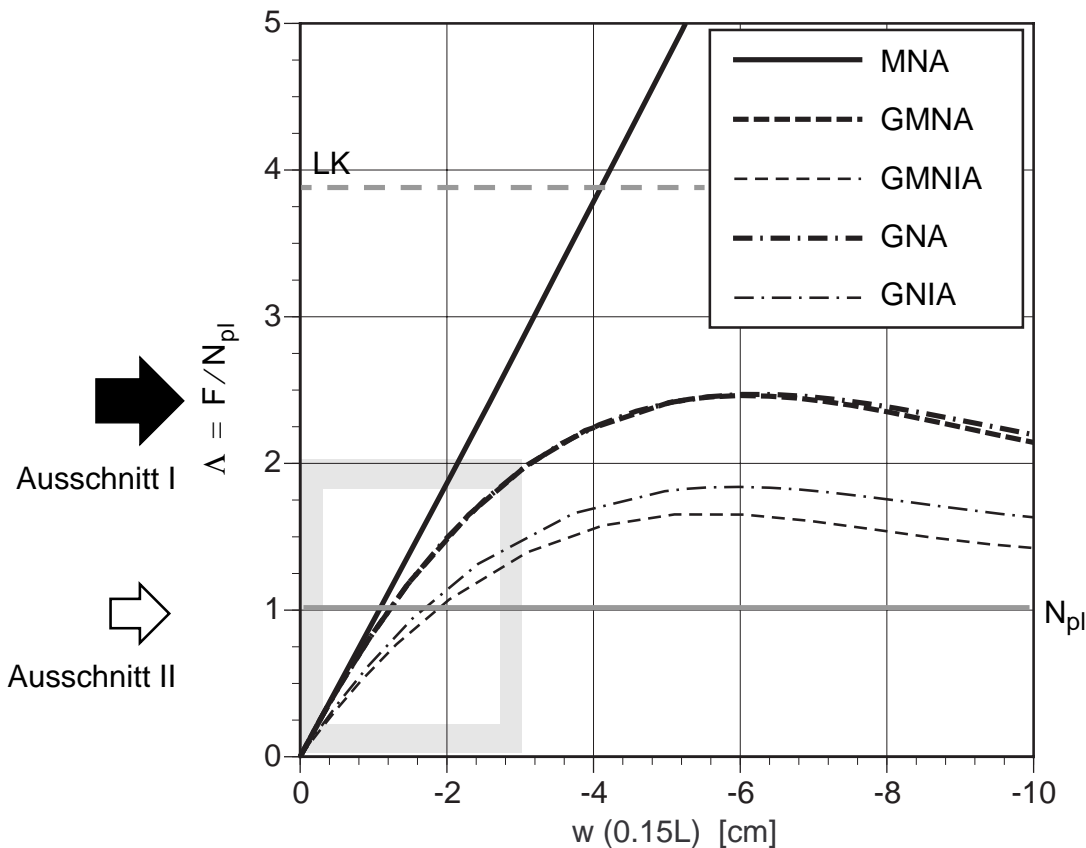


Bild 8-170 Last-Radialverschiebungsdiagramm (für $x = 0.15L$) - Ausschnitt I für Variante 2 — elastische bzw. elasto-plastische Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

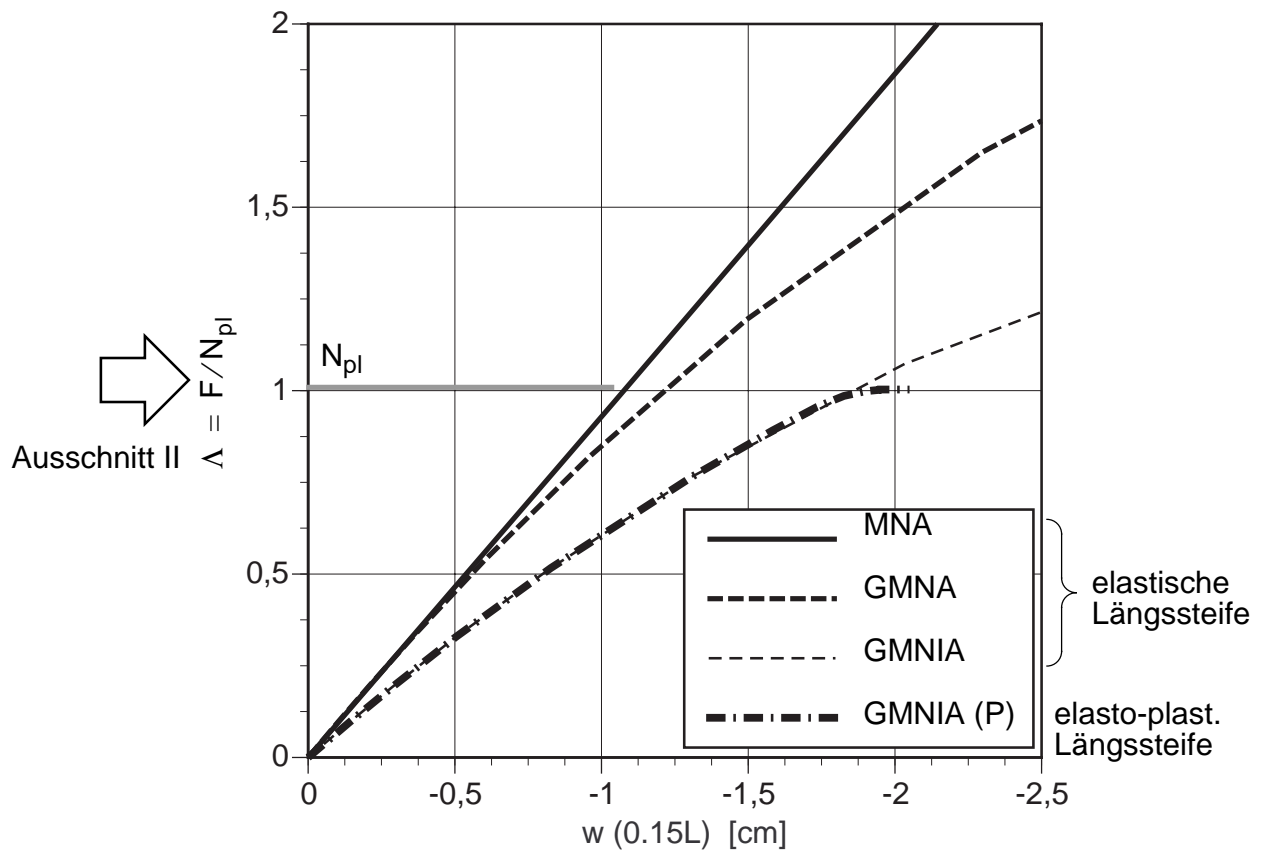


Bild 8-171 Last-Radialverschiebungsdiagramm für $x = 0.15L$ - Ausschnitt II für Variante 2 — elastische bzw. elasto-plastische Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

8.4.3 Glättungseffekt zufolge Innendruckbelastung

Zusätzlich zu den Untersuchungen von Kap. 8.4.2 wird die Innendruckbelastung des Schaftes berücksichtigt. Der Innendruck bewirkt durch die Steifigkeitserhöhung der Schale einen starken Anstieg der idealisiert bestimmten Längssteifenknicklast (siehe Kap. 8.3.3.1). Diese liegt nun über der maximalen Tragfähigkeit des plastischen Grenzversagensmodus der Schale. Die Beuleigenwerte (lokales Schalenbeulen) der linearen FE-Beulberechnungen sind nun niedriger als die Auflagerlängssteifenknicklast (siehe Kap. 8.3.4.3).

8.4.3.1 Berücksichtigung der Innendruckbelastung

Der Effekt des Innendruckes wird auf zweierlei Arten berücksichtigt:

- Initialspannungszustand (Vorlaststufe $p_{n, \text{init}}$ bzw. $\sigma_{\Theta, \text{init}}$)
- Last p_n die proportional mit der Lagerkraft F_L und der Wandschubbelastung p_x erhöht wird,

Der Referenzwert des konstanten Innendruckes ist zugehörig zum Anwendungsbeispiel (Kap. 8.3), er repräsentiert die mittlere Innendruckbelastung der Schale.

$$p_n = p_{n, \text{init}} = \gamma_F \cdot \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H = 127,5 \text{ kN/m}^2 \quad (8-102)$$

Umfangsfleßen der Schale

Als zusätzliches Limit der Tragfähigkeit tritt die Umfangsfließlast der Schale auf, der zugehörige Lastfaktor ergibt sich direkt aus der Umfangsspannung σ_{Θ} :

$$\Lambda_y = f_y / \sigma_{\Theta} = 3,765 \quad (8-103)$$

8.4.3.2 Nichtlineare Beulberechnungen des imperfekten Schaft-Längssteifen-Systems

Es erfolgt nunmehr die Berechnung des imperfekten Systems (Imperfektionersatzlast q_z der Längssteife), die Längssteife ist in allen Fällen elastisch. Die Schalenwand weist bei den GNIA-Analysen elastisches und bei den GMNIA-Analysen stets plastisches Materialverhalten auf.

Ergebnisdarstellung

Dargestellt werden:

- Beulverformungen bei Berücksichtigung des Initialdruckes $p_{n, \text{init}}$
- Last-Radialverschiebungsdiagramme

Die Last-Radialverschiebungsdiagramme sind für den Punkt $x/L = 0,15$ des Längssteifenmeridians aufbereitet. Dabei sind alle durchgeführten nichtlinearen Analysen beinhaltet, zur besseren Darstellung sind noch Detailausschnitte dargestellt.

Ergebnisse

Wirkt die Innendruckbelastung als Vorlast (Initialbeanspruchung), so zeigen die Beulverformungen für beide Varianten neben den globalen Beulversagensformen (=Längssteifenknicken) das Auftreten von lokalen Beulen der Schalenwand. Dominierend sind die globalen Beulformen, die durch die beträchtlichen Radialverformungen des Längssteifenmeridians repräsentiert sind:

- $w/L = 12,5/1000 = 1/80$ für Variante 1 (HEB 300) in Bild 8-172
- $w/L = 20,0/1000 = 1/50$ für Variante 2 (HEB 160) in Bild 8-174

Wird der Innendruck proportional der Vertikallast mitgesteigert, so dominiert das Umfangsfließen der Schale. In den Last-Verschiebungsdiagrammen in Bild 8-173 und Bild 8-175 ist die Umfangsfließlast durch die horizontale Linie "Y" repräsentiert. Die Last-Verschiebungskurven der nichtlinearen Berechnungen (GMNIA-p) zeigen die nach außen gerichteten Radialverformungen, die sich asymptotisch an die Linie "Y" annähern. Im Anfangsbereich ist die Lastverschiebungskurve ident mit jener der GNA-Berechnung.

Die Last-Verschiebungskurve der GNA-Berechnung ohne Innendruck ($p_n = 0$) liegt deutlich unter den Lastverschiebungskurven der GNIA- bzw. GMNIA-Analysen.

Zu Vergleichszwecken sind zusätzlich die Last-Radialverschiebungskurven zugehörig zum plastischen Grenzversagensmodus der Schalenwand (MNA mit $p_n = 0$) dargestellt.

Ergebnisdarstellung für Variante 1 — HEB 300

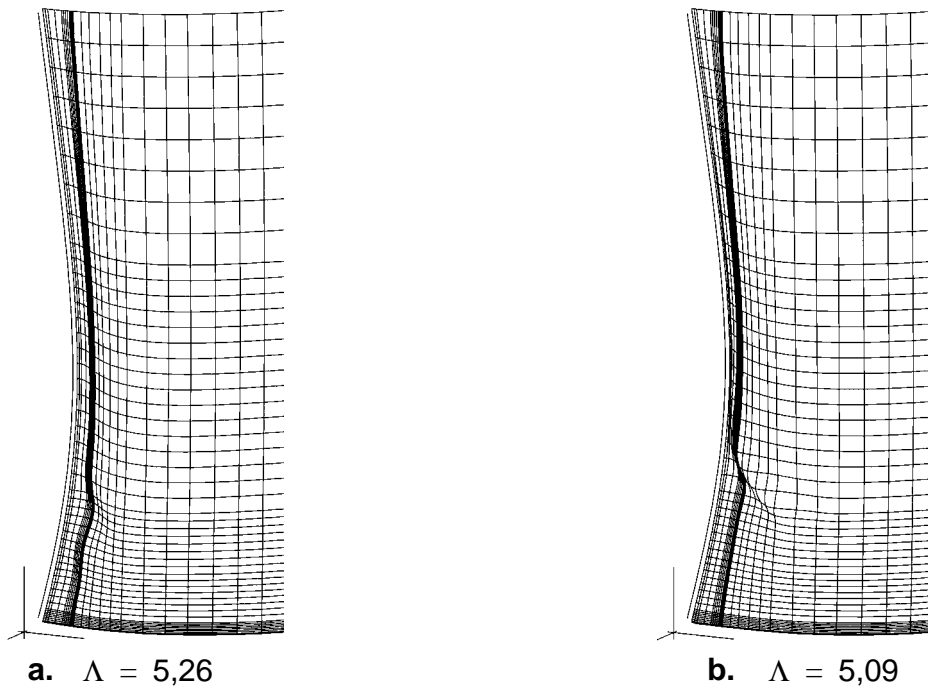


Bild 8-172 Beulverformungen für **a.** GNIA- u. **b.** GMNIA-Berechnungen bei der Berücksichtigung von $p_{n,init}$ als Vorlaststufe für Variante 1 — elastische Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$

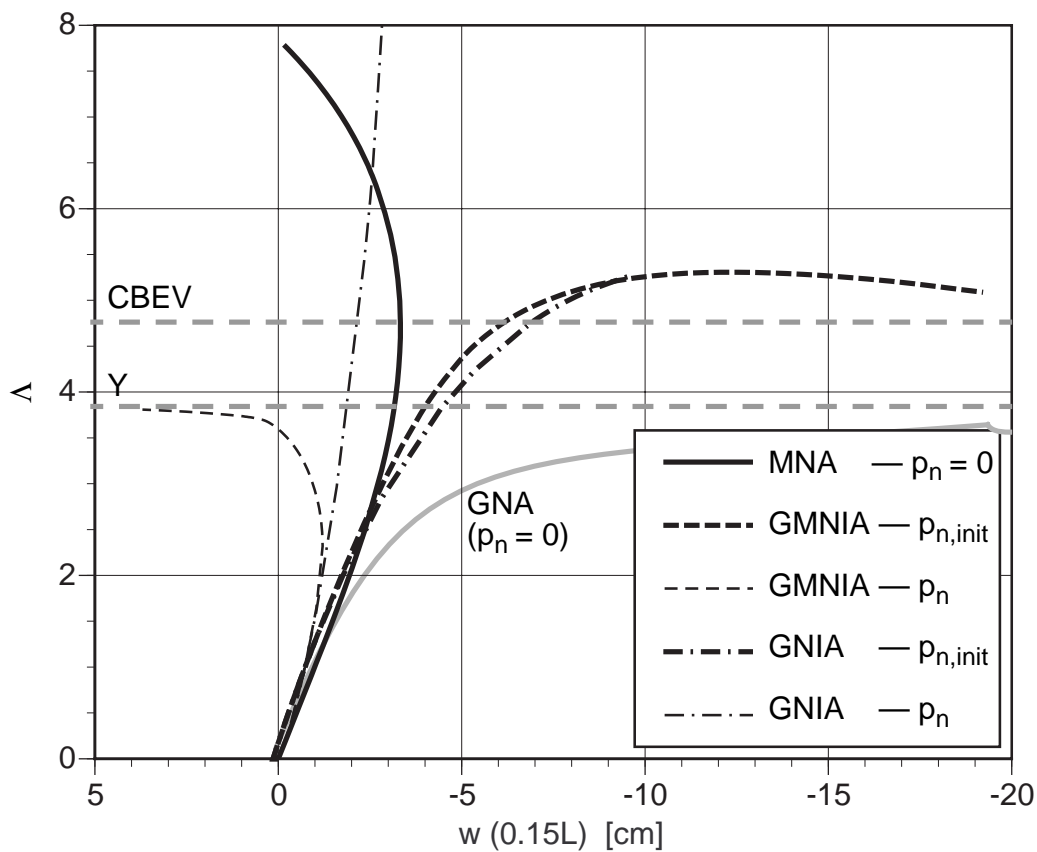


Bild 8-173 Last-Radialverschiebungsdiagramm für $x = 0.15L$ für Variante 1 — elastische Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$

Ergebnisdarstellung für Variante 2 — HEB 160

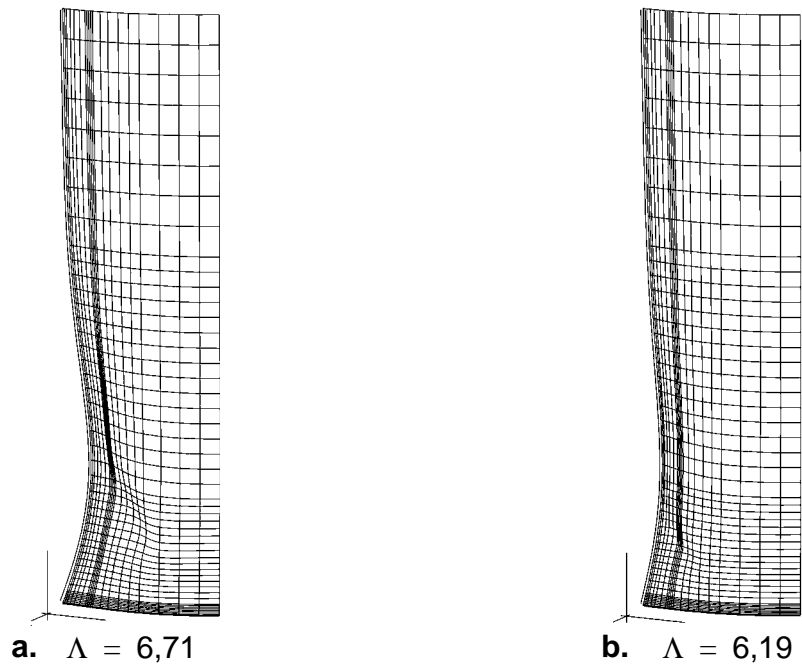


Bild 8-174 Beulverformungen für **a.** GNIA- und **b.** GMNIA-Berechnungen bei der Berücksichtigung von $p_{n,init}$ als Vorlaststufe für Variante 2— elastische Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

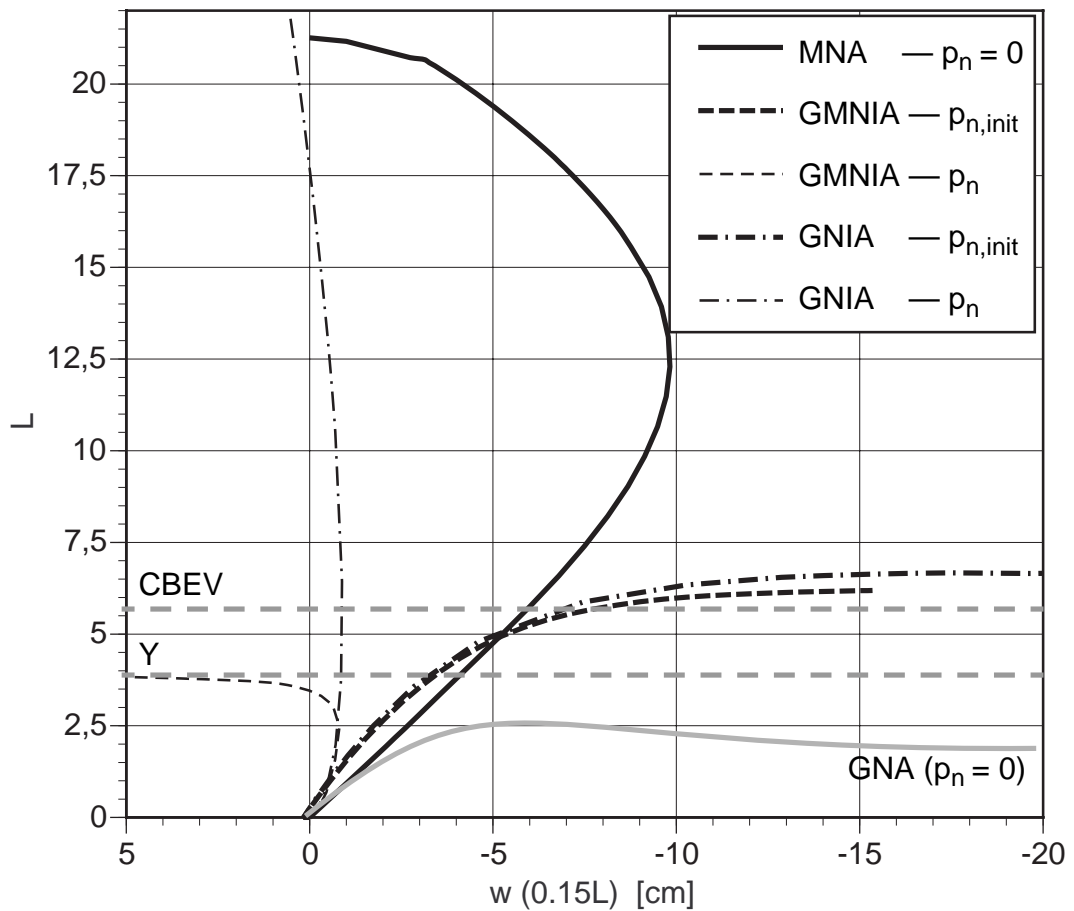


Bild 8-175 Last-Radialverschiebungsdiagramm für $x = 0.15L$ für Variante 2 — elastische Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

8.4.4 Zusammenfassung von Kap. 8.4

Zusammenfassend können folgende Aussagen getroffen werden:

- Der ideale Membranschubspannungszustand bildet sich als plastischen Grenzversagensmodus der Schalenwand unter Voraussetzung einer biegeelastischen und somit hinsichtlich der zu erreichenden Grenztraglast ausreichend tragfähigen Auflagerlängssteife aus.
- Bei Erreichen dieses plastischen Grenzversagensmodus der Schalenwand treten hohe plastische Dehnungen entlang des Auflagermeridians in der Schalenwand auf. Diese hohen Dehnungen ($\epsilon_{peq} \approx 50\%$) können im praktischen Fall zu mit einem Versagen der Schalenwand entlang der Auflagerlängssteifenmeridiane und, zwar beginnend vom Auflagerbereich aus, führen. Weiters ist das verwendete plastische Materialmodell (lineare Plastizität), welches den materiell nichtlinearen FE-Berechnungen (ABAQUS (1997)) zugrundeliegt, auf seine Anwendbarkeit für diesen Fall zu überprüfen.
- Die hohen Endschubkräfte zwischen Schale und Längssteife, die aus Kompatibilitätsgründen entstehen, können für den vorgestellten praktischen Anwendungsbereich für die Bestimmung der Tragfähigkeit der Schale vernachlässigt werden. Bis zum Erreichen der plastischen Grenztragfähigkeit der Auflagerlängssteife treten im Zuge der plastischen Umlagerung der Endschubkräfte moderate plastische Dehnungen in der Schale auf.
- Die plastische Grenztragfähigkeit kann bei den untersuchten Längssteifen praktischer Silo-konstruktionen nicht erreicht werden. Vorweg tritt globales Stabilitätsversagen des Gesamtsystems auf. Indiz dafür liefert bereits die vereinfachte Bestimmung der Längssteifenknicklast mithilfe des Doppelbalken–Analogiemodelles.
- Der Glättungseffekt des Innendruckes liefert zwar einen Versteifungseffekt der Schale, es tritt aber als Versagensmodus das Umfangsfließen der Schale durch die Innendruckbelastung auf.

8.5 Effekt der elastischen Nachgiebigkeit der Schraubstöße

8.5.1 Berücksichtigung der Stöße von geschraubten Silos

Durch die konstruktive Ausführung von geschraubten Silos werden horizontale Schraubstöße zwischen den Einzelschüssen ausgeführt. Durch die segmentartige Unterteilung der Schüsse in Umfangsrichtung liegen vertikale Stöße zwischen der Längssteife und den Einzelsegmenten vor. Dabei erfüllt der Gurt der Längssteifen, wie in Bild 8-176 dargestellt, die Funktion einer Stoßlasche.

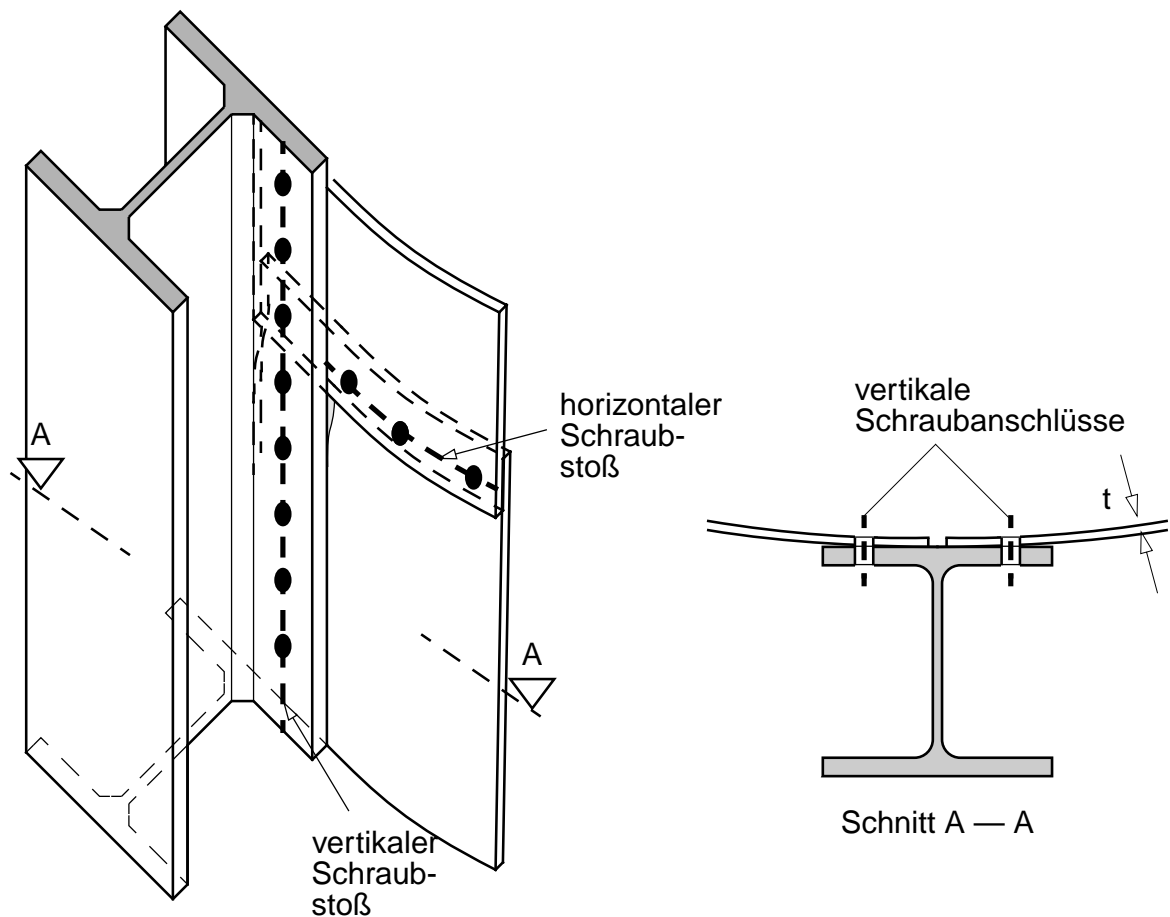


Bild 8-176 Baupraktische konstruktive Ausführung horizontaler und vertikaler Schraubstöße von Siloschalensegmenten

Die Nachgiebigkeit der horizontalen Schraubstöße wird mit ihrer Wirkung in Axial- und Umfangsrichtung, und die vertikalen Schraubstöße mit ihrer Wirkung in Axialrichtung, erfaßt. Die Umsetzung in der FE-Berechnung erfolgt mittels Reihen von linear-elastischen Federelementen, und zwischen zwei Schalenteilen in Umfangsrichtung angeordnet sind.

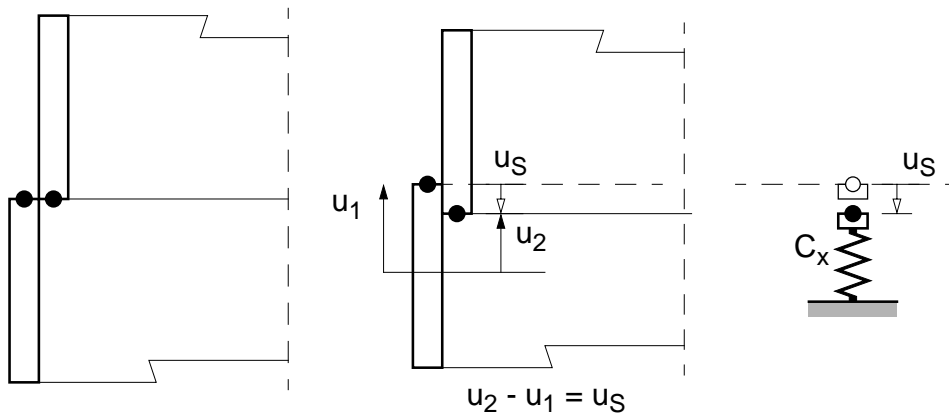


Bild 8-177 Nachgiebigkeit der horizontalen Schraubstöße in Axialrichtung

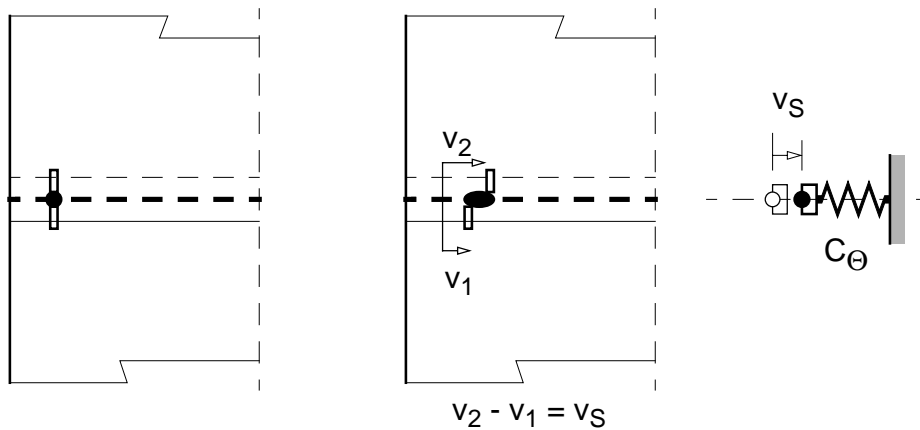


Bild 8-178 Nachgiebigkeit der horizontalen Schraubstöße in Umfangsrichtung

Im Rechenmodell inklusive Stabilitätseffekten sind die vertikalen Stöße als Fugenelement zwischen Längssteife und Schale berücksichtigt. Die horizontale Stöße können nicht als diskrete Stöße berücksichtigt werden. Die Modellierung als orthotrope Schale ermöglicht es die diskreten, horizontalen Stöße in Form von Ersatzsteifigkeiten der Schalenwand zu berücksichtigen.

Das allgemeine nichtlineare Verhalten der Schraubstöße wird in vereinfachter Form im folgenden berücksichtigt mit seiner

- elastischen Nachgiebigkeit.

Das heißt es wird angenommen, daß das Strukturversagen nie durch das Versagen der Schraubverbindungen eintritt. Dies setzt stets eine ausreichend konservative Dimensionierung voraus.

8.5.1.1 Bestimmung der Steifigkeit der Schraubstöße

Die Nachgiebigkeit der Schraubverbindungen wird entsprechend von Versuchsdaten nach Petersen (1988) bzw. der AISC-Empfehlungen (1990) festgelegt. Die Bestimmung der Steifigkeit mithilfe der AISC-Formel erfolgt aus der Schraubentragkraft (Abscher- oder Lochleibungskraft) und der maximal auftretenden Verformung des Schraubstoßes der in Bild 8-180 dargestellten Versuchsdaten. Entsprechend Gl. (8-104) weist die Verbindung eine nichtlineare Steifigkeitscharakteristik auf. Ein allfälliger Schlupf der Schraubverbindung ist nicht berücksichtigt.

$$F/F_{Rd} = (1 - e^{-3,4 \cdot \Delta/\Delta_{max}})^{0,55} \quad (8-104)$$

Die Schraubstöße werden in ihrem linear-elastischen Verhalten durch die Sekantensteifigkeit C , die durch das Gebrauchslastniveau (F_{Rd}/γ_F) des Kraft-Verschiebungsdiagrammes und der zugehörigen Verformung Δ_{SLS} definiert ist (siehe Bild 8-179), berücksichtigt. Die Maximalverformung Δ_{max} wird entsprechend den Versuchsdaten nach Petersen (1988) — siehe Bild 8-180 — festgelegt.

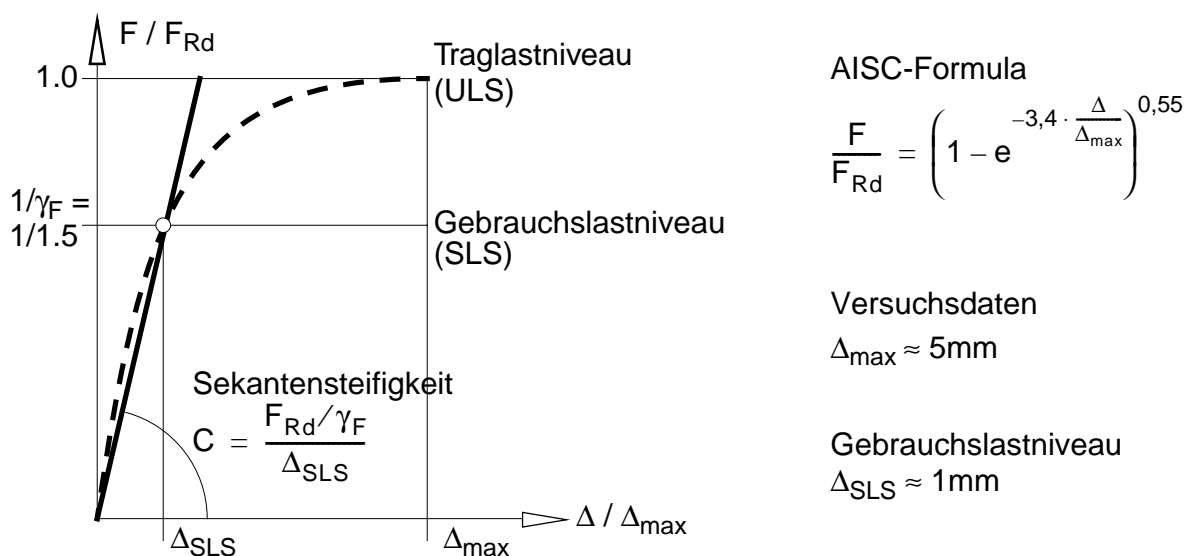


Bild 8-179 Festlegung der linear-elastischen Schraubennachgiebigkeit

Zufolge Bild 8-179 ergibt sich nun folgende Sekantensteifigkeit in Gl. (8-105):

$$C = \frac{F_{Rd}/\gamma_F}{\Delta_{SLS}} \quad (8-105)$$

Die Steifigkeit der Scheibenelemente für die FE-Berechnung erfolgt aus der auf den Schraubabstand e bezogenen Schraubentragkraft F_{Rd} . Durch unterschiedliche Randabstände in Axial- und Umfangsrichtung ergeben sich unterschiedliche Lochleibungstragkräfte $F_{l,Rd}$. Sind diese kleiner als die richtungsunabhängige Abschertragkraft $F_{a,Rd}$, so folgen unterschiedliche Steifigkeiten C_x bzw. C_Θ des Schraubstoßes in Axial- und Umfangsrichtung in Gl. (8-106b) und Gl. (8-106c).

$$n_{Rd} = F_{a,Rd}/e \text{ bzw. } F_{l,Rd}/e \tag{8-106a}$$

$$C_x = \frac{n_{Rd,x}/\gamma_F}{\Delta_{SLS}} \tag{8-106b}$$

$$C_\theta = \frac{n_{Rd,\theta}/\gamma_F}{\Delta_{SLS}} \tag{8-106c}$$

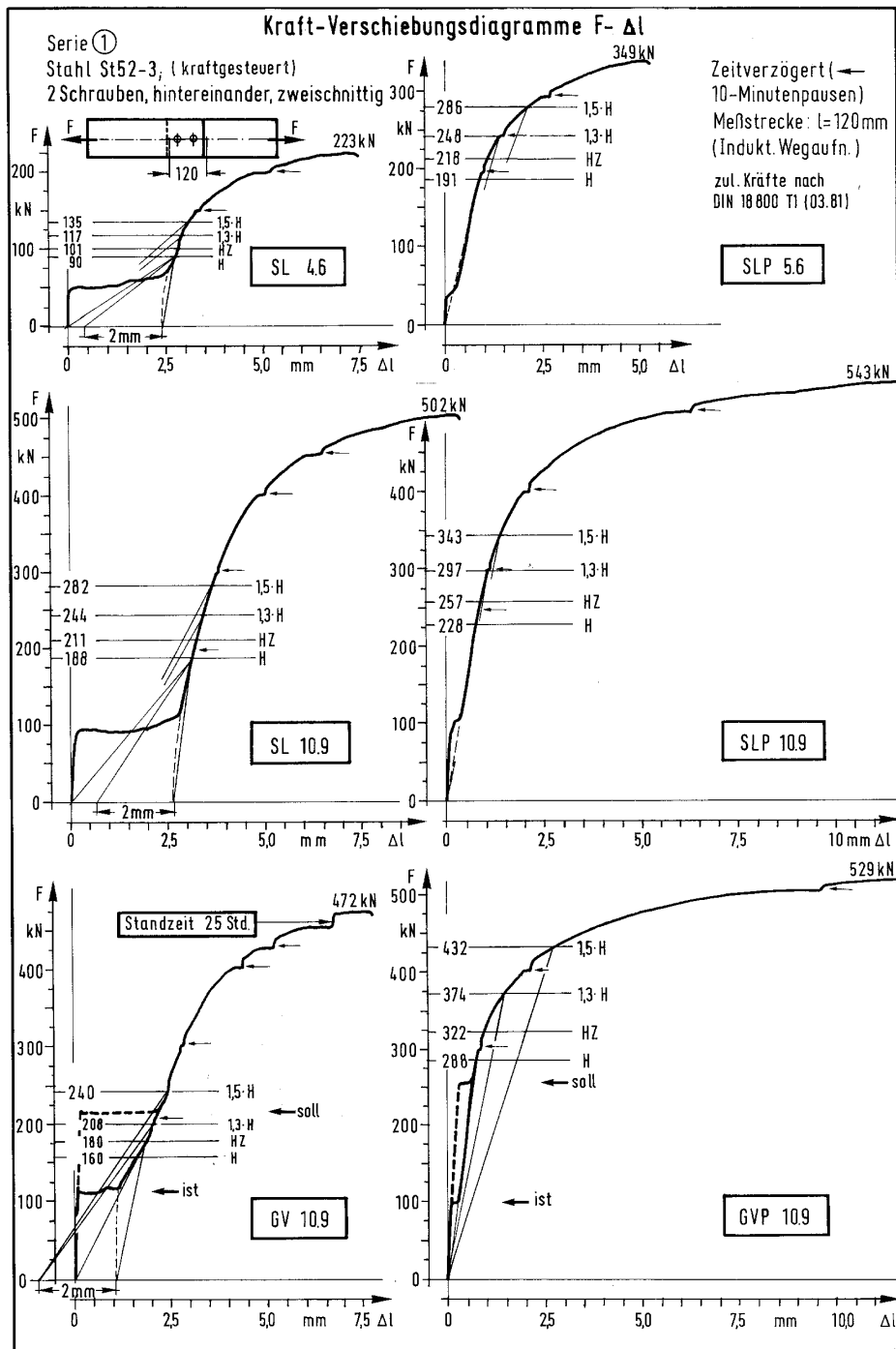


Bild 8-180 Kraft-Verschiebungsdiagramme von Versuchen nach Petersen (1988)

8.5.1.2 Bestimmung der orthotropen Ersatzsteifigkeiten

Die Ersatzsteifigkeiten der Schalenwand - axiale Dehnsteifigkeit D_x und Schubsteifigkeit $S_{x\theta}$ — ergeben sich aus den Steifigkeiten des Stöße in Axialrichtung ($C_{x,i}$) und in Umfangsrichtung ($C_{\theta,i}$), dem Elastizitätsmodul E bzw. Schubmodul G und den Dicken t_i und Längen L_j der einzelnen Schalenteile:

$$D_x = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{C_{x,i}} + \sum_i \frac{L_j}{Et_i}} \quad (8-107a)$$

$$S_{x\theta} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{C_{\theta,i}} + \sum_i \frac{L_j}{Gt_i}} \quad (8-107b)$$

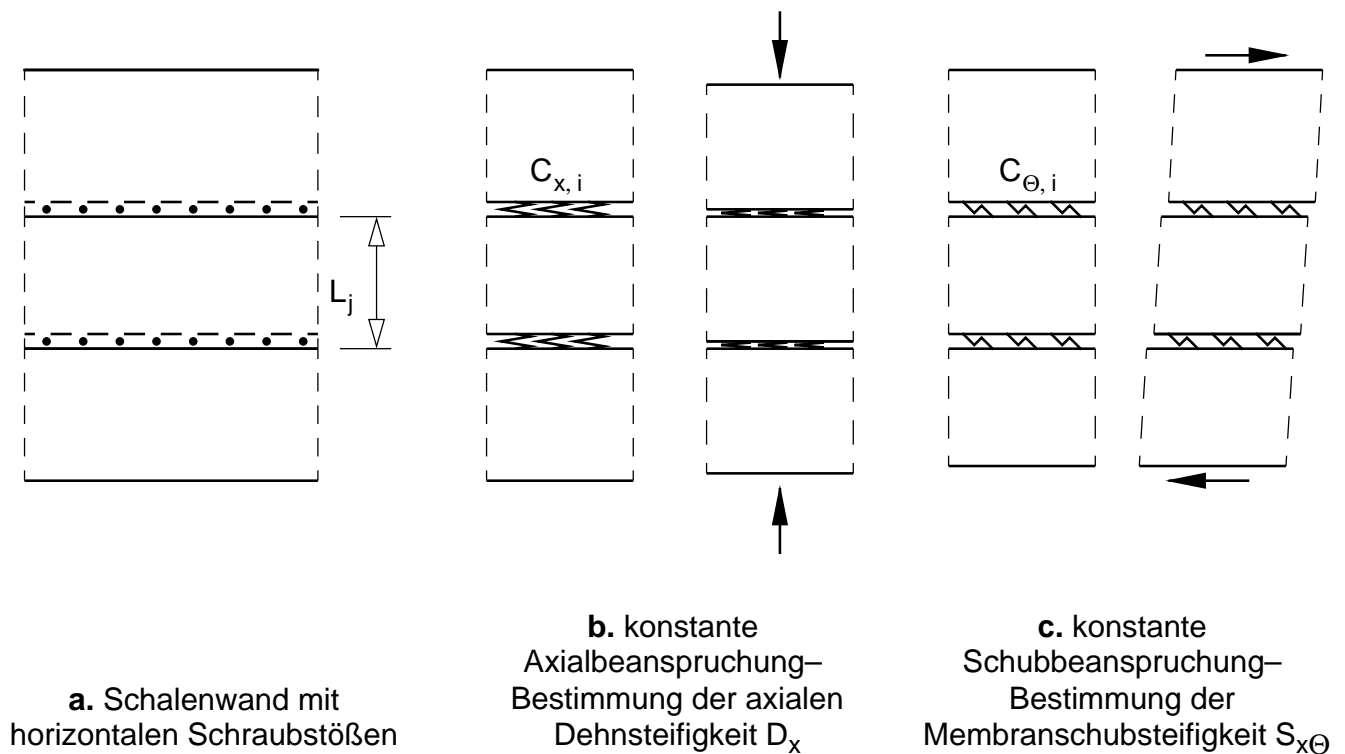


Bild 8-181 Bestimmung der orthotropen Ersatzsteifigkeiten der Schalenwand

8.5.2 Linear-elastische Spannungsberechnungen

Linear-elastische Berechnungen werden für das Anwendungsbeispiel von Kap. 8.3 durchgeführt. Dabei werden die elastisch nachgiebigen Schraubstöße folgendermaßen berücksichtigt:

- Diskrete elastische Stöße, modelliert mit linear-elastischen Federelementen
- Orthotrope Ersatzsteifigkeiten der Schalenwand.

Schraubstöße

Es wird davon ausgegangen, daß die Stöße volltragfähig sind. Das heißt, daß die vertikalen Stöße die volle Schubtragfähigkeit besitzen und die horizontalen Stößen obendrein die axialen Tragkräfte, die mit dem Beulabminderungsfaktor versehen sind, abdecken.

Bestimmung der Stoßsteifigkeiten

Für die Anwendungsbeispiel werden Schraubstöße — M20/10.9; $e=10\text{cm}$ — angenommen. Daraus werden die Grenztragkräfte bestimmt. Die Grenztragkräfte werden auf den Schraubenabstand bezogen. Daraus wird dann die Steifigkeit $C = C_x = C_\Theta$ der horizontalen und vertikalen Schraubstöße bestimmt.

Abschertragkraft:

$$F_{a,Rd} = A_{sp} \cdot 0.55 \cdot f_{ub} / \gamma_M = 2.45 \cdot 0.55 \cdot 100 / 1.0 = 135 \text{ kN}$$

$$n_{a,Rd} = F_{a,Rd} / e = 135 / 10 = 13.5 \text{ kN/cm}$$

Lochleibungstragkraft:

$$\text{Lochleibungsbeiwert } \alpha_L = 3.0$$

$$F_{l,Rd} = \alpha_L \cdot f_{yd} \cdot d \cdot t = 3.0 \cdot 21.8 \cdot 2.0 \cdot 1.0 = 131 \text{ kN}$$

$$n_{l,Rd} = F_{l,Rd} / e = 131 / 10 = 13.1 \text{ kN/cm}$$

Steifigkeit C des Schraubstoßes:

$$C = C_x = C_\Theta = n_{l,Rd} / (\gamma_F \cdot \Delta) = 13.1 / (1.5 \cdot 0.1) = 87.33 \approx 100 \text{ kN/cm}^2$$

8.5.2.1 Vertikallastfälle

Die Beanspruchungen der Längssteife und der Zylinderschale sind für die Berechnung mit diskreten Stößen (grau) bzw. für die orthotrope Schale (schwarz) in den nächsten Abbildungen dargestellt. Dabei sind wiederum alle Einzelgrößen für die Auflagerteilkräfte (Lagerkraft der Längssteife F_L , Lagerkraft F_Z der lokalen Randlagerung des Schaftes, Lagerkraft F_S der Schottblechlagerung) und deren Summe (Gesamtbelastung) dargestellt.

Die Auflagerteilkräfte nehmen entsprechend den Vorgaben des Anwendungsbeispiels von Kap. 8.3 folgende Größenwerte in Tab. 8-30 ein:

Tab. 8-30 Auflagerteilkräfte des Anwendungsbeispiels

Variante	$F_L = N_{pl}$	F_S	F_Z
	[kN]	[kN]	[kN]
HEB 300, $n_{St} = 4$	3576	1567	1333
HEB 160, $n_{St} = 6$	1303	1567	1333

Darstellung der Ergebnisse

Es werden für beide Varianten folgende Ergebnisse dargestellt:

- Normalkraftbeanspruchung $n = N/N_{pl}$ der Längssteife
- Biegemomentenbeanspruchung $m = M/M_{pl}$ der Längssteife
- Querschnittsausnutzung $n + 0,9m$ der Längssteife
- Radialverformungen w des Längssteifenmeridians
- fließgrenzenbezogene Membranaxialspannung σ_x/f_y im Längssteifen- und Beulmeridian
- fließgrenzenbezogene Membranschubspannung $\tau_{x\theta}/\tau_y$ im Längssteifen- und Beulmeridian

Die Ergebnisse für die Beanspruchungen der Längssteife und der Schale werden für die Teillastfälle (Auflagerteilkräfte F_L , F_Z und F_S) und die Gesamtbelastung ($F = F_L + F_Z + F_S$) dargestellt. Die Einzelergebnisse werden in den folgenden Abbildungen (Bild 8-182 bis Bild 8-197) folgend gekennzeichnet:

- graue Linien für die diskreten Horizontalstöße
- schwarze Linien für die Berechnung mithilfe von orthotropen Schalenersatzsteifigkeiten

Zu Vergleichszwecken werden folgende Resultate des Anwendungsbeispiels ohne jeglicher Berücksichtigung der Schalenstöße (=linear-elastische Spannungsberechnungen in Kap. 8.3) dargestellt:

- Normalkraftbeanspruchung $n = N/N_{pl}$ der Längssteife
- Biegemomentenbeanspruchung $m = M/M_{pl}$ der Längssteife
- Querschnittsausnutzung $n + 0,9m$ der Längssteife
- Radialverformungen w des Längssteifenmeridians

Durch die in Summe verringerte Schalensteifigkeit wird die Längssteife gegenüber den Berechnungen von Kap. 8.3 höher beansprucht.

Vor allem die Normalkraftbeanspruchung und damit auch die maßgebende Querschnittsbeanspruchung der Längssteife wird durch die verringerten Schalensteifigkeiten erhöht. Die Biegemomentenbeanspruchung wird durch die Berücksichtigung der elastischen Nachgiebigkeit des vertikalen Schraubanschlusses von Schalenwand und Auflagerlängssteife geringfügig kleiner, dies basiert vor allem auf der Tatsache, daß sich durch die vertikale Verbundfugensteifigkeit die hohen Randwerte der Koppelschubkräfte vermindern. Im Vergleich mit Kap. 8.3 sind auch die Axialkräfte der Schalenwand bis auf den Auflagerbereich geringer.

Diskrete horizontale Stöße

Die Normalkraft und das Biegemomente weisen einen girlandenförmigen Verlauf auf. Die maximale Querschnittsausnutzung liegt bei ca. $x/L = 0,1$ am Außengurt der Längssteife.

Die Axialspannungen der Schale weisen im Längssteifenmeridian einen abgetreppten Verlauf auf. Dies begründet sich mit den lokal wirkenden Endschubkräften jedes Schalenelementes, die aus Kompatibilitätsgründen entstehen. Im Beulmeridian gleicht sich dieser abgetreppte Verlauf aus. Die Schubspannungen in der Schale sind aufgrund der lokalen Endschubkräften ebenfalls abgetreppt verlaufend.

Orthotrope Ersatzsteifigkeiten der Schalenwand

Bei allen beobachteten Größen wird der girlandenförmige bzw. abgetreppte Verlauf bei diskreten Horizontalstößen durch die Modellierung mit Schalenersatzsteifigkeiten kontinuierlich ausgeglichen.

Die Normalkräfte und Biegemoment und folglich die Querschnittsausnutzung sind im mittelbaren Auflagerbereich durch die modifizierten Steifigkeitsverhältnisse abweichend, im übrigen stellen sie den Mittelwert dar.

Die Radialverformungen sind mit jenen für die diskreten Stöße nahezu ident.

Die Beanspruchungen der Schale stellen durchwegs wiederum den Mittelwert der Beanspruchungen bei Berücksichtigung der diskreten Stöße dar.

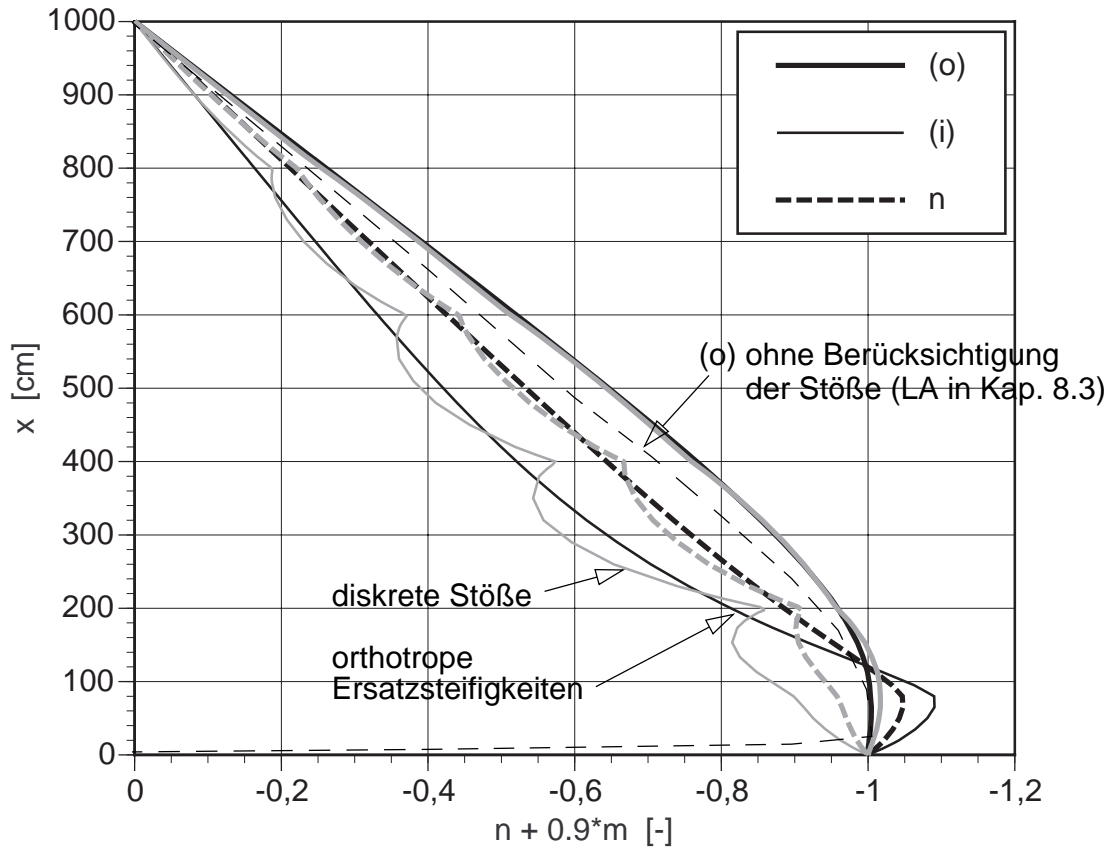


Bild 8-184 Querschnittsausnutzung der Auflagerlängssteife bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

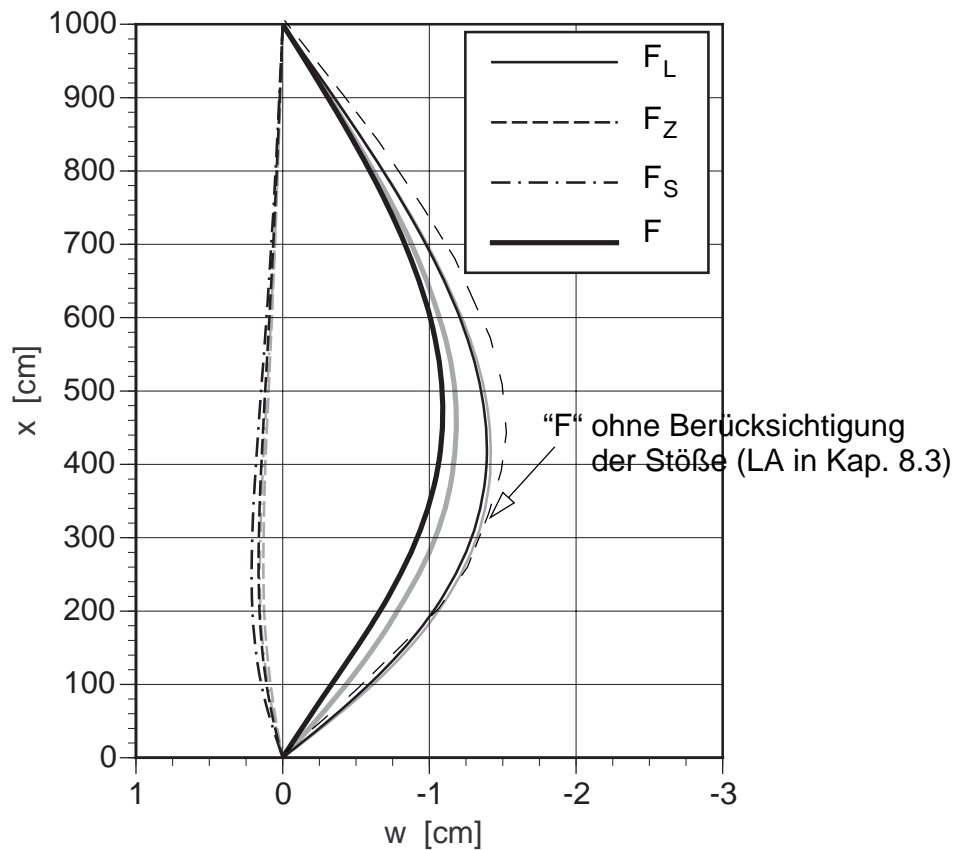


Bild 8-185 Radialverformung w der Auflagerlängssteife bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

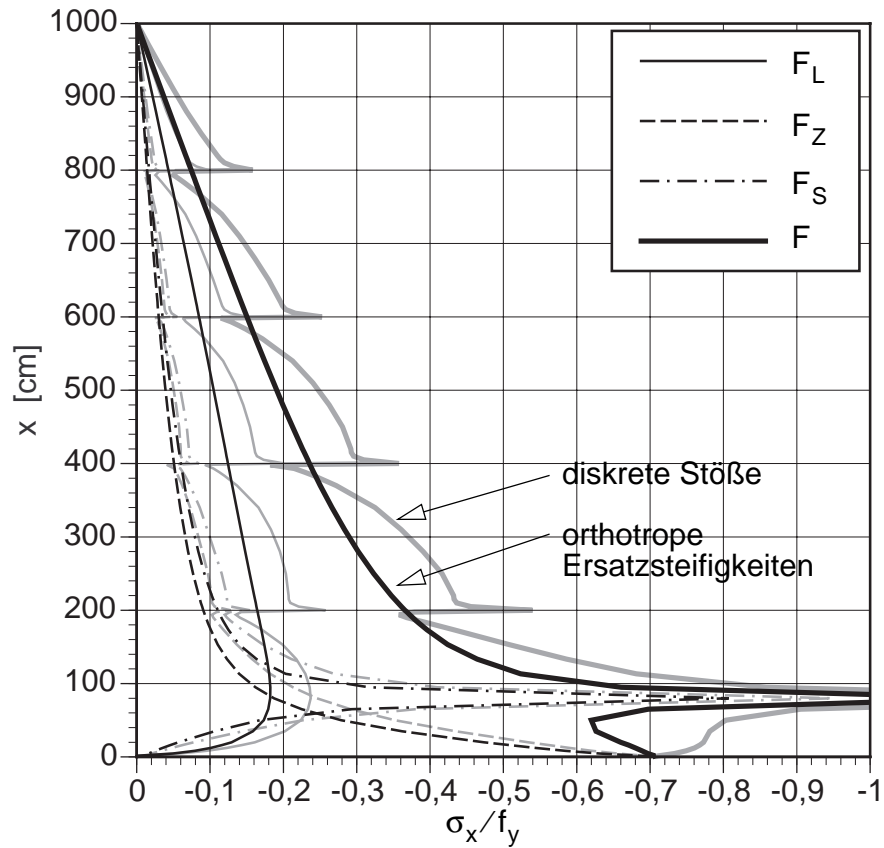


Bild 8-186 Membranaxialspannung in $\Theta = 0^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

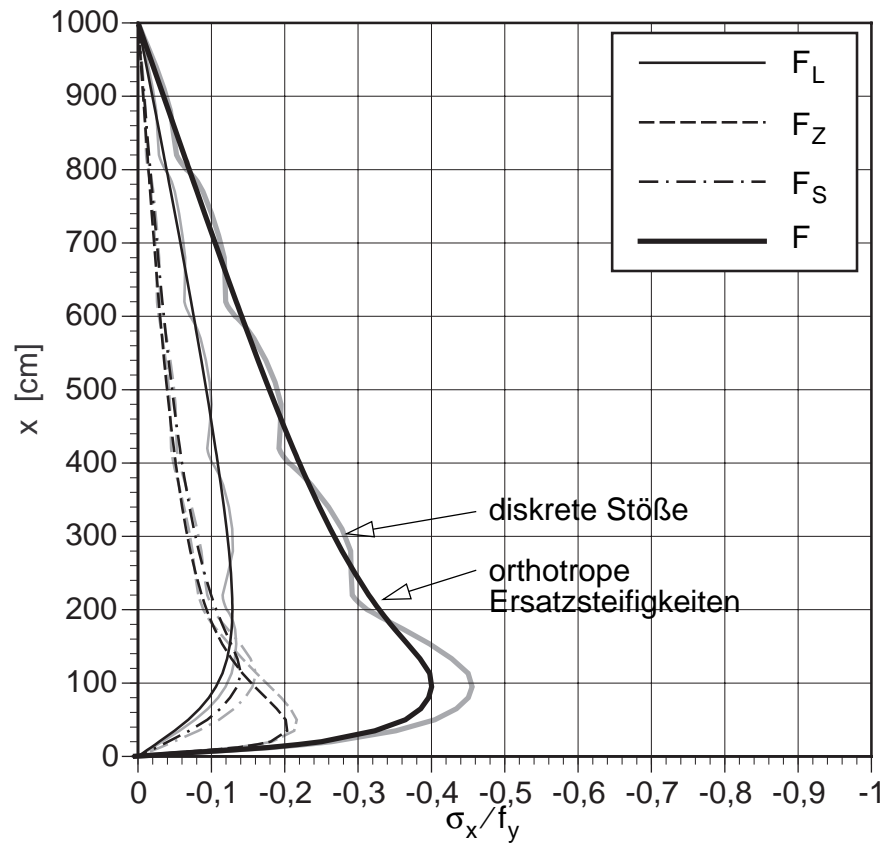


Bild 8-187 Membranaxialspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

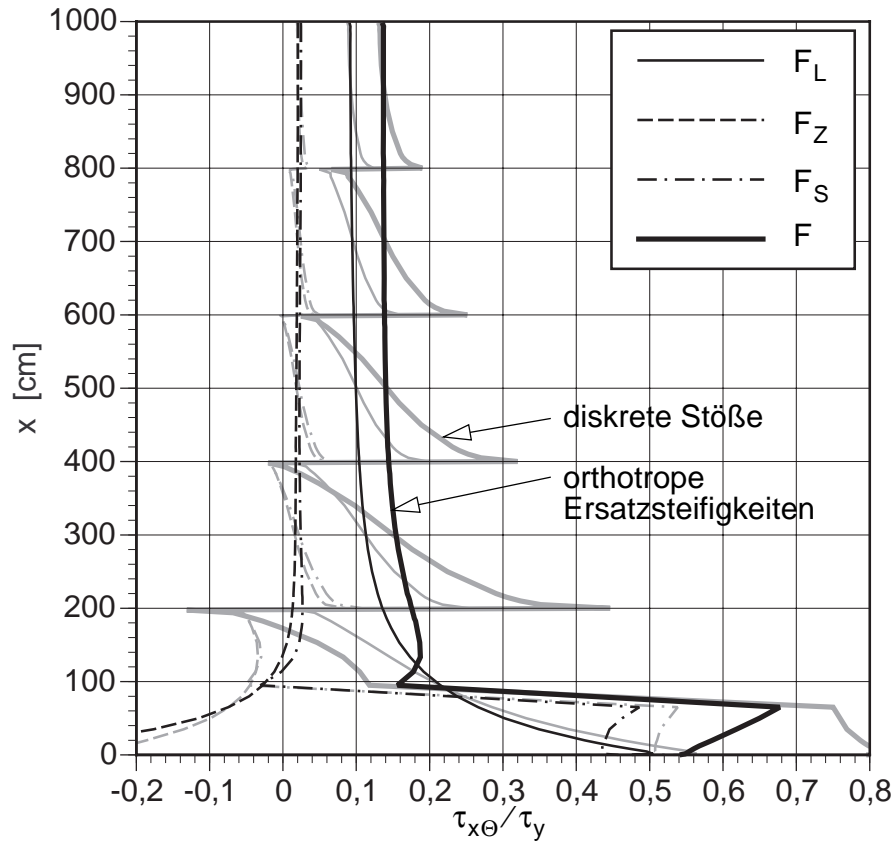


Bild 8-188 Membranschubspannung in $\Theta = 0^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

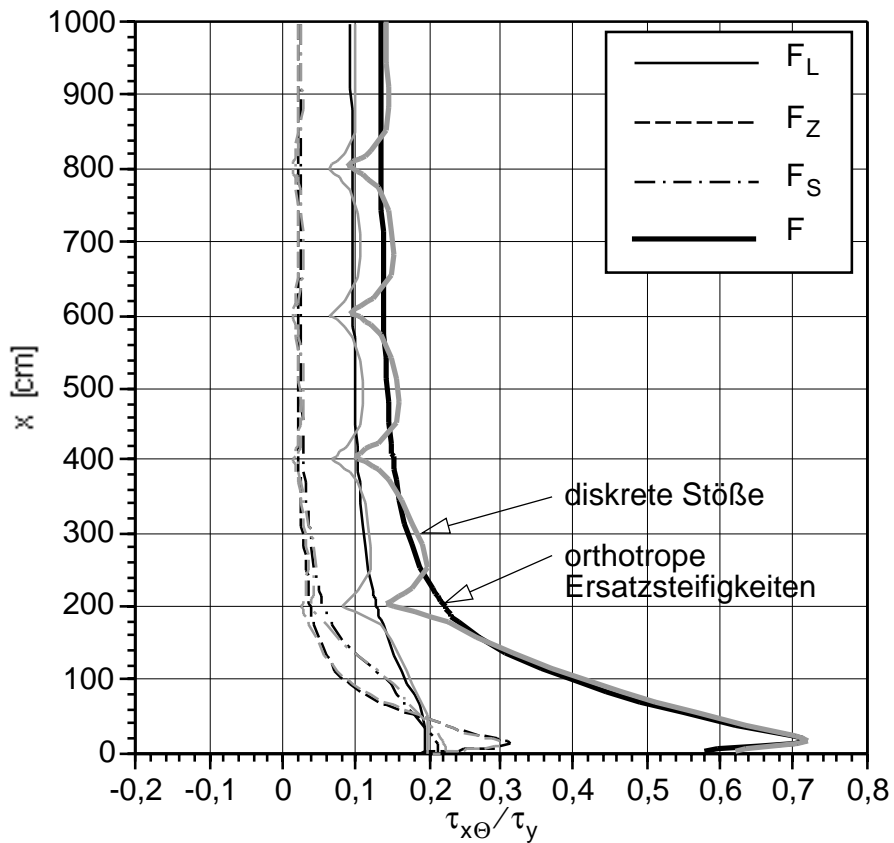


Bild 8-189 Membranschubspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — HEB 300, $n_{St} = 4$

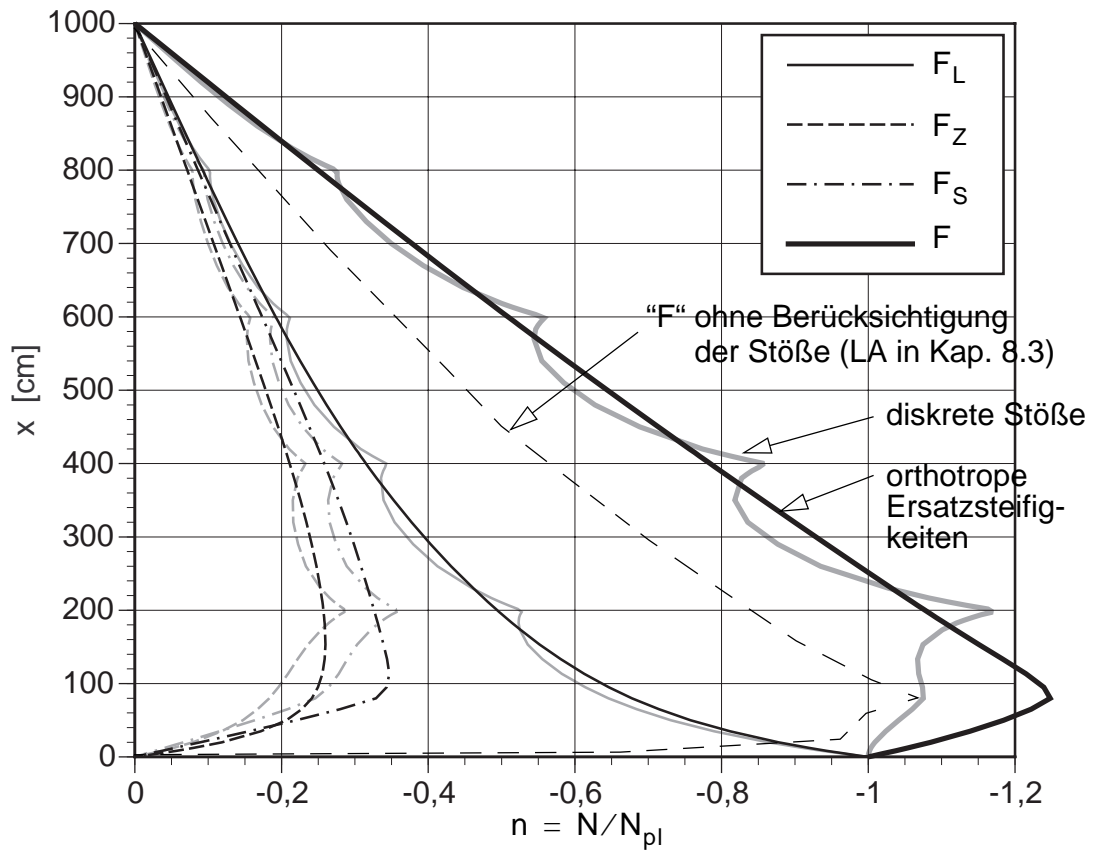


Bild 8-190 Normalkraftbeanspruchung der Auflagerlängssteife bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

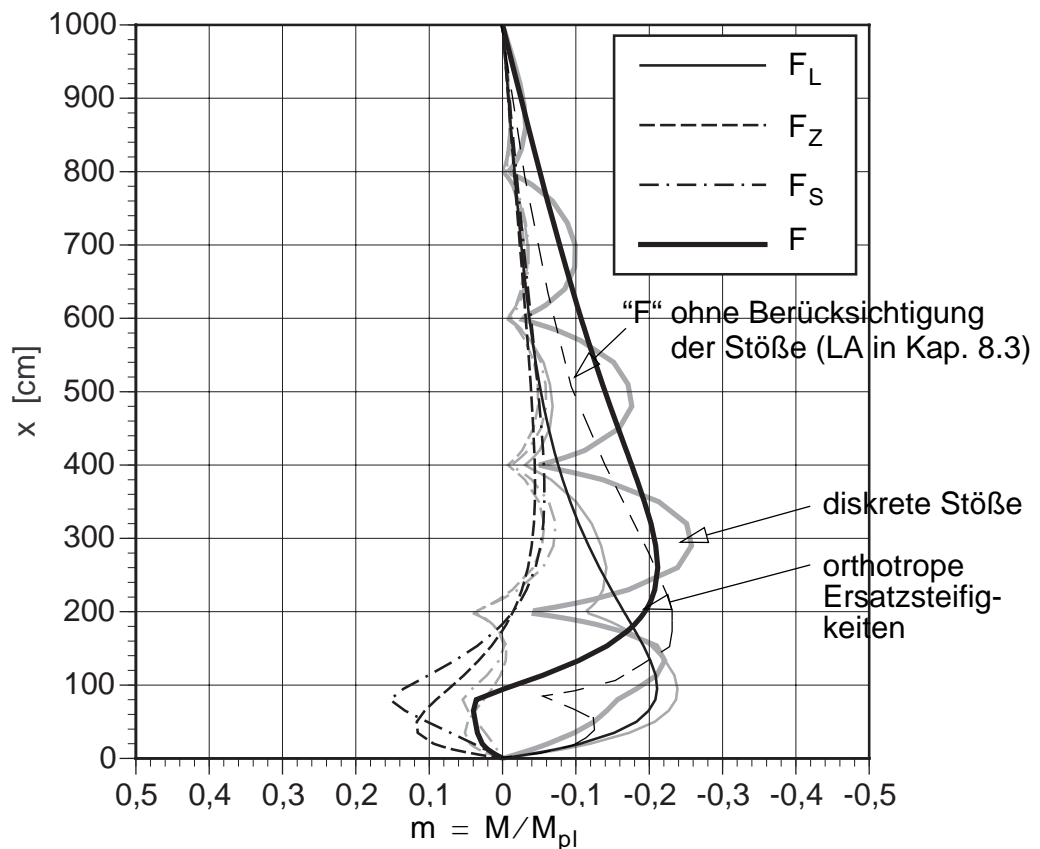


Bild 8-191 Biegemomentenbeanspruchung der Längssteife bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

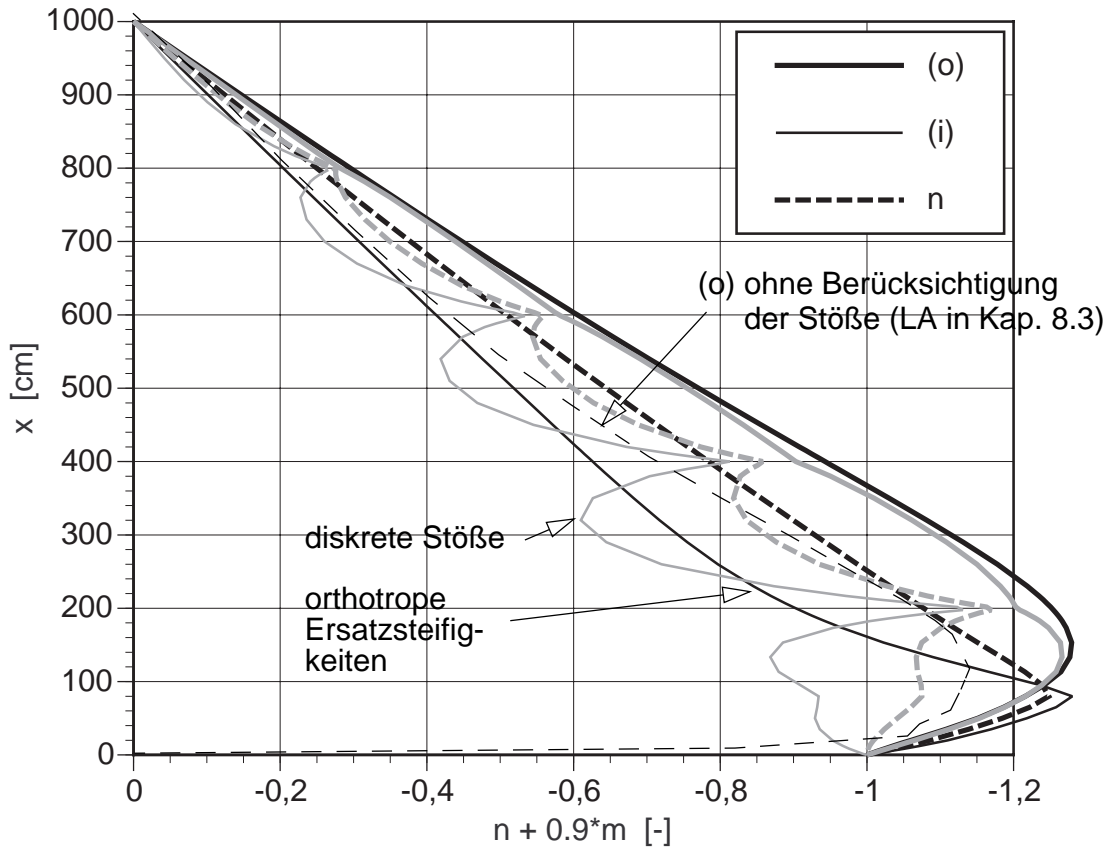


Bild 8-192 Querschnittsausnutzung der Auflagerlängssteife bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

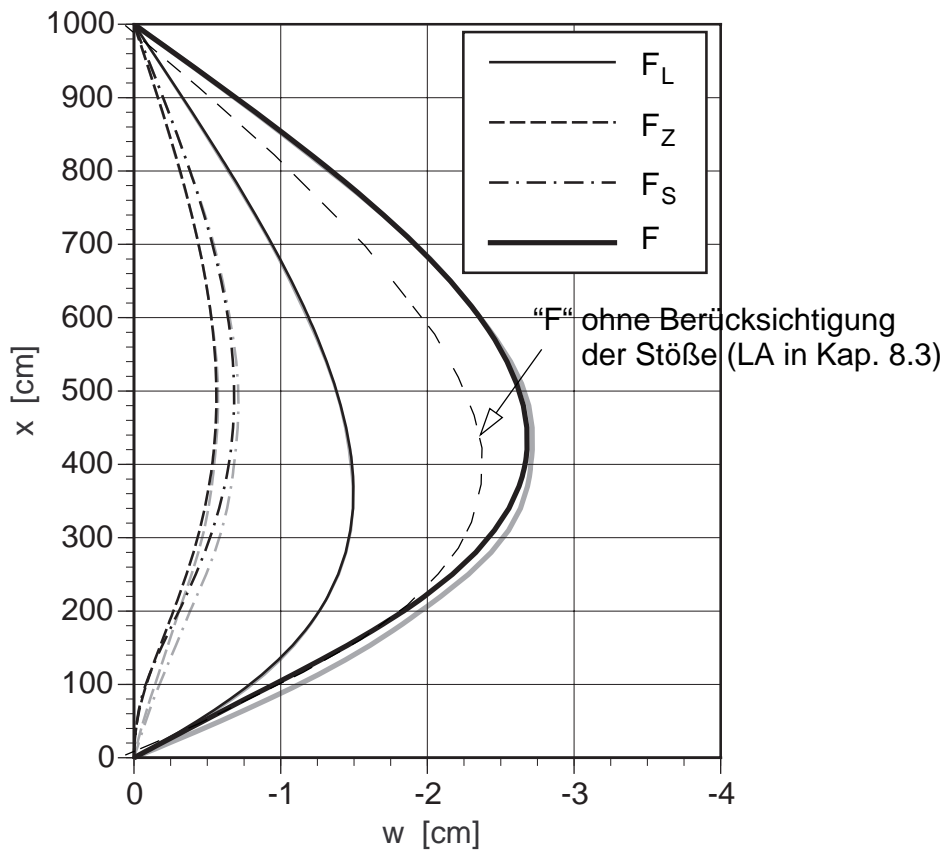


Bild 8-193 Radialverformung der Auflagerlängssteife bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

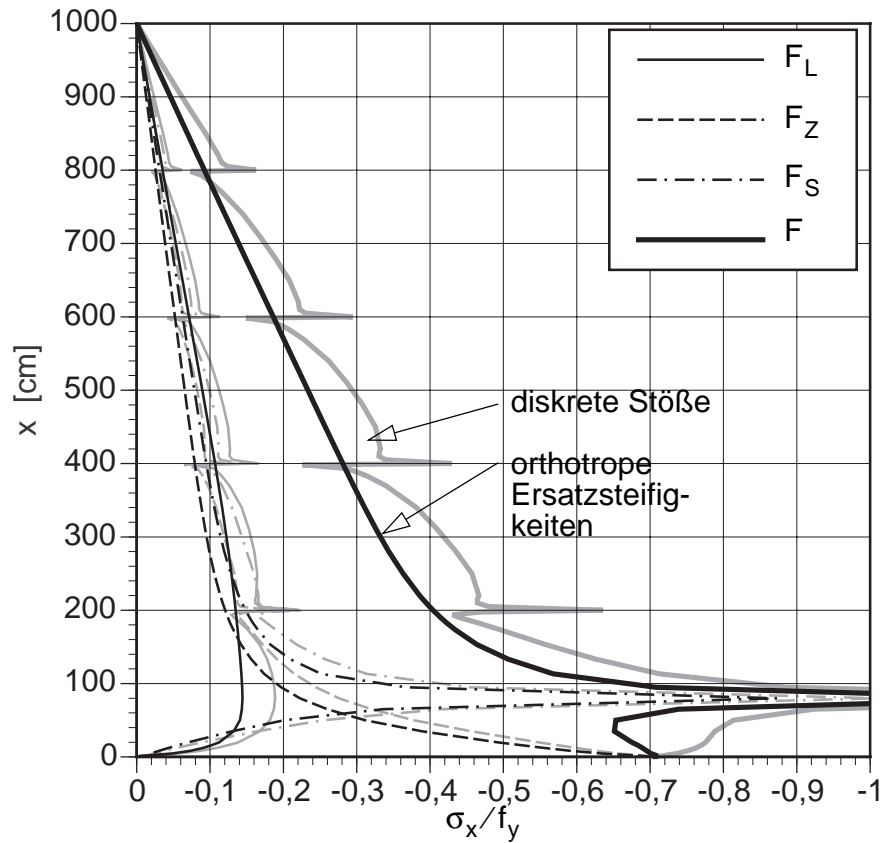


Bild 8-194 Membranaxialspannung in $\Theta = 0^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeit für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

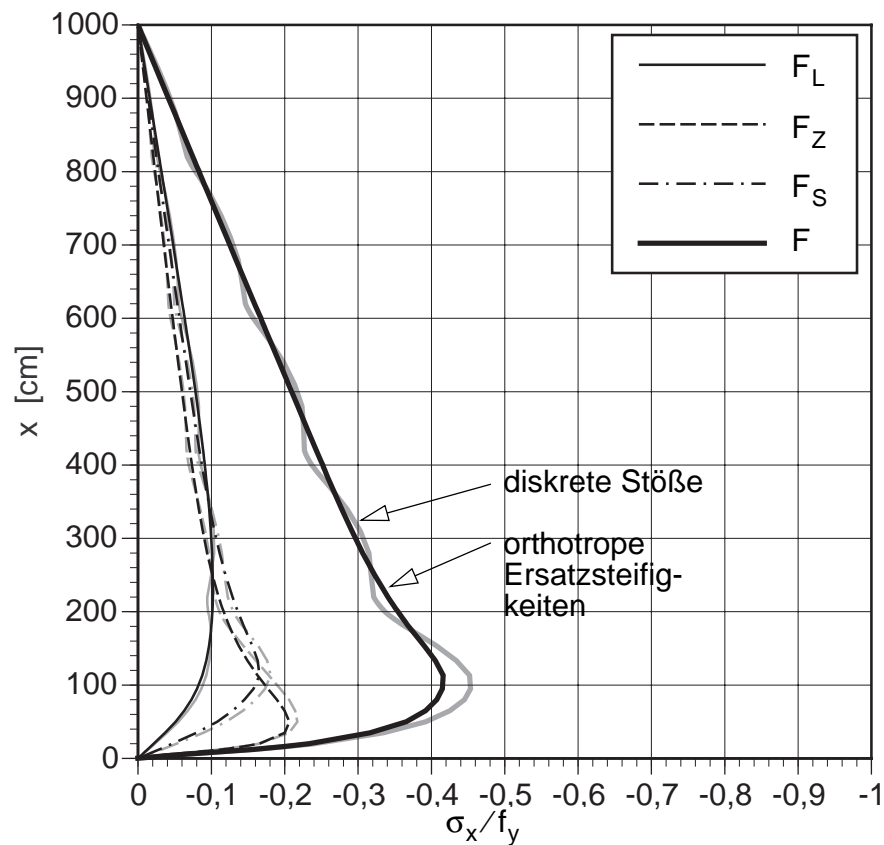


Bild 8-195 Membranaxialspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

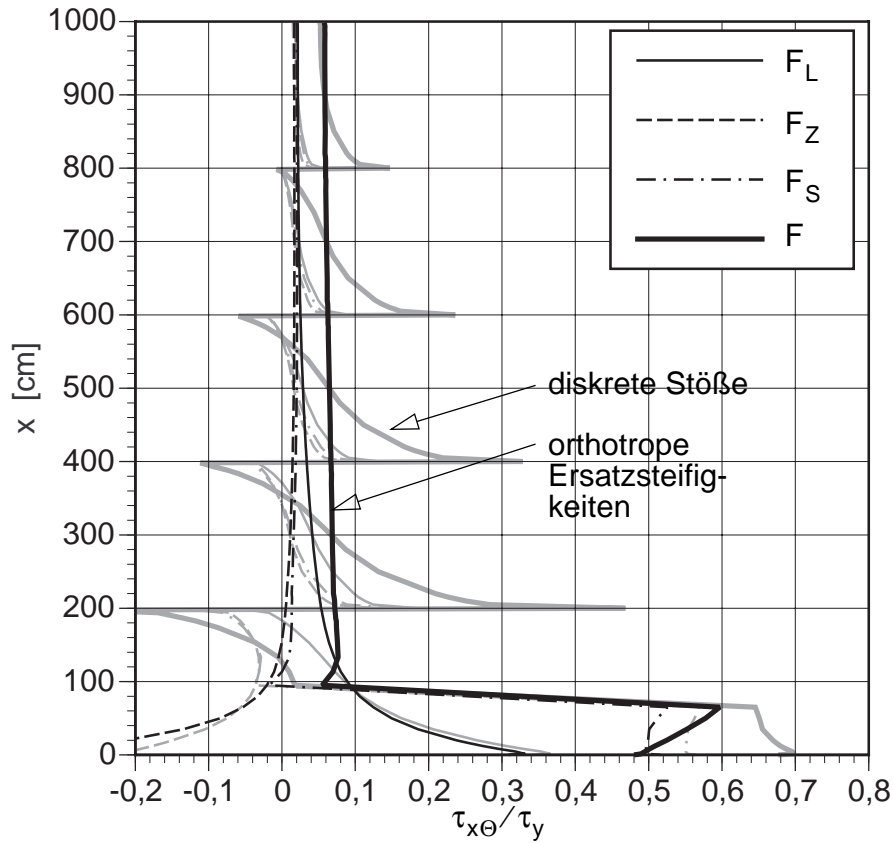


Bild 8-196 Membranschubspannung in $\Theta = 0^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

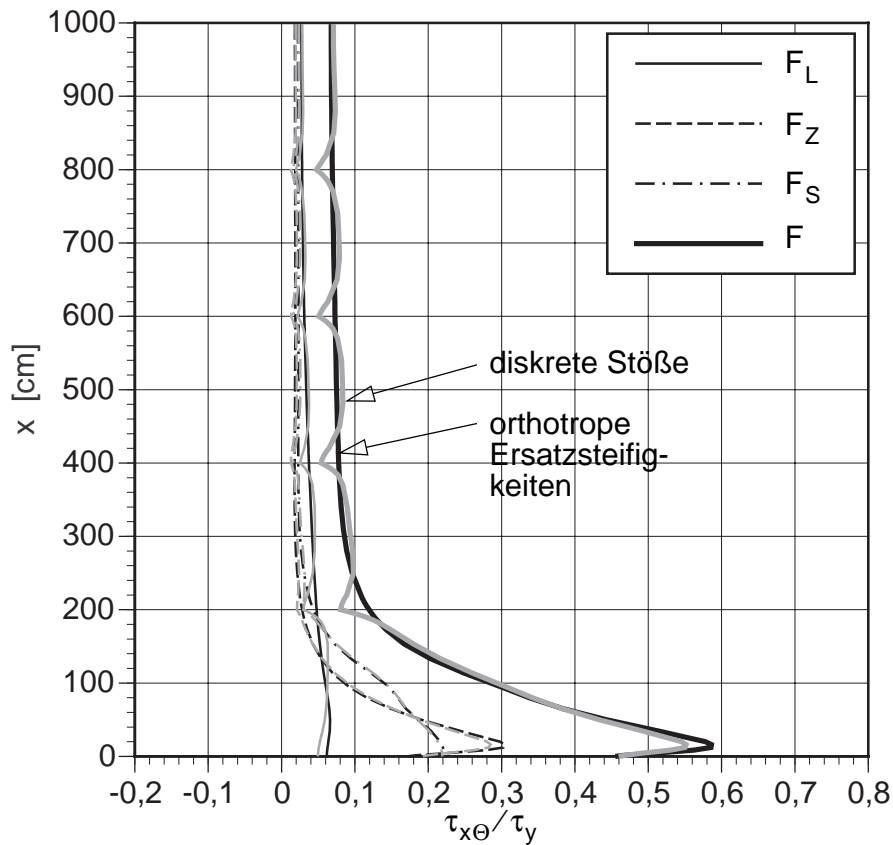


Bild 8-197 Membranschubspannung in $\Theta = 5,6^\circ$ bei Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — HEB 160, $n_{St} = 6$

8.5.2.2 Abschätzung der Tragfähigkeiten auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen

Die Abschätzung der Tragfähigkeiten auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen erfolgt wie in Kap. 8.3 getrennt für:

- Längssteife:
Die Abschätzung der Tragfähigkeiten erfolgt durch die Bestimmung der maßgebenden Querschnittbeanspruchung $n + 0,9m$ mit $n = N/N_{pl}$ und $m = M/M_{pl}$
- Schaft:
Die Abschätzung der Tragfähigkeiten erfolgt durch die Bestimmung der Beultragfähigkeit auf Basis der Axialspannungen (σ_x/f_y) im Beulmeridian und der Gegenüberstellung der Beultragfähigkeit der Schalenwand (Beulabminderungsfaktor κ).

Die Beanspruchungen der Längssteife sind im Fall der diskreten Stöße mit einer FE-Analyse bestimmt. Die Berechnung der orthotropen Schale werden sowohl mit einer FE-Analyse als auch mithilfe des Rechenmodelles inklusive Stabilitätseffekten durchgeführt. Durch die Verteilung der Lagerkräfte über Einleitungsflächen liefert das Rechenmodell durch die Doppelreihenlösung etwas geringere Beanspruchungen im Auflagerbereich.

Zu bemerken ist, daß die Ergebnisse von Bild 8-182 bis Bild 8-197 zu den FE-Analysen zugehörig sind. Die Ergebnisse die mithilfe des Rechenmodelles erzielt werden, sind somit nur in Form der Beanspruchungen der Längssteife sowohl für Berechnungen nach 1. Ordnung als auch 2. Ordnung in Tab. 8-31 dargestellt.

Die Berechnungen nach Theorie 2. Ordnung können nur mit dem linear-elastischen Rechenmodell inklusive Stabilitätseffekten durchgeführt werden. Dabei wird auf den versteifenden Effekt eines allfälligen Innendruckes auf die Schalenwand verzichtet. Zusätzlich wird eine nach innen gerichtete Vorkrümmung der Längssteife in Form der Imperfektionersatzlast q_z berücksichtigt.

Die Tragfähigkeiten des Schaftes werden auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen mithilfe der Axialspannungen im sogenannten Beulmeridian und durch Gegenüberstellung der Beultragfähigkeit der Schalenwand bestimmt. Signifikante Größe zur Bestimmung der Beultragfähigkeit ist der Beulabminderungsfaktor κ . Hier wird, wie in Kap. 8.3.3.2, jener für Axialbeulung nach Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) angewandt. In Tab. 8-32 werden die Beultragfähigkeiten des Schaftes bestimmt.

Tab. 8-31 Tragfähigkeiten der Längssteife auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen

Variante	Modellierung der Stöße	Berechnung nach Theorie 1. Ordnung		Berechnung nach Theorie 2. Ordnung mit $N_{init} + n_{x,init}$		2. O. mit $N_{init} + n_{x,init}$ und Imperfektionser-satzlast q_z	
		$n + 0.9m$	Lastfaktor Λ	$n + 0.9m$	Lastfaktor Λ	$n + 0.9m$	Lastfaktor Λ
HEB 300 $n_{St} = 4$	diskret	1.091 ¹⁾	0.917				
	orthotrope Schalenwand	1.017 ¹⁾	0.983				
		1.029	0.972	1.0378	0.964	1.110	0.901
HEB 160 $n_{St} = 6$	diskret	1.266 ¹⁾	0.790				
	orthotrope Schalenwand	1.280 ¹⁾	0.781				
		1.159	0.863	1.249	0.801	1.326	0.754

¹⁾ linear-elastische FE-Berechnung

Tab. 8-32 Tragfähigkeiten des Schaftes auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen

Variante	Modellierung der Stöße	Ergebnisse der linearen FE-Analysen		
		σ_x/f_y im Beul- meridian	κ_{EC3} (Beulab- minder- ungsfaktor)	$\Lambda = \frac{\kappa_{EC3}}{\sigma_x/f_y}$
HEB 300 $n_{St} = 4$	diskrete Stöße	0.450	0.359	0.917
	orthotrope Schalenwand	0.420		0.983
HEB 160 $n_{St} = 6$	diskrete Stöße	0.455	0.359	0.790
	orthotrope Schalenwand	0.400		0.781

Der Vergleich mit den Tragfähigkeiten des Anwendungsbeispiels von Kap. 8.3 (siehe Kap. 8.3.2.7) zeigt, daß durch die Berücksichtigung der elastischen Stoßnachgiebigkeiten und die somit verringerte Gesamtsteifigkeit des Schaftes der Schaft entlastet wird. Somit steigt die Beultragfähigkeit des Schaftes gegenüber jener, die in Kap. 8.3.2.7 für das Anwendungsbeispiel bestimmt wird.

Im Gegenzug wird die Auflagerlängssteife stärker beansprucht, die Tragfähigkeit sinkt somit gegenüber jener, die in Kap. 8.3.2.7 bestimmt wird.

8.5.3 Nichtlineare FE-Vergleichsberechnungen

Zur Verifikation der bestimmten Tragfähigkeiten auf Basis der linear-elastischen Spannungsberechnungen werden wiederum folgende nichtlineare Berechnungen angestellt:

- GMNA-Analyse des perfekten Systems
- GMNIA-Analyse des imperfekten Systems

Die Stöße sind bei den nichtlinearen Berechnungen ebenfalls mit ihrem linear-elastischen Verhalten erfaßt. Bei den GMNIA-Analysen wird die Vorkrümmung der Längssteife wieder durch die Imperfektionsersatzlast q_z ersetzt.

Ergebnisse der GMNIA-Berechnungen

Es werden dargestellt:

- Beulverformungen
- Lastverschiebungsdiagramme für ausgewählte Punkte des Längssteifenmeridians

Die Beulverformungen in Bild 8-198 bzw. Bild 8-201 zeigen bei beiden Varianten — Auflagerlängssteife HEB 300 oder HEB 160 — elasto-plastisches Knicken der Längssteife durch die Ausbildung eines Fließgelenkes im Bereich $x/L \approx 0,2$ als maßgebenden Versagensmodus.

Der Last-Radialverschiebungskurve für $x/L = 0,4$ der linear-elastischen Berechnungen inklusive Stabilitätseffekten mit Doppelreihenlösung zeigt wiederum eine gute Übereinstimmung mit der Last-Verschiebungskurve der GMNIA-Berechnung. Die linear-elastischen Berechnungen liefern ähnlich wie in Kap. 8.3 die Sekantensteifigkeit bis ca. 70% des Lastmaximums für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300 — und bis ca. 60% des Lastmaximums für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160. Durch die Fließzonenausbildung in der Auflagerlängssteife im Zuge der GMNIA-Berechnungen weichen die Lastverschiebungskurven der beiden Berechnungsvarianten danach ab. Die bestimmten Lastmaxima zeigen eine gute Übereinstimmung.

Ergebnisdarstellung für Variante 1 — HEB 300

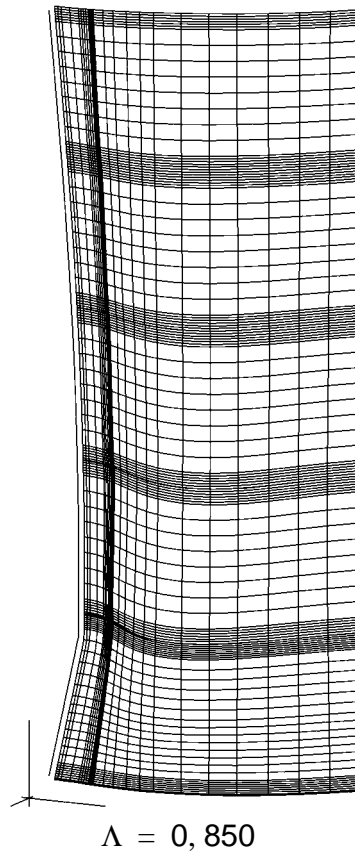


Bild 8-198 Beulverformungen bei linear-elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$

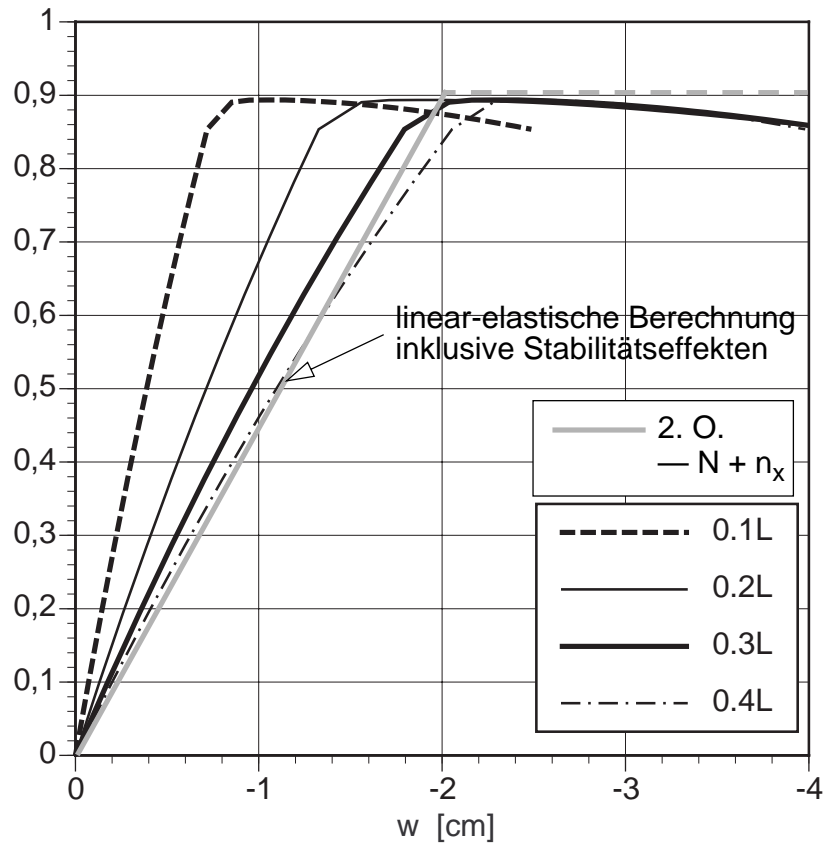


Bild 8-199 Last-Radialverschiebungsdiagramm bei linear-elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$

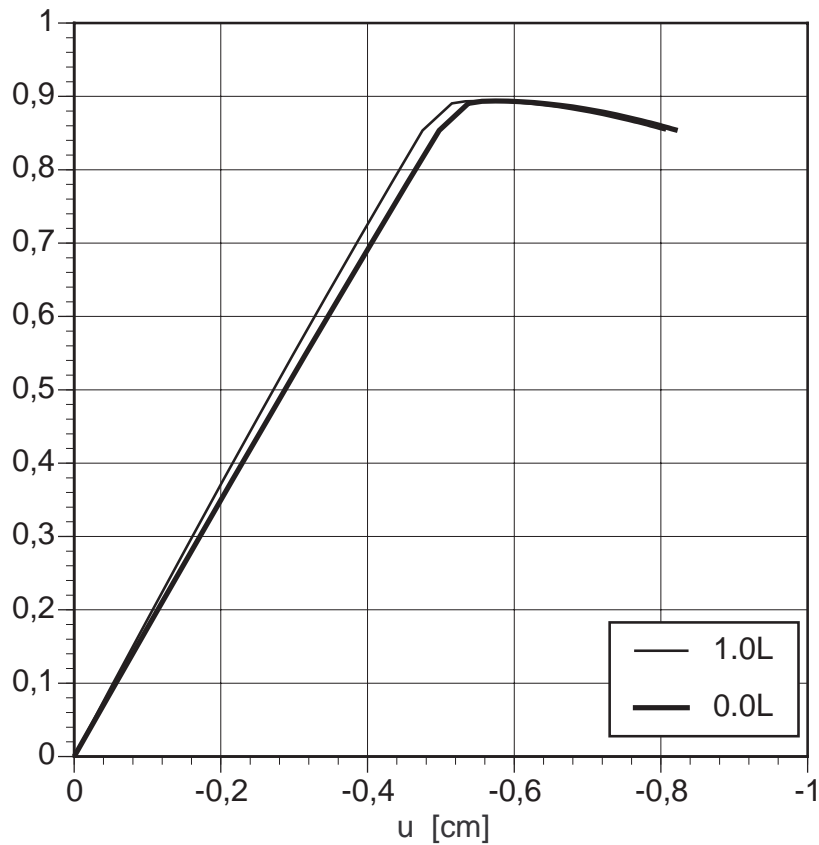


Bild 8-200 Last-Axialverschiebungsdiagramm bei linear-elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 1 — Auflagerlängssteife HEB 300, $n_{St} = 4$

Variante 2 — HEB 160

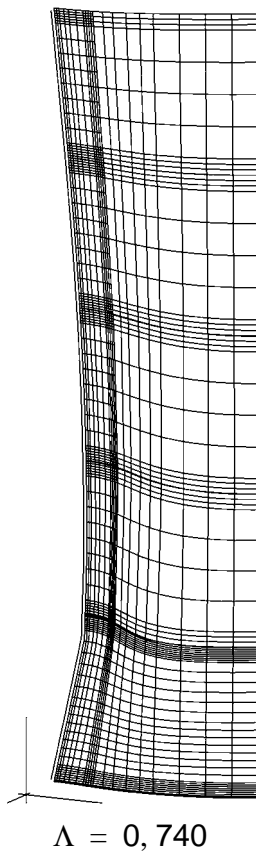


Bild 8-201 Beulverformungen bei linear-elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

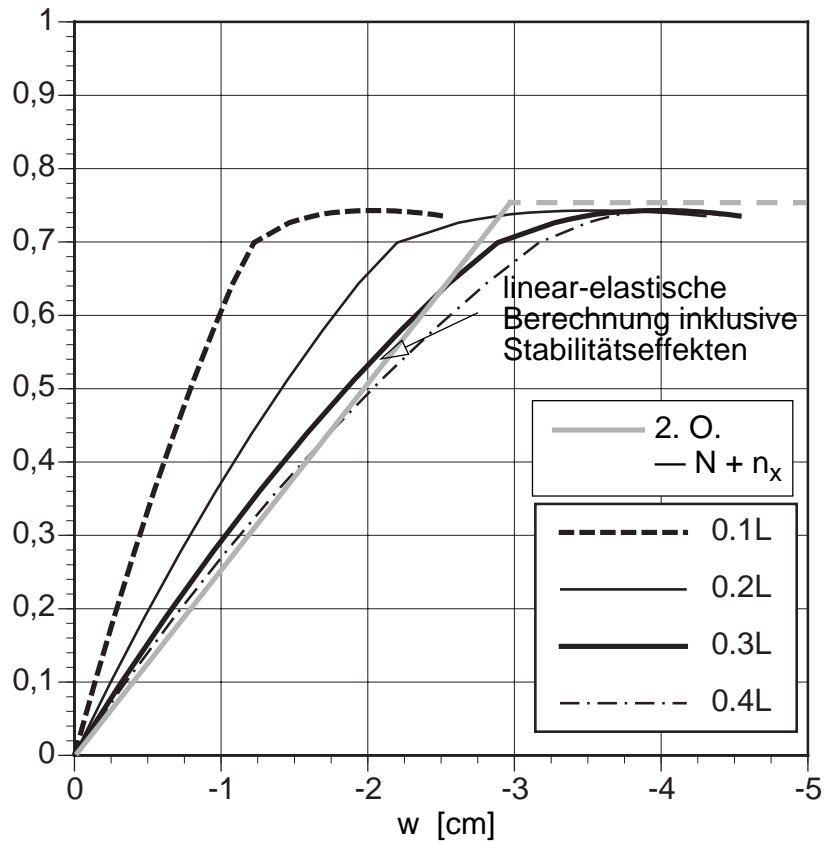


Bild 8-202 Last-Radialverschiebungsdiagramm bei linear-elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

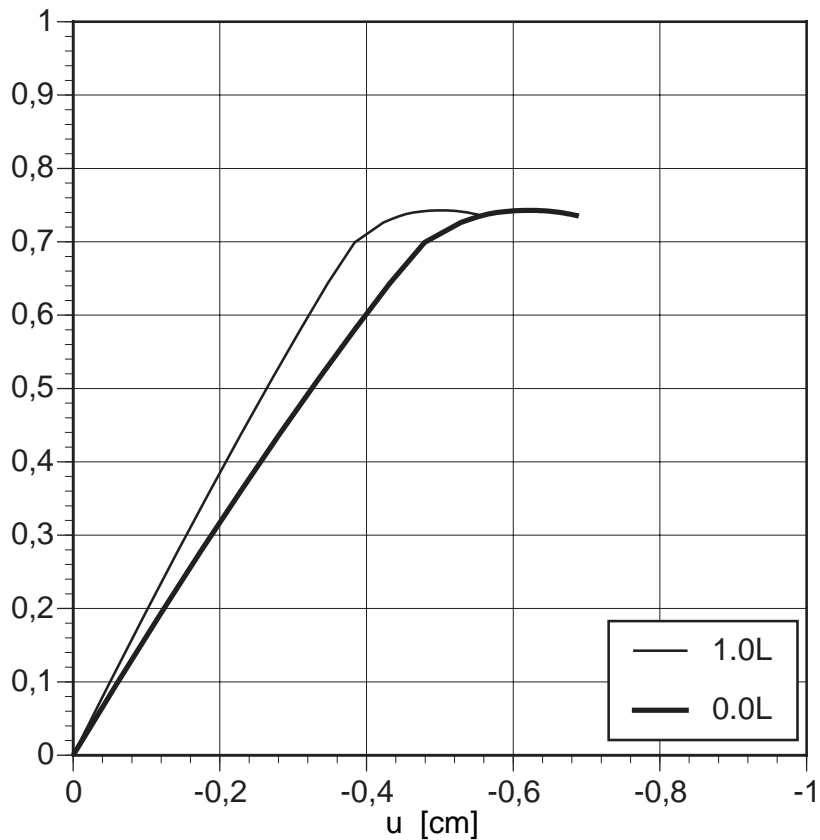


Bild 8-203 Last-Axialverschiebungsdiagramm bei linear-elastischen Stoßnachgiebigkeiten für Variante 2 — Auflagerlängssteife HEB 160, $n_{St} = 6$

8.5.4 Vergleich der Tragfähigkeiten linearer und nichtlinearer Berechnungen

Der Vergleich der Tragfähigkeiten erfolgt hinsichtlich der abgeschätzten Tragfähigkeiten der Auflagerlängssteifen auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen und den Ergebnissen der nichtlinearen Beulberechnungen (GMNA bzw. GMNIA). Dabei sind in Tab. 8-33 sowohl die Ergebnisse der linearen FE-Berechnungen als auch die Ergebnisse der linear-elastischen Berechnungen inklusive Stabilitätseffekten (Theorie 2. Ordnung) dargestellt.

Generell zeigt sich in Tab. 8-33 eine gute Übereinstimmung zwischen den auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen bestimmten Tragfähigkeiten der Auflagerlängssteife und den Tragfähigkeiten der nichtlinearen FE-Beulberechnungen. Die zuvor dargestellten Beulversagensformen (Kap. 8.5.3) zeigen durchwegs ein elasto-plastisches Knickversagen der Auflagerlängssteifen, die linear-elastischen Berechnungen zeigen ebenfalls diese Versagensform durch die Ausbildung eines Fließgelenkes in der Auflagerlängssteife.

Tab. 8-33 Vergleich der Tragfähigkeiten

		Linear-elastische Berechnungen (LA) — Bestimmung der Tragfähigkeit der Auflagerlängs- steife auf Basis der maximalen Querschnitts- beanspruchung (n+0,9m)		Nichtlineare FE- Berechnung (GMNA bzw. GMNIA)
		Berechnungsart	Lastfaktor Λ	Lastfaktor Λ
HEB 300, $n_{St} = 4$	diskrete Stöße	FE-Berechnung	0.917	
	ortho- trope Schalen- wand	FE-Berechnung	0.983	
		1. Ordnung	0.972	
		2. Ordnung mit $N + n_x$	0.964	0.976
		2. Ordnung mit $N + n_x +$ Imperfektionersatzlast q_z	0.901	0.894
HEB 160, $n_{St} = 6$	diskrete Stöße	FE-Berechnung	0.790	
	ortho- trope Schalen- wand	FE-Berechnung	0.781	
		1. Ordnung	0.863	
		2. Ordnung mit $N + n_x$	0.801	0.803
		2. Ordnung mit $N + n_x +$ Imperfektionersatzlast q_z	0.754	0.743

8.5.5 Zusammenfassung von Kap. 8.5

Zusammenfassung

Die angestellten Untersuchungen zeigen Folgendes:

- Die Nachgiebigkeit horizontaler Schraubstöße kann herkömmlich durch die Modellierung mit diskreten Stoßelementreihen im Zuge einer FE-Berechnung oder in guter Übereinstimmung alternativ mit orthotropen Schalenersatzsteifigkeiten (mithilfe des analytischen Berechnungsmodelles von Kap. 8.2) erfaßt werden. Dabei liefert die globale Erfassung der Nachgiebigkeitseffekte bei Anwendung orthotroper Schalenersatzsteifigkeiten gemittelte Schnittkraftverteilungen jener Verteilungen, die sich durch die Berücksichtigung diskreter horizontaler Stöße ergeben.
- Die Tragfähigkeit des Gesamtsystems wurde auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen und nichtlinearer FE-Vergleichsberechnungen untersucht. Maßgebend ist dabei das elasto-plastische Knicken der Längssteife.
- Die Tragfähigkeitswerte auf Basis linear-elastischer Berechnungen zeigen wiederum eine sehr gute Übereinstimmung mit den Resultaten der geometrisch und materiell nichtlinearen FE-Berechnungen. Bedingt durch die horizontalen Schraubstöße und die damit reduzierte Gesamtsteifigkeit der Schalenwand kommt es, verglichen mit den Resultaten von Kap. 8.3, bei denen jegliche Stoßnachgiebigkeiten unberücksichtigt blieben, zu einer Mehrbeanspruchung der Auflagerlängssteife. Damit ergeben sich die geringeren Tragfähigkeitswerte bei Berücksichtigung horizontaler Schraubstöße.

Die Schraubstöße wurden dabei mit ihrer linear-elastischen Nachgiebigkeit berücksichtigt.

Ausblick

Folgende Einflüsse wurden nicht untersucht:

- Überlappung der Schraubstöße und die dadurch bewirkte erhöhte Nachgiebigkeit der Schraubstöße
- materiell nichtlineares Verhalten der Schraubstöße
- maßgebende Imperfektion der Schalenwand zur Bestimmung der Beultragfähigkeit

Der Einfluß des nichtlinearen Verhaltens und die Überlappung der Schraubstöße können vor allem hinsichtlich des Schalenbeulens von Bedeutung sein (DIN 18800 - Teil 4 (1990), Rotter (1989)).

9

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Vorbemerkung

Detaillierte Zusammenfassungen zu den “Arbeitskapiteln“ sind jeweils am Ende der Teilkapitel 4 bis 7 (“Trichter“, “Trichter–Schaft–Übergang“, “Basisringträger“ und “Auflagerkrafteinleitungsbereich“) bzw. in Kap. 8 “Schaft–Längssteifen–System“ am Ende von Kap. 8.2.1 bzw. der weiteren Unterkapitel 8.3 bis 8.5 zu finden.

In der folgenden Zusammenfassung wird zum Teil in wiederholender Art und Weise auf diese Kapitelzusammenfassungen zurückgegriffen.

9.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit “Modellbildung und plastische Tragfähigkeit diskret gelagerter Stahlsilokonstruktionen mit Auflagerlängssteifen“ befaßt sich mit der baustatischen Modellierung und Berechnung von Stahlsilokonstruktionen. Nach Darlegung des Wissenstandes im Hinblick auf die baustatische Silo–Modellierung wurde eine grundlegende Modellbildungsstrategie zur vollständigen Behandlung einer komplexen Silostruktur erarbeitet, wobei der komplexe Fall diskret aufgelagerter Silos mit sich über die gesamte Schafthöhe erstreckenden Auflagerlängssteifen behandelt wurde.

In Anlehnung an Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) bzw. Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999) wurde die baustatische Modellbildung durch das Herauslösen isoliert betrachteter Teiltragsysteme derart vorgenommen, daß das kräftemässige Zusammenwirken der Teiltragsysteme stets in konsistenter Art und Weise durch die Erfüllung des Gleichgewichtes am Gesamtsystem berücksichtigt wird. In den Anforderungen von Eurocode 3 - Teil 4.1 (1999) kann diese Modellbildung als Modellbildungsstufe 3' klassifiziert werden, wobei die höchste Modellbildungsstufe 3 die Berechnung des Gesamtsystems bedeutet.

Wesentlich für die vorliegende Arbeit war die Berücksichtigung konstruktiver Gegebenheiten, wie im Auflagerbereich eingebaute Schottbleche oder die Modellierung der Nachgiebigkeit von Schraubanschlüssen z.B. zwischen einzelnen Schalensegmenten oder zwischen Schaft und Auflagerlängssteifen.

Gegenüber “traditionellen“ Modellbildungen wurden folgende Verfeinerungen vorgenommen:

- **Trichter:**
Berücksichtigung optionaler lokaler Trichterauflagerungen über den Schottblechen, die in den diskreten Auflagerpunkten in dem aus Standzarge, Trichter und Basisringblech entstehenden dreieckigen Hohlkastenquerschnitt (=Basisringträger) eingebaut sind.
- **Trichter-Schaft-Übergang:**
Verfeinerte Modellierung bzw. “verfeinerte“ Berechnung der plastischen Tragfähigkeit des Trichter-Schaft-Überganges durch die Berücksichtigung von Membranbeanspruchungen der angrenzenden Schalenteile.
- **Basisringträger:**
Berücksichtigung des Basisringträgers als sekundäres Lastabtragungselement, das durch Einzeltorsionsmomente und Einzelradialkräfte beansprucht wird. Zu bemerken ist, daß diese

Kraftwirkungen nur bei Berücksichtigung der optionalen lokalen Trichterauflagerung als Gleichgewichtskräfte am Schottblech notwendig sind und entgegengesetzt gerichtet am Basisringträger einwirken.

- Auflagerkrafteinleitungsbereich:
Berücksichtigung von Interaktionseffekten im Auflagerbereich zufolge verschiedener Auflagerkrafteinleitungsmechanismen.
- Schaft–Längssteifen–System:
Exakte Berücksichtigung des kräfte- und formschlüssigen Zusammenwirkens von Schaft und Auflagerlängssteife.

Kap. 4 — Trichter

Bei isolierter Behandlung des Trichters erfolgte die Aufteilung der Lastabtragung in einen rotationssymmetrischen Grundanteil, repräsentiert durch konstant verteilte meridionale Randkräfte und den Anteil zusätzlicher lokaler Auflagerungsmöglichkeiten.

In einer einfachen Studie wurde eingangs der rotationssymmetrische Lastanteil auf Basis der Membrantheorie untersucht, wobei erwartungsgemäß eine gute Übereinstimmung mit Tragfähigkeitswerten elasto-plastischer Schalenberechnungen, welche zusätzlich begünstigende Randeffekte berücksichtigen, erzielt wird.

Die plastische Grenztragfähigkeit des isolierten Trichters setzt sich aus dem rotationssymmetrischen Grundanteil und dem Anteil optional möglicher lokaler Auflagerungen zusammen. Die Interaktionseffekte beider Lastabtragungsmöglichkeiten können auf Basis einfachster Von-Mises-gesteuerter plastischer Interaktionen zutreffend rechnerisch abgeschätzt und in die Form von Bemessungsformeln gekleidet werden. Dadurch können die Ergebnisse der numerischen MNA-Berechnungen ökonomisch und auf der sicheren Seite liegend qualitativ dargestellt werden.

Alternativ durchgeführte Abschätzungen der plastischen Tragfähigkeiten auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen führen zu unrealistisch kleinen Werten der Tragfähigkeiten, die Membrantheorie erweist sich zur Tragfähigkeitsbestimmung der lokalen Auflagerungen des Trichters als gänzlich ungeeignet.

Kap. 5 — Trichter–Schaft–Übergang

Die Berechnung der plastischen Tragfähigkeit rotationssymmetrisch beanspruchter Schalenstöße wird in der vorliegenden Form durch die Modifikation der bisher verwendeten plastischen mitwirkenden Breiten (Rotter bzw. Teng) unter Berücksichtigung von Membrangrundspannungen der Einzelteile vorgenommen. Die Grundlage der ausgearbeiteten Bemessungsformeln, welche nahezu in ungeänderter Form in Eurocode 3 - Teil 1.6 (1999) in Annex B übernommen wurden, bilden materiell nichtlineare FE-Berechnungen.

Anhand von zwei Demonstrationsbeispielen wird die gute Übereinstimmung mit den realen Tragfähigkeiten materiell nichtlinearer FE-Berechnungen gezeigt.

Kap. 6 — Basisringträger

Die plastische Grenztragfähigkeit hinsichtlich der abzutragenden Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente wurde sowohl am isolierten Basisringträger als auch am integrierten Basisringträger (Schaft-Basisringträger-System) auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen und materiell nichtlinearer FE-Berechnungen bestimmt.

Sowohl die linear-elastischen als auch elasto-plastischen bzw. starrplastischen Berechnungen zeigen, daß für den Lastfall "Einzeltorsionsmomente" die stützende Wirkung durch die Schalenwand in ungleich höherem Maß aktiviert wird als im Lastfall "Einzelradialkräfte". Dies begründet sich beim Lastfall "Einzeltorsionsmomente" bei Außerachtlassung der stützenden Wirkung der Schalenwand am Basisringträger mit den zugehörig zu seiner "Trägerrosttragwirkung" entstehenden Vertikalverformungen. Beim Lastfall "Einzelradialkräfte" liegt eine Beanspruchung in der "Ringebene" des Basisringträgers vor, die Ringträgerbeanspruchungen werden somit durch das Zusammenwirken mit der Schalenwand nur geringfügig verändert.

Die bestimmten Tragfähigkeitswerte auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen ergeben erwartungsgemäß eine konservative Abschätzung der Tragfähigkeitswerte materiell nichtlinearer Berechnungen. Es zeigt sich, daß die Berechnungen am isolierten Basisringträger durchaus für diese beiden Lastfälle anwendbar sind und eine gute Abschätzung der Resultate materiell nichtlinearer Berechnungen des integrierten Basisringträgers darstellen. Analytische starrplastische Berechnungen des integrierten Basisringträgers liefern bei beiden Lastfällen nahezu idente Tragfähigkeitswerte zu jenen der elasto-plastischen, materiell nicht-linearen FE-Berechnungen.

Kap. 7 — Auflagerkrafteinleitungsbereich

Im Auflagerbereich müssen die Interaktionseffekte verschiedener Teilauflagerkräfte (Auflagerkrafteinleitungsmechanismen) berücksichtigt werden.

Dies gelingt durchaus mit einfachsten Von-Mises-gesteuerten plastischen Interaktionen in guter Übereinstimmung mit materiell nichtlinearen FE-Berechnungen durch die Superposition der maßgebenden Auflagerspannungen. Die vereinfachte Superposition der Auflagerspannungen kann überdies dazu verwendet werden das optimale Aufteilungsverhältnis der Auflagerkräfte vorweg zu bestimmen.

Kap. 8 — Schaft-Längssteifen-System

Als wesentlich stellt sich in Kap. 8 die exakte Berücksichtigung des kraft- und formschlüssigen Zusammenwirkens von Schalenwand und Auflagerlängssteife heraus. Durch das Auftreten von Biegebeanspruchungen in der Auflagerlängssteife, die in einem einfachen Modell ("idealer Schubmembranspannungszustand") durch die Vorgabe konstant verteilter Koppelschubkräfte zwischen Auflagerlängssteife und Schalenwand unberücksichtigt blieben, wird die Tragfähigkeit durch das Auftreten eines Fließgelenkes bestimmt und zeigt als Versagensmodus das elasto-plastische Knicken der Auflagerlängssteife.

Die zugrundeliegenden, exakten elastizitätstheoretischen Berechnungen wurden mithilfe eines erarbeiteten vollständigen analytischen Berechnungsmodell bei Berücksichtigung von Stabilitätseffekten in der Schalenwand als auch in der Auflagerlängssteife durchgeführt. Einschränkungen wie die Voraussetzung starrer Endquerscheiben am oberen und unteren Schalenrand, konstante Schalenwandstärke und äquidistant über den Umfang angeordnete Längssteifen sind hier zu nennen. Dieses Berechnungsmodell wird einerseits in einer umfassenden Parameterstudie und andererseits anhand eines Anwendungsbeispiels erfolgreich angewandt. Weiters wird dazu ein “ingenieurmäßig“ anschauliches Analogiemodell in Form eines Doppelbalken-Modelles entwickelt.

Zur Verifikation der auf Basis linear-elastischer Berechnungen bestimmten Tragfähigkeitswerte wurden nichtlineare FE-Berechnungen durchgeführt. Dabei zeigt sich eine sehr gute Approximation der bestimmten Tragfähigkeiten mit den Resultaten nichtlinearer FE-Beulberechnungen. Dies trifft neben den Tragfähigkeitswerten auch auf das Last-Verschiebungsverhalten zu, wobei bei Anwendung des Berechnungsmodells die Stabilitätseffekte (Theorie 2. Ordnung) vorausschauend auf die erreichbare Traglast in Form von konstanten Initialkräften in der Längssteife als auch der Schalenwand erfaßt wurden. Die zugehörige Last-Verschiebungsscharakteristik stellt sich als Sekantensteifigkeit der nichtlinearen Berechnungen heraus. Als maßgebende Versagensform zeigen die nichtlinearen Beulberechnungen, wie schon festgestellt, durchwegs das elasto-plastische Knicken der Auflagerlängssteife. Dies trifft sowohl auf die Untersuchungen des perfekten als imperfekten Systems zu (GMNA bzw. GMNIA), wobei als maßgebende Imperfektion eine Vorkrümmung der Längssteife zugrundegelegt wird.

Die Erreichbarkeit des idealen Schubmembranspannungszustandes als plastischer Grenzzustand wurde in Kap. 8.4 untersucht. Dieser ideale Membranspannungszustand bildet sich unter Voraussetzung einer biegeelastischen und somit hinsichtlich der zu erreichenden Grenztraglast ausreichend tragfähigen Auflagerlängssteife aus. Das Erreichen dieses plastischen Grenzversagensmodus der Schalenwand ist allerdings gekennzeichnet durch das Auftreten hoher plastischer Dehnungen entlang des Auflagermeridianes in der Schalenwand ($\epsilon_{peq} \approx 50\%$!).

Die plastische Grenztragfähigkeit kann bei den untersuchten Längssteifen praktischer Silokonstruktionen nicht erreicht werden. Vorweg tritt globales Stabilitätsversagen des Gesamtsystems auf. Indiz dafür liefert bereits die vereinfachte Bestimmung der Längssteifenknicklast mithilfe des Doppelbalken-Analogiemodells und wird durch nichtlineare Beulberechnungen bestätigt.

Die Nachgiebigkeit horizontaler Schraubstöße kann herkömmlich durch die Modellierung mit diskreten Stoßelementreihen im Zuge einer FE-Berechnung oder in guter Übereinstimmung alternativ mit orthotropen Schalenersatzsteifigkeiten (mithilfe des analytischen Berechnungsmodells von Kap. 8.2) erfaßt werden. Die Tragfähigkeit des Gesamtsystems, das wiederum auf Basis linear-elastischer Spannungsberechnungen und nichtlinearer FE-Vergleichsberechnungen untersucht wurde, ist wiederum durch das elasto-plastische Knicken der Längssteife bestimmt. Die Schraubstöße wurden dabei mit ihrer linear-elastischen Nachgiebigkeit berücksichtigt.

Bedingt durch die horizontalen Schraubstöße und die damit reduzierte Gesamtsteifigkeit der Schalenwand kommt es, verglichen mit den Resultaten, bei denen jegliche Stoßnachgiebigkeiten unberücksichtigt blieben, zu einer Mehrbeanspruchung der Auflagerlängssteife. Damit ergeben sich die geringeren Tragfähigkeitswerte bei Berücksichtigung horizontaler Schraubstöße.

9.2 Ausblick

Im Hinblick der unabdingbaren Überprüfung der gewählten Modellbildungsstrategie am Silo-Gesamtsystem ergeben sich unmittelbar aus den "Arbeitskapiteln" noch folgende offene Punkte..

Kap. 4 — Trichter

Im Umfeld des Auflagerkrafteinleitungsbereiches und des Trichter-Schaft-Anschlusses sind hinsichtlich der beteiligten Teiltragsysteme noch einige Fragenstellung offen.

Die isolierte Betrachtung des aus dem Gesamtragwerk herausgelöst gedachten Trichters geht von der Aufteilung der Lastabtragung in einen rotationssymmetrischen Grundanteil (konstant verteilte meridionale Randkräfte) und zusätzlichen lokalen Lagerungsbedingungen bzw. Vorgabe lokaler Auflagerkräfte aus. Weitere Untersuchungen sind daher hinsichtlich der am Gesamtsystem auftretenden Ungleichförmigkeiten, z.B. zufolge ungleichförmiger meridionaler Randkräfte der Trichterbeanspruchungen anzustellen. Dabei ist zu klären, ob diese ungleichförmig verteilten Meridianrandkräfte zu einem vorzeitigen Versagen des Trichters führen oder im elasto-plastischen Grenzzustand des Gesamtsystems der rotationssymmetrische Grenzzustand des Trichters, wie in der vorliegenden Studie dieser Arbeit angenommen, tatsächlich erreicht wird.

Zu bemerken ist, daß in dieser Studie unsymmetrische Belastungseffekte in keinsten Weise, wie in der vorliegenden Gesamtarbeit sonst auch, berücksichtigt wurden.

Kap. 5 — Trichter-Schaft-Übergang

Das Auftreten ungleichförmiger Beanspruchungen am Trichter-Schaft-Übergang sind ebenfalls noch zu untersuchen. Die ausgearbeiteten Bemessungsformeln gelten für den Fall der Axialsymmetrie. Es erhebt sich die Frage, wie und ob diese Resultate sinngemäß angewandt, auch im Fall nichtaxialsymmetrischer Verteilungen der Umfangsmembranspannungen und insbesondere der Meridianmembranspannungen Anwendung finden können.

Kap. 6 — Basisringträger

Die durchgeführten Berechnungen von Kap. 6 beziehen sich auf die "isolierte" Belastung des Basisringträgers durch Einzelradialkräfte und Einzeltorsionsmomente. Zur Komplettierung der durchgeführten Berechnungen ist für eine Interpretation zu Bemessungszwecken noch eine Festlegung jenes Lastanteiles der Gesamtbelastung, der durch die optionale lokale Trichterauflagerung über den Schottblechen abgetragen wird, ausstehend.

Kap. 7 — Auflagerkrafteinleitungsbereich

In Übereinstimmung mit den offenen Fragen zu Kap. 4 bis Kap. 6 müssen im Auflagerbereich auch die Basisringträgerbeanspruchungen mitberücksichtigt werden. Dies gilt auch für die axialsymmetrischen Beanspruchungen im Bereich des Trichter-Schaft-Überganges. Dort wurde die Interaktion mit globalen Schalenwandmembrangrundbeanspruchungen miteinbezogen (Kap. 5). Offen bleibt jedoch die Frage, wie das Zusammenwirken modifizierter Trichter-Schaft-Beanspruchungen mit den lokalen Beanspruchungen im Auflagerkrafteinleitungsbereich beschaffen ist. Es muß damit gerechnet werden, daß sich die genannten Tragmechanismen bei gewissen kritischen Lastkombinationen gegenseitig schwächen.

Kap. 8 — Schaft-Längssteifen-System

Die Ausarbeitungen von Kap. 8 sind vor allem hinsichtlich des Zusammenwirkens von Auflagerlängssteife und Schalenwand weitgehend gediehen. Fehlend sind aber die Beurteilung der Biegedrillknickgefährdung der Längssteife und vor allem Untersuchungen zur Beultragfähigkeit der Schalenwand wie Interaktionseffekte von Axial- und Schubbeulung in der Schale und die Bestimmung der maßgebenden Imperfektionsform der Schalenwand des Schaft-Längssteifen-Systems.

Weiters nicht untersucht wurden die Auswirkungen überlappter Schraubstöße und die dadurch bewirkte erhöhte Nachgiebigkeit der Schraubstöße, ferner materiell nichtlineares Verhalten der Schraubstöße. Der Einfluß des nichtlinearen Verhaltens und die Überlappung der Schraubstöße können vor allem hinsichtlich des Schalenbeulens von Bedeutung sein (DIN 18800 - Teil 4 (1990), Rotter (1989)).

Modellierung und Berechnung des Silogesamtsystems

Im Hinblick auf die Berechnung des Silogesamtsystems wird hier auf ein derzeit laufendes Forschungsprojekt, das am Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke der TU Graz unter der Leitung von Dr. Werner Guggenberger (Guggenberger (2000)) durchgeführt wird, hingewiesen.

Das Ziel ist die Entwicklung eines rein "konstruktionsorientierten" Programmes zur automatisierten Berechnung und Bemessung komplexer Silokonstruktionen aus Stahl. Baustatische Berechnungen und Bemessungsvorgänge werden dabei automatisch erledigt, der Benutzer ist nur mehr mit dem virtuellen Zusammenbau des Silos selbst beschäftigt und bekommt als Ergebnis die Beurteilung der Tragfähigkeit, also das Bemessungsergebnis, der vorgeschlagenen Silokonstruktion. Die Berechnung soll dabei primär am Silogesamtsystem erfolgen, alternativ kann aber aus einem Katalog von sinnvoll erscheinenden Modellbildungsvarianten, wie in der vorliegenden Dissertation präsentiert, gewählt werden.

Die normativen Grundlagen der Berechnung und Bemessung bilden dabei Eurocode 3 – Teil 1.6 (ENV 1993-1-6) bzw. Teil 4.1 (ENV 1993-4-1).

ANHANG A

THEORETISCHE BERECHNUNGSGRUNDLAGEN

Inhalt von Anhang A:

- A.0 3D-Verzerrungen in Zylinderkoordinaten**
- A.1 Grundgleichungen der Kreiszylinderschale**
 - A.1.1 3D-Verzerrungen in Zylinderkoordinaten**
 - A.1.2 Kinematik der Zylinderschale**
 - A.1.3 Verzerrungen der schubnachgiebigen Kreiszylinderschale**
 - A.1.4 Schalenschnittgrößen**
 - A.1.5 Gleichgewichtsgleichungen in Differentialform**
 - A.1.6 Gleichgewichtsgleichungen in Integralform — Prinzip der virtuellen Arbeiten**
 - A.1.7 Mathematische Äquivalenz der Differential- und Integralformulierungen des Gleichgewichtes**
 - A.1.8 Grundgleichungen der Deformationsmethode**
 - A.1.9 Semi-analytische Lösung der Schalengrundgleichungen (Deformationsmethode)**
 - A.1.10 Ingenieurmäßige Schalenformulierungen**
 - A.1.11 Klassisches Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 1)**
 - A.1.12 Um die Membranschubsteifigkeit erweitertes klassisches Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 2)**
 - A.1.13 Um die Drillsteifigkeit erweitertes Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 2')**
 - A.1.14 Vollständiges Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 3)**
 - A.1.15 Halb-Biegetheorie-Modell (Variante 4)**
 - A.1.16 Matrixorientierte Lösungsmethodik**
 - A.1.17 Vollständige Semimembrantheorie — Anwendung der matrixorientierten Lösungsmethodik**
 - A.1.18 Analytische Lösung baustatischer Differentialgleichungen**

A.2 Grundgleichungen des elastischen räumlich belasteten Kreisbogenträgers

A.2.1 Kinematische Annahmen

A.2.2 Schnittkräfte des Kreisbogenträgers

A.2.3 Grundgleichungen in Matrixform

A.0 3D-Verzerrungen in Zylinderkoordinaten

Die Basis für die Grundgleichungen der Kreiszyinderschale und des elastischen räumlich belasteten Kreisbogenträgers sind die Verzerrungen in Zylinderkoordinaten.

Die zugrundegelegten linearisierten Verzerrungen des 3D-Kontinuums sind von Parkus (1988) übernommen. Das Bezugssystem in Zylinderkoordinaten mit den Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 ist in Bild A-1 dargestellt. Ein beliebiger Punkt des 3D-Kontinuums ist mit den Koordinaten x , Θ und r definiert.

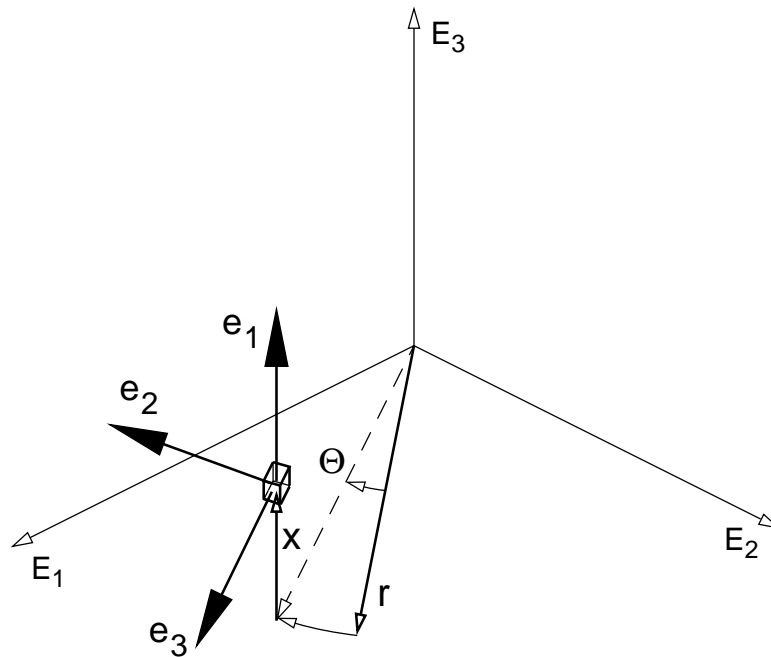


Bild A-1 Globales kartesisches und lokales krummliniges Bezugssystem in Zylinderkoordinaten

Die Verzerrungen für einen beliebigen Punkt bezüglich der Verschiebungen u , v und w in Axial-, Tangential- und Radialrichtung sind in Gl. (A-2) in Matrixform dargestellt. Sie ergeben sich nach Anwendung der Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B}_{3D} des 3D-Kontinuums auf den Verschiebungsvektor \mathbf{u}_{3D} .

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{array} \right] \\
 \mathbf{e}_{3D}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc}
 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \\
 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\
 \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\
 0 & -\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}
 \end{array} \right] \\
 \mathbf{B}_{3D}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right] \\
 \mathbf{u}_{3D}
 \end{array}
 \quad (A-1)$$

A.1 Grundgleichungen der Kreiszyinderschale

Die Darstellung aller Gleichungen erfolgt in matrixorientierter Form. Die Differentialoperatoren werden in Operatormatrizen zusammengefaßt.

Ausgangspunkt zur Bestimmung der Grundgleichungen der Kreiszyinderschale sind die linearen Verzerrungsgleichungen des 3D-Kontinuums in Zylinderkoordinaten.

Der Verschiebungsansatz beschreibt in einer erweiterten klassischen Form mit drei Verschiebungsparametern und zwei Drehparametern — bezogen auf die Schalenmittelfläche — die Veränderlichkeit der parallel und transversal zur Schalenmittelfläche liegenden Verschiebungskomponenten.

Durch die vorgegebene Kinematik werden die Verzerrungen in Dickenrichtung per se zu Null und somit für die weitere Behandlung eliminiert. Die sich ergebende 3D-Verzerrungsoperatormatrix wird in einen mittelflächenabhängigen Anteil, der die Membranverzerrungen und die über die Schalendicke veränderlichen Biege- und Drillkrümmungen, und den dickenabhängigen Anteil, der den Effekt unterschiedlicher Bezugsfaserlängen über die Schalendicke enthält, aufgeteilt. Die 3D-Verzerrungen setzen sich somit aus den Schalenverzerrungsparametern — Membranverzerrungen, Biege- und Drillkrümmungen und Transversalschubverzerrungen — zusammen.

Die integralen Spannungsgrößen (Schalenschnittkräfte) werden kennflächenorientiert aus dem Materialgesetz durch Integration über die Schalendicke berechnet. Für linear elastisch-orthotropes Materialverhalten wird, ausgehend vom entsprechenden Materialgesetz des 3D-Kontinuums, die Materialsteifigkeitsmatrix der Kreiszyinderschale berechnet. Die notwendige Dickenintegration wird exakt und approximativ mit quadratischer Näherung und bei gänzlicher Negierung der geometrischen Krümmung der Kreiszyinderschale durchgeführt. Dabei geht bei der Bildung der Materialsteifigkeitsmatrix der dickenabhängige Anteil der 3D-Verzerrungsoperatormatrix zweifach ein, einmal gibt er die unterschiedlichen Bezugslängen bei der Verzerrungsberechnung und einmal die geometrische Form des infinitesimalen Schalenelementes wieder. Die Beschreibung der Materialsteifigkeitsmatrix erfolgt abschließend mittels integraler Ingenieurkonstanten.

Die Gleichgewichtsgleichungen werden direkt durch Betrachtungen am infinitesimalen Schalenelement bestimmt. Alternativ dazu wird das Gleichgewicht in Integralform (Prinzip der virtuellen Arbeiten) formuliert. Durch partielle Integration der Integralgleichungen wird die mathematische Äquivalenz von Differential- und Integralformulierung bewiesen. Daraus ergibt sich ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Verzerrungsoperatormatrix und Gleichgewichtsoperatormatrix.

Durch die Verknüpfung von Verzerrungs-, Material- und Gleichgewichtsgleichungen erhält man die Grundgleichungen der Deformationsmethode. Ausgehend von den Grundgleichungen der stark gekrümmten schubnachgiebigen Kreiszyinderschale werden durch Einführung der Normalenhypothese, Vernachlässigung der Krümmungseffekte reduzierte Schalenformulierungen abgeleitet. Dabei erfolgt der Vergleich mit den bekannten Schalengleichungen nach Flügge für die stark gekrümmte querschubstarre Kreiszyinderschale bzw. mit jenen nach Donell für die schwach gekrümmte, flache und querschubstarre Kreiszyinderschale (kurz KZS).

Nach einem kurzen Überblick über mögliche Lösungsverfahren erfolgt die Entwicklung ingenieurmäßiger Schalenformulierungen. Durch entsprechende Steifigkeitsannahmen reduziert sich die Anzahl der Systemunbekannten. Durch die Implementierung eines Fourierreihenansatz in Umfangsrichtung wird das 2D-Problem (partielle Differentialgleichungssysteme) auf ein 1D-Problem mit gewöhnlichen Differentialgleichungen rückgeführt. Allgemein liegt eine Differentialgleichung 8. Ordnung vor, durch Steifigkeitsannahmen erhält man eine Differentialgleichung 4. Ordnung. Das somit vereinfacht behandelte Tragverhalten wird als Semi-Membran-Theorie der Kreiszyinderschale bezeichnet. Es werden alle möglichen Semi-Membran-Theorien der Kreiszyinderschale dargestellt. Dabei ergeben sich zwei grundsätzlich verschiedene Annahmen. Zum einen werden die axiale Biegesteifigkeit und Drillsteifigkeit zu Null gesetzt. Zum anderen werden die Umfangsdehnsteifigkeit und Schubsteifigkeit unendlich hoch angesetzt, dafür aber alle Biege- und Drillsteifigkeiten berücksichtigt. Neben den klassischen Varianten wird die vollständige Semi-Membran-Theorie bei kompletter Berücksichtigung der Membrantragwirkung behandelt.

A.1.1 3D-Verzerrungen in Zylinderkoordinaten

Die zugrundegelegten linearisierten Verzerrungen des 3D-Kontinuums sind von Parkus (1988) übernommen und bereits in Kap. A.0 dargestellt. Das Bezugssystem in Zylinderkoordinaten bilden die Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 in Meridian-, Umfangs- und Radialrichtung.

Für die weiteren Ableitungen der Kreiszyinderschale sind die 3D-Verzerrungen nochmals in Gl. (A-2) angegeben. Die Verzerrungen für einen beliebigen Punkt bezüglich der Verschiebungen u , v und w in Axial-, Tangential- und Radialrichtung sind in Matrixform dargestellt. Sie ergeben sich nach Anwendung der Verzerrungsdifferentialoperatormatrix \mathbf{B}_{3D} des 3D-Kontinuums auf den Verschiebungsvektor \mathbf{u}_{3D} .

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\Theta\Theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\Theta z} \end{array} \right] \\
 \mathbf{e}_{3D}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc}
 \frac{\partial}{\partial x} & & \\
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{1}{r} \\
 & & \frac{\partial}{\partial z} \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} & \frac{\partial}{\partial x} & \\
 \frac{\partial}{\partial z} & & \frac{\partial}{\partial x} \\
 & -\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta}
 \end{array} \right] \\
 \mathbf{B}_{3D}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right] \\
 \mathbf{u}_{3D}
 \end{array}
 \quad (A-2)$$

A.1.2 Kinematik der Zylinderschale

Die Beschreibung der Kinematik der Zylinderschale erfolgt vektororientiert mit 3 Verschiebungsparametern U , V und W der Schalenmittelfläche und 2 Rotationsparametern β_x und β_Θ . Sie bestimmen die Verschiebungen u , v und w für jeden beliebigen Punkt der Schale.

Der Radius r für einen beliebigen Schalenpunkt wird durch den Radius R der Schalenmittelfläche und der Querschnittsordinate z bestimmt.

$$r = R + z \tag{A-3}$$

Die Verschiebung in Radialrichtung ist konstant über die Schalendicke, die Axial- bzw. Umfangsverschiebung sind linear veränderlich über die Schalendicke. Dies wird durch die Rotationsparameter und den Abstand zur Schalenmittelfläche erfasst.

$$\begin{aligned} u &= U + \beta_\Theta \cdot z \\ v &= V - \beta_x \cdot z \\ w &= W \end{aligned} \tag{A-4}$$

In Bild A-2 sind die Verformungsparameter der Kreiszyklinderschale dargestellt.

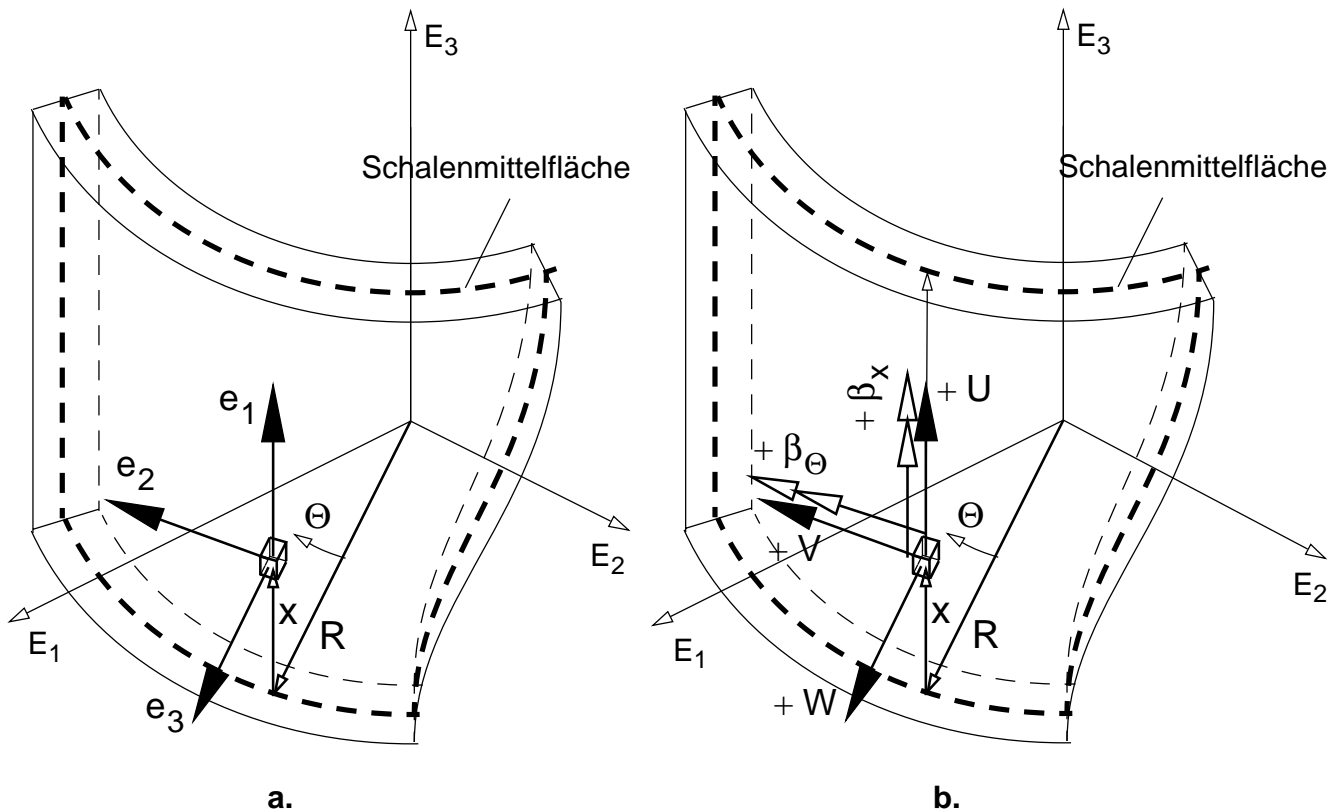


Bild A-2 Kinematik der Kreiszyklinderschale — **a.** globales kartesisches bzw. lokales krummliniges Bezugssystem und **b.** Verformungsgrößen der Kreiszyklinderschale

Bei der Darstellung der Kinematik in Matrixform werden die Verschiebungen eines beliebigen Punktes kompakt angegeben. Zur dimensionsreinen Darstellung aller Verformungsgrößen werden die Rotationen mit dem Radius R der Schalenmittelfläche multipliziert und für den Abstand zur Schalenmittelfläche die bezogene Dickenordinate $\zeta = z/R$ verwendet.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{3D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_0} + \zeta \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{I}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_x \cdot R \\ \beta_\theta \cdot R \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} \quad (\text{A-5})$$

Der Verformungsvektor \mathbf{u}_{3D} ist somit definiert aus dem Vektor \mathbf{u}_0 , der die Verschiebungen der Schalenmittelfläche enthält, und dem Vektor \mathbf{u}_1 , der die Drehparameter enthält. Die Matrix $\tilde{\mathbf{I}}$ beinhaltet den vorzeichenmäßigen Zusammenhang zwischen Verformungen des 3D-Kontinuums und den Drehparametern.

A.1.3 Verzerrungen der schubnachgiebigen Kreiszylinderschale

A.1.3.1 3D-Verzerrungen

Die Verzerrungsgrößen des 3D-Kontinuums \mathbf{e}_{3D} können nun für die getroffenen kinematischen Annahmen bestimmt werden. Die Verzerrungen unterteilen sich in folgende 3 Untergruppen:

- ε_{xx} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ und $\gamma_{x\theta}$ repräsentieren Flächenverzerrungen in zur Schalenmittelfläche parallelen Flächen
- ε_{zz} repräsentiert die Verzerrung in Dickenrichtung (Radialrichtung)
- γ_{xz} bzw. $\gamma_{\theta z}$ repräsentieren die transversalen Schubverzerrungen am Volumenelement

Die Verzerrungen stehen die Verzerrungsgrößen \mathbf{e} der Schale gegenüber. Zum einen Teil sind sie über die Schalendicke konstant— Membranverzerrungen \mathbf{e}_0 zufolge den Mittelflächenverschiebungen U , V und W . bzw. die transversalen Schubgleitungen \mathbf{e}_\perp zufolge den Mittelflächenverschiebungen V , W und den Drehparametern β_x und β_θ . Die Biege- und Drillkrümmungen \mathbf{e}_1 repräsentieren die über die Schalendicke linear veränderlichen Schalenverzerrungen, die zufolge den Drehparametern entstehen.

$$\mathbf{e}_{3D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{x\theta} & \gamma_{xz} & \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{e} = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_\theta & \gamma_{x\theta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_\theta & \kappa_{x\theta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{\theta z} & \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_\perp} \right]^T \quad (\text{A-6})$$

Die Verzerrungen des 3D-Kontinuums können unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Faserlängen in Dickenrichtung direkt aus den Schalenverzerrungen bestimmt werden. Der Zusammenhang ist über eine sogenannte Dickenmatrix gegeben. Der Verzerrungsoperator des 3D-Kontinuums zerfällt nun in diese Dickenmatrix **A** und die Verzerrungsoperatormatrix **B** der Schale, somit ist eine direkte Abbildung aus den Schalenverformungsparametern möglich.

A.1.3.2 Aufteilung der 3D-Verzerrungsoperatormatrix

Ausgangspunkt sind die Verzerrungsgleichungen des 3D-Kontinuums, dabei wird die Operatormatrix in zwei Matrizen aufgeteilt. Die erste enthält alle Ableitungsoperatoren nach den Flächenkoordinaten ξ ($\xi = x/R$) und Θ , die zweite jene nach der Dickenordinate ζ . Dabei sind $(\)'_{\xi} = \partial / \partial \xi$ und $(\)'_{\Theta} = \partial / \partial \Theta$ die Ableitungen nach den beiden Flächenkoordinaten und $(\)'_{\zeta} = \partial / \partial \zeta$ die Ableitung nach der Dickenordinate.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\Theta\Theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} (\)'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\)'_{\Theta}}{1+\zeta} & \frac{1}{1+\zeta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\)'_{\Theta}}{1+\zeta} & (\)'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & (\)'_{\xi} \\ 0 & -\frac{1}{1+\zeta} & \frac{(\)'_{\Theta}}{1+\zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, \xi\Theta}} + (\)'_{\zeta} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, \zeta}} \right) \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{A-7}$$

$$\mathbf{e}_{3D} = \mathbf{B}_{3D} \cdot \mathbf{u}_{3D} = (\mathbf{B}_{3D, \xi\Theta} + \mathbf{B}_{3D, \zeta}) \cdot \mathbf{u}_{3D}$$

Durch Verwendung der zwei Verschiebungsvektoren \mathbf{u}_0 und \mathbf{u}_1 und Differentiation nach der Dickenordinate ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für die 3D-Verzerrungen.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \underbrace{\begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & \frac{1}{1+\zeta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & ()'_{\xi} \\ 0 & \frac{-1}{1+\zeta} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, \xi\theta}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} + \quad (\text{A-8a})$$

$$+ \frac{1}{R} \zeta \left(\underbrace{\begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & \frac{1}{1+\zeta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & ()'_{\xi} \\ 0 & \frac{-1}{1+\zeta} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, \xi\theta}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{I}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, \zeta}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{I}}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \beta_x \cdot R \\ \beta_{\theta} \cdot R \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{3D} = (\mathbf{B}_{3D, \xi\theta} + \mathbf{B}_{3D, \zeta}) \cdot \mathbf{u}_{3D} = (\mathbf{B}_{3D, \xi\theta} \cdot \mathbf{u}_0 + \zeta \mathbf{B}_{3D, \xi\theta} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{u}_1) + \mathbf{B}_{3D, \zeta} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{u}_1 \quad (\text{A-8b})$$

A.1.3.3 Elimination der Verzerrungen in Dickenrichtung

Die Verzerrung ε_{zz} in Dickenrichtung wird aufgrund der Kinematik zu Null und im weiteren nicht mehr berücksichtigt. Aus den Verzerrungsoperatormatrizen wird somit die dritte Zeile eliminiert.

Die folgende Einarbeitung von $\tilde{\mathbf{I}}$ ergibt folgende Abhängigkeit der 3D-Verzerrungen von den Verschiebungs- bzw. Drehparametervektoren. Dabei werden von $\mathbf{B}_{3D, \xi\theta}$ bzw. $\mathbf{B}_{3D, \zeta}$ nur die ersten zwei Spalten verwendet und in der ersten Spalte entsprechend den Elementen von $\tilde{\mathbf{I}}$ eine Vorzeichenumkehr vorgenommen. Es resultieren daraus die Matrizen $\tilde{\mathbf{B}}_{3D, \xi\theta}$ bzw. $\tilde{\mathbf{B}}_{3D, \zeta}$.

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & \frac{1}{1+\zeta} \\ \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & ()'_{\xi} \\ 0 & \frac{-1}{1+\zeta} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{3D, \xi\theta}} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \zeta \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & ()'_{\xi} \\ \frac{-()'_{\theta}}{1+\zeta} & 0 \\ -()'_{\xi} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{1+\zeta} & 0 \end{bmatrix}}_{\zeta \tilde{\mathbf{B}}_{3D, \xi\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_{3D, \zeta}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \beta_x \cdot R \\ \beta_{\theta} \cdot R \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

$$\mathbf{e}_{3D} = \mathbf{B}_{3D, \xi\theta} \cdot \mathbf{u}_0 + \zeta \tilde{\mathbf{B}}_{3D, \xi\theta} \cdot \mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_{3D, \zeta} \cdot \mathbf{u}_1 \quad (\text{A-10})$$

Faßt man die beiden Vektoren \mathbf{u}_0 und \mathbf{u}_1 zum Verformungsvektor \mathbf{u} der Kreiszylinderschale zusammen, so erhält man eine modifizierte Darstellung der Verzerrungsgleichungen.

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1]^T \quad (\text{A-11a})$$

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & \frac{1}{1+\zeta} & | & 0 & 0 \\ \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & ()'_{\xi} & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & ()'_{\xi} & | & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1+\zeta} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & | & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\
 \left. + \zeta \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & ()'_{\xi} \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{-()'_{\theta}}{1+\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -()'_{\xi} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{1+\zeta} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_x \cdot R \\ \beta_{\theta} \cdot R \end{bmatrix} \quad (\text{A-11b})$$

In kompakter Form sind die 3D-Verzerrungen in Abhängigkeit des Verformungsvektors \mathbf{u} der Schale in Gl. (A-12) angegeben.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} &= \frac{1}{R} \underbrace{\begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 & 0 & \zeta()'_{\xi} \\ 0 & \left(\frac{()'_{\theta}}{1+\zeta}\right) & \frac{1}{1+\zeta} & \frac{-\zeta()'_{\theta}}{1+\zeta} & 0 \\ \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & ()'_{\xi} & 0 & -\zeta()'_{\xi} & \frac{\zeta()'_{\theta}}{1+\zeta} \\ 0 & 0 & ()'_{\xi} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{1+\zeta} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & \frac{-1}{1+\zeta} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^*(\zeta)} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_x \cdot R \\ \beta_{\theta} \cdot R \end{bmatrix} \\
 \mathbf{e}_{3D} &= \mathbf{B}^*(\zeta) \cdot \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{A-12}$$

Aufspaltung der zur Schalenmittelfläche parallelen Schubverzerrungskomponente $\gamma_{x\theta}$

Bei der späteren Berechnung der integralen Spannungsgrößen bewirken die dualen Schubspannungen $\tau_{x\theta}$ und $\tau_{\theta x}$ unterschiedliche Schubkräfte und Drillmomente. Dies ist bedingt durch die unterschiedliche Form der Seitenflächen des infinitesimalen Schalenelement, die zum axialen Richtungsvektor senkrecht stehenden Flächen sind trapezförmig, die zum Richtungsvektor in Umfangsrichtung senkrecht stehenden Flächen sind rechteckig. Eine Aufteilung der Schubspannungen bzw. Schubverzerrungen ist deswegen vorzunehmen. Die Schubverzerrung $\gamma_{x\theta}$ ergibt sich zufolge Tangentialverschiebungen und $\gamma_{\theta x}$ zufolge der Axialverschiebungen. Dies liefert folgenden, modifizierten Zusammenhang zwischen 3D-Verzerrungen und Schalenverschiebungsparametern.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 & 0 & \zeta()'_{\xi} \\ 0 & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & \frac{1}{1+\zeta} & \frac{-\zeta()'_{\theta}}{1+\zeta} & 0 \\ \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta()'_{\theta}}{1+\zeta} \\ 0 & ()'_{\xi} & 0 & -\zeta()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & ()'_{\xi} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{1+\zeta} & \frac{()'_{\theta}}{1+\zeta} & \frac{-1}{1+\zeta} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_x \cdot R \\ \beta_{\theta} \cdot R \end{bmatrix} \\
 & \tag{A-13}
 \end{aligned}$$

Die Operatormatrix wird in 4 Untermatrizen unterteilt. Die Selektion erfolgt nach der Zugehörigkeit zu den Membranverzerrungen, Biegekrümmungen und den transversalen Schubverzerrungen.

$$\mathbf{e}_{3D}^* = \mathbf{B}^*(\zeta) \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^* & \zeta \mathbf{B}_2^* \\ \mathbf{B}_{31}^* & \mathbf{B}_{32}^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A-14})$$

Dabei ist \mathbf{B}_1^* zu den Membranverzerrungen und Mittelflächenverschiebungen, \mathbf{B}_2^* zu den Biegekrümmungen und Drehparametern zugehörig. Die Transversalschubverzerrungen hängen von den Verschiebungen und den Drehparametern ab, der Zusammenhang ist über \mathbf{B}_{31}^* bzw. \mathbf{B}_{32}^* gegeben.

In den bisherigen Darstellungen sind die Verzerrungsoperatormatrizen von der Dickenrichtung abhängig. Die Verzerrungsoperatormatrix $\mathbf{B}^*(\zeta)$ kann aus einem Matrizenprodukt ermittelt werden. Die Differentialoperatormatrix wird mit einer von den unterschiedlichen Faserlängen in Dickenrichtung abhängige Dickenmatrix \mathbf{A} und der Operatormatrix \mathbf{B} , welche nur die Differentialoperatoren enthält, bestimmt.

$$\mathbf{e}_{3D} = \mathbf{B}^*(\zeta) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A-15})$$

Diese beiden Matrizen werden jeweils in Submatrizen aufgeteilt. Die Aufteilung von \mathbf{B} erfolgt analog Gl. (A-13) bzw. Gl. (A-14). Die Dickenmatrix \mathbf{A} kann alternativ in das Produkt des Nennerterms und der Dickenmatrix \mathbf{A}_0 aufgeteilt werden.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(1 + \zeta)} \mathbf{A}_0 \quad (\text{A-16a})$$

$$\mathbf{e}_{3D} = \frac{1}{(1 + \zeta)} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{(1 + \zeta)} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \zeta \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A-16b})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \left[\begin{array}{ccc|cc} (\cdot)'_{\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cdot)'_{\Theta} & 1 & 0 & 0 \\ (\cdot)'_{\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\cdot)'_{\xi} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)'_{\xi} \\ 0 & 0 & 0 & -(\cdot)'_{\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)'_{\Theta} \\ 0 & 0 & 0 & -(\cdot)'_{\xi} & 0 \\ \hline 0 & 0 & (\cdot)'_{\xi} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & (\cdot)'_{\Theta} & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{A-16c})$$

Die Dickenmatrix \mathbf{A}_0 enthält folgende Einträge:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \zeta \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\zeta & 0 & 0 & 0 & \zeta(1+\zeta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\zeta & 0 & 0 & 0 & \zeta(1+\zeta) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-17})$$

Die Submatrizen der Differentialoperatormatrix \mathbf{B} sind bereits den Membranverzerrungen, den Biege und Drillkrümmungen und den transversalen Schubverzerrungen zugeordnet. Durch Anwendung von \mathbf{B} auf den Verschiebungsvektor \mathbf{u} sind unmittelbar die Schalenverzerrungen \mathbf{e} bestimmt.

$$\mathbf{e} = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_\Theta \quad \overline{\gamma_{x\Theta}} \quad \overline{\gamma_{\Theta x}} \quad \kappa_x R \quad \kappa_\Theta R \quad \kappa_{x\Theta} R \quad \kappa_{\Theta x} R \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{\Theta z} \right]^T \quad (\text{A-18a})$$

$$\mathbf{e}_{3D} = \mathbf{B}^*(\xi, \Theta; \zeta) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A}(\zeta) \cdot \mathbf{e}(\xi, \Theta) \quad (\text{A-18b})$$

$$\text{mit } \quad = \mathbf{B}(\xi, \Theta) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A-18c})$$

A.1.4 Schalenschnittgrößen

A.1.4.1 Kennflächenorientierte Schalenschnittgrößen

Die Definition der integralen Spannungsgrößen — Schalenschnittgrößen — erfolgt kennflächenorientiert. Die Kennfläche ist die Außenfläche der Schale. Die in positive Koordinatenrichtungen wirkenden Spannungsgrößen — Meridian-, Umfangs- und Schubspannungen bzw. Transversalschubspannungen — definieren die positiven Schalenschnittgrößen in Bild A-4.

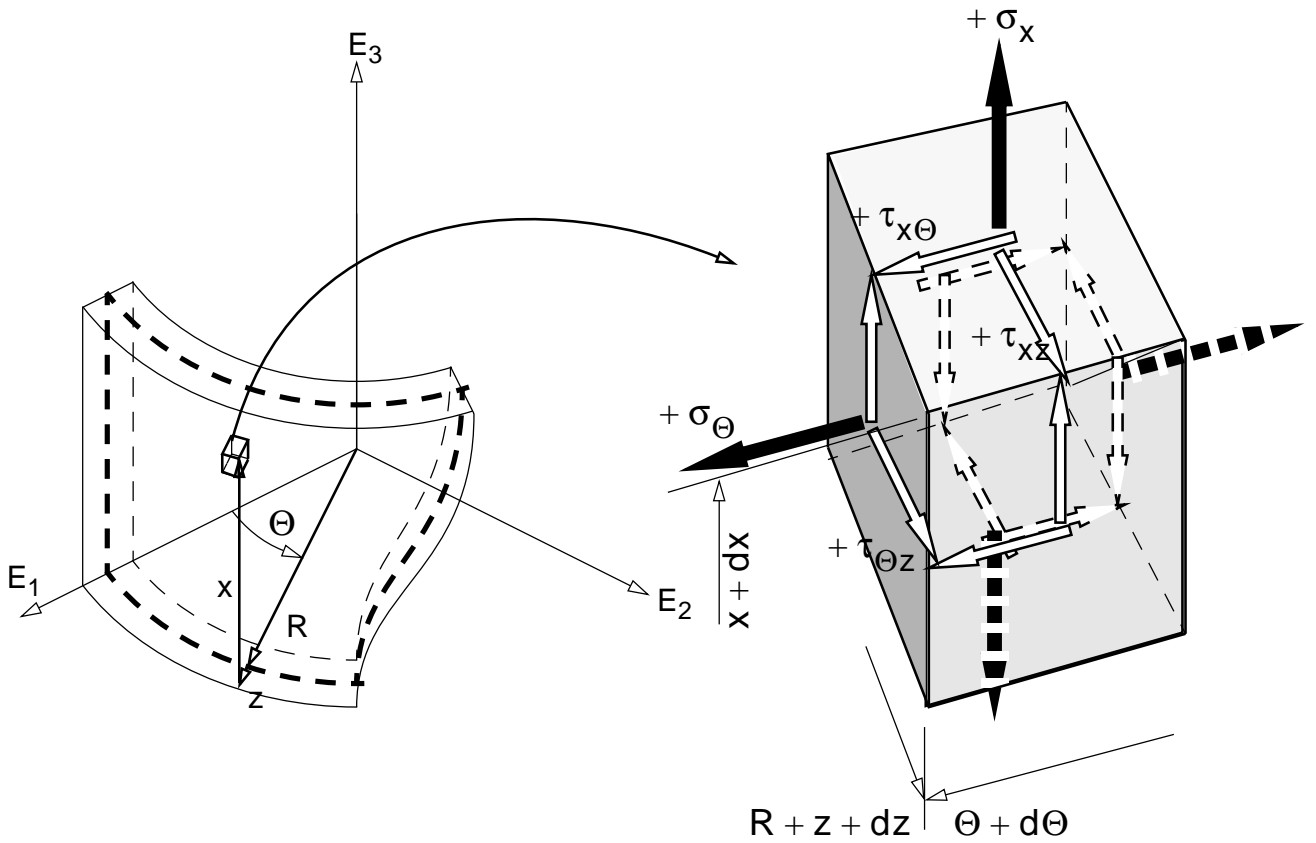


Bild A-3 Spannungen am infinitesimalen 3D-Kontinuumselement

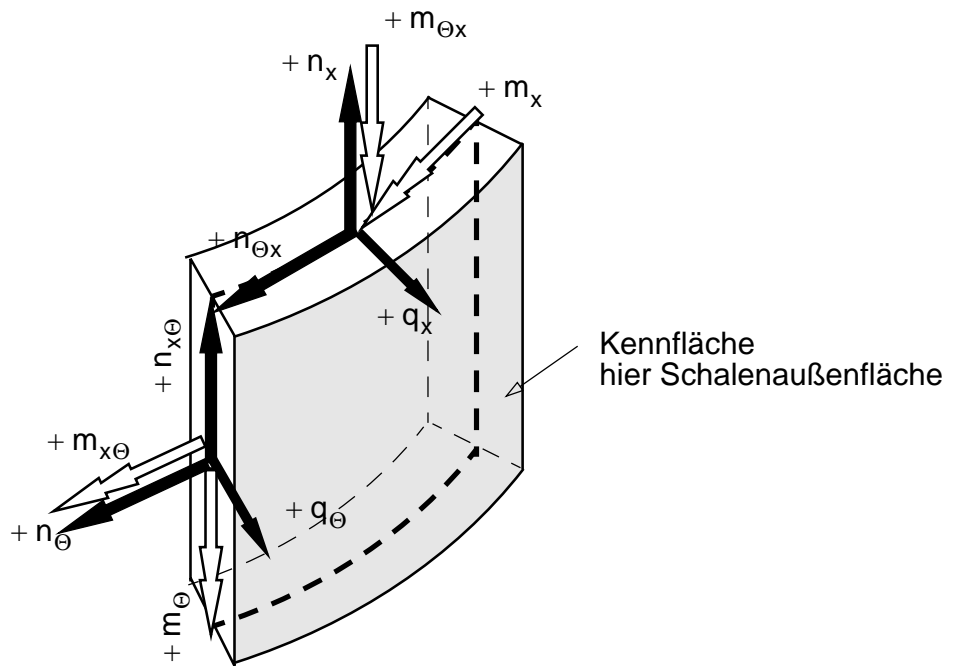


Bild A-4 Kennflächenorientierte Schnittgrößen der Kreiszylinderschale an den positiven Schnittufern.

A.1.4.2 Schalenschnittgrößen als Spannungsdickenintegrale

Die Schalenschnittgrößen ergeben sich durch Integration der Spannungen über die Schalendicke. Dabei erfolgt die Integration der Spannungen σ_{xx} , $\tau_{\theta x}$ und τ_{xz} über das trapezförmige Flächenelement und die Integration von $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{x\theta}$ und $\tau_{\theta z}$ über das rechteckige Flächenelement. Die zugeordneten Schalenschnittgrößen enthalten somit den Krümmungseffekt der Schale. Trotz der Dualität der Schubspannungen am Volumenelement erhält man aufgrund der unterschiedlichen Integrationsflächen zwei unterschiedliche Membranschubkräfte $n_{\theta x}$ bzw. $n_{x\theta}$ und Drillmomente $m_{\theta x}$ bzw. $m_{x\theta}$.

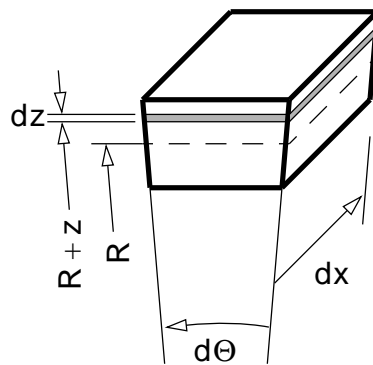


Bild A-5 Schalenelement

Die Indizierung der Schnittgrößen ist analog der Indizierung der Spannungen — Richtung und Ort. Doppelindizes werden bei den Schnittgrößen der Einfachheit halber nicht verwendet.

$$\begin{array}{ll}
 n_x & = \int \sigma_{xx} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot dz \\
 n_{\theta x} & = \int \tau_{\theta x} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot dz \\
 m_x & = \int \sigma_{xx} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot z \cdot dz \\
 m_{\theta x} & = \int \tau_{\theta x} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot z \cdot dz \\
 q_x & = \int \tau_{xz} \cdot \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot dz \\
 n_{\theta} & = \int \sigma_{\theta\theta} \cdot dz \\
 n_{x\theta} & = \int \tau_{x\theta} \cdot dz \\
 m_{\theta} & = \int \sigma_{\theta\theta} \cdot z \cdot dz \\
 m_{x\theta} & = \int \tau_{x\theta} \cdot z \cdot dz \\
 q_{\theta} & = \int \tau_{\theta z} \cdot dz
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} n_x \\ n_{\theta x} \\ m_x \\ m_{\theta x} \\ q_x \\ n_{\theta} \\ n_{x\theta} \\ m_{\theta} \\ m_{x\theta} \\ q_{\theta} \end{array}} \right\} \quad (\text{A-19})$$

In Matrixform ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für den Schnittkraftvektor \mathbf{n} in Gl. (A-20).

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_\theta \\ n_{x\theta} \\ \frac{n_{\theta x}}{m_x/R} \\ m_\theta/R \\ m_{x\theta}/R \\ m_{\theta x}/R \\ \frac{q_x}{q_\theta} \\ q_\theta \end{bmatrix} = \int_z \begin{bmatrix} 1+\zeta & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\zeta & \vdots & 0 & 0 \\ \zeta(1+\zeta) & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta(1+\zeta) & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1+\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} dz \tag{A-20}$$

Der Schnittkraftvektor \mathbf{n} ist somit in Form eines Produktes der Dickenmatrix \mathbf{A}_0 mit dem Spannungsvektor \mathbf{s} gegeben. Die Dickenmatrix \mathbf{A}_0 wurde bereits bei der Bestimmung der Verzerrungen verwendet und beschreibt die Abhängigkeit von der Querschnittsform des Schalelementes.

$$\mathbf{n} = \int_z \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s} \cdot dz \tag{A-21}$$

Eine Aufspaltung erlaubt die Unterteilung der Schalenschnittgrößen \mathbf{n} in Untergruppen. Dabei entflechten sich die Bestimmungsgleichungen für die Membranschnittkräfte \mathbf{n}_0 , die Schalenbiegemomente \mathbf{m} und die Schalenquerschubkräfte \mathbf{q} . Aufgrund dieser Unterteilung ergibt sich eine entsprechende Unterteilung von \mathbf{A}_0 in Submatrizen wie folgt:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \int_z \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \vdots & \mathbf{0}^T \\ \zeta \cdot \mathbf{A}_1^T & \vdots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} dz \tag{A-22}$$

Im folgenden sind die Bestimmungsgleichungen für die Membrankräfte, Momente und Querkräfte getrennt dargestellt.

$$\mathbf{n}_0 = \begin{bmatrix} n_x \\ n_\theta \\ n_{x\theta} \\ n_{\theta x} \end{bmatrix} = \int_z \mathbf{A}_1^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta x} \end{bmatrix} dz \tag{A-23a}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x/R \\ m_\Theta/R \\ m_{x\Theta}/R \\ m_{\Theta x}/R \end{bmatrix} = \int_z \zeta \mathbf{A}_1^T \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\Theta \\ \tau_{x\Theta} \\ \tau_{\Theta x} \end{bmatrix} dz \quad (\text{A-23b})$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_\Theta \end{bmatrix} = \int_z \mathbf{A}_2^T \cdot \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{\Theta z} \end{bmatrix} dz \quad (\text{A-23c})$$

A.1.4.3 Exakte Bestimmung der Schnittgrößen für linear-elastisch orthotropes Materialverhalten

Aufbauend auf der Definition der integralen Schalenchnittgrößen und den Materialgleichungen (Konstitutives Gesetz) des linear-elastischen 3D-Kontinuums und dem Zusammenhang von 3D-Verzerrungen und Schalenverzerrungen wird die Materialsteifigkeitsmatrix der Kreiszyinderschale bestimmt. Sie stellt das konstitutive Gesetz der Schale und somit den Zusammenhang von Schalenchnittgrößen und Schalenverzerrungen dar.

Elastisch orthotropes Materialverhalten

Die Materialbeziehungen für das 3D-Kontinuum sind für orthotropes Materialverhalten in Gl. (A-24a) dargestellt, wobei die zur Verzerrungsgröße ε_z zugehörigen Materialparameter bereits eliminiert wurden. Im allgemeinsten Fall des 3D-Kontinuums erfolgt die Beschreibung des Materialverhaltens mit 21 unabhängigen Parametern. Für das im weiteren verwendete orthotrope Materialgesetz der Kreiszyinderschale ergibt sich nach Einführen einer Symmetrieebene (hier im speziellen der x - Θ -Ebene) bezüglich des Materialgesetzes die Reduktion auf 13 unabhängige Parameter für das 3D-Kontinuum.

Bei der vorliegenden Kinematik wird die Verzerrungsgröße ε_z in Dickenrichtung der Schale zu Null. Die zugehörige Spannungskomponente σ_z wird ebenfalls zu Null, es liegt somit ein ebener Spannungszustand vor. Die Materialgleichungen liegen somit in Gl. (A-24a) in reduzierter Form vor. Zur Beschreibung des ebenen orthotropen Spannungszustand sind nunmehr 9 Materialparameter notwendig bzw. bei Materialhauptachsenbezug 6 unabhängige Materialparameter.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\Theta \\ \tau_{x\Theta} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\Theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & & & \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & & & \\ & & & D_{44} & D_{45} & \\ & & & D_{45} & D_{55} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A-24a})$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} \quad (\text{A-24b})$$

Koinzidenz von Materialhauptrichtungen und lokalen Schalenkoordinaten

Die Materialhauptrichtungen des orthotropen Schalenwerkstoffes stimmen mit den lokalen Schalenmittelflächenkoordinatenrichtungen überein. Daraus folgt, daß es keine Wechselwirkung zwischen Schubverzerrungen und Dehnungen bzw. den Transversalschubverzerrungen untereinander gibt. Nach Aufteilung der Schubspannung $\tau_{x\Theta}$ bzw. der Schubverzerrung $\gamma_{x\Theta}$ in der Ebene ergibt sich die modifizierte Materialgleichung für das 3D-Kontinuum. Diese Materialmatrix besteht nach Entkoppelung des Transversalschubverzerrungszustandes vom ebenen “parallel-zur-Mittelfläche” Verzerrungszustand aus den Anteilen \mathbf{D}_{\parallel} und \mathbf{D}_{\perp} .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{\Theta} \\ \tau_{x\Theta} \\ \tau_{\Theta x} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\Theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & | & \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & | & \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{33} & | & \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{33} & | & \\ \hline & & & & D_{44} & 0 \\ & & & & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{\Theta} \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{\Theta x} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & \\ \mathbf{D}_{\parallel} & & \mathbf{0} \\ | & & \\ \hline & & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{D}_{\perp} \\ | & & \end{bmatrix}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} \tag{A-25}$$

Mithilfe von sogenannten “Ingenieurkonstanten” (E-Modul, Querdehnungsziffer ν und Schubmodul G) kann diese linear-elastische orthotrope Materialbeziehung folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{\Theta} \\ \tau_{x\Theta} \\ \tau_{\Theta x} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\Theta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x & \nu_x E_x & 0 & 0 & | & \\ \frac{1 - \nu_x \nu_{\Theta}}{1 - \nu_x \nu_{\Theta}} & \frac{\nu_x E_x}{1 - \nu_x \nu_{\Theta}} & 0 & 0 & | & \\ \nu_{\Theta} E_{\Theta} & E_{\Theta} & 0 & 0 & | & \\ \frac{1 - \nu_x \nu_{\Theta}}{1 - \nu_x \nu_{\Theta}} & \frac{E_{\Theta}}{1 - \nu_x \nu_{\Theta}} & 0 & 0 & | & \\ 0 & 0 & G_{x\Theta} & G_{x\Theta} & | & \\ 0 & 0 & G_{x\Theta} & G_{x\Theta} & | & \\ \hline & & & & G_{xz} & 0 \\ & & & & 0 & G_{\Theta z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{\Theta} \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{\Theta x} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} \tag{A-26}$$

Die Materialgleichungen können in etwas modifizierter Form dargestellt werden. Dabei wird das Produkt der Querkontraktionsziffern im Nenner durch $\nu^2 = \nu_x \nu_{\Theta}$ ersetzt und die Querdehnsteifigkeiten auf die axiale Dehnsteifigkeit E_x bezogen. Die Querkontraktionsziffer ν_x wird durch $\nu^* = \nu_x$ ersetzt.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\Theta \\ \tau_{x\Theta} \\ \tau_{\Theta x} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{\Theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu^2} & \frac{\nu^* E_x}{1-\nu^2} & 0 & 0 & \vdots \\ \frac{\nu^* E_x}{1-\nu^2} & \frac{E_\Theta}{1-\nu^2} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & G_{x\Theta} & G_{x\Theta} & \vdots \\ 0 & 0 & G_{x\Theta} & G_{x\Theta} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & G_{xz} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & G_{\Theta z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{\Theta x} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A-27})$$

A.1.4.4 Konstitutive Gleichungen der Kreiszylinderschale

In der allgemeinen Bestimmungsgleichung der Schalenschnittgrößen werden die Spannungen durch die Materialbeziehung des 3D-Kontinuums ersetzt. Die Dehnungen selbst ergeben sich aus der Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B} und der Dickenmatrix \mathbf{A} .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} &= \int_z \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s} \cdot dz \\
 \mathbf{s} &= \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} \\
 \mathbf{e}_{3D} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{(1+\zeta)} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{e} \\
 \mathbf{n} &= \int_z \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D} \cdot dz \\
 &= \int_z \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \frac{1}{(1+\zeta)} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dz \cdot \mathbf{e} \\
 \mathbf{n} &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}
 \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{D} der Schale ergibt sich demnach durch die Integration des folgenden Matrixproduktes von Dickenmatrix \mathbf{A}_0 (zweifach) und 3D-Materialmatrix \mathbf{D}_{3D} über die Schalendicke.

$$\mathbf{D} = \int_z \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \frac{1}{(1+\zeta)} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dz \quad (\text{A-29})$$

Aufbau und Berechnung der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{D}

Die Bildung der Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{D} ist in Gl. (A-30) in übersichtlicher Form dargestellt. Die 3D-Materialmatrix \mathbf{D}_{3D} ist dabei in zwei Teile $\mathbf{D}_{||}$ und \mathbf{D}_\perp aufgeteilt.

\mathbf{D} besteht aus 4 Untermatrizen. \mathbf{D}_m ist der zu den Membrankräften \mathbf{n}_0 , \mathbf{D}_q der zu den Querkräften \mathbf{q} und \mathbf{D}_m der zu den Biege- und Drillmomenten \mathbf{m} zugehörige Teil. Die Matrix \mathbf{D}_{nm} stellt die Koppelung zwischen den Membrankräften \mathbf{n}_0 und den Biege- und Drillmomenten \mathbf{m} dar, die durch den Krümmungseffekt der Schale entsteht.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc|cc}
 & & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} \\
 & & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\perp} \\
 \hline
 & & \mathbf{A}_1 & \zeta \cdot \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\
 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \\
 \hline
 \mathbf{A}_1^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} \\
 \zeta \mathbf{A}_1^T & \mathbf{0}^T & \zeta \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0}^T & \mathbf{A}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{D}_{\perp}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{cc|cc}
 & & \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \zeta \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\
 & & \zeta \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \zeta^2 \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\
 \hline
 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{D}_{\perp} \mathbf{A}_2
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (A-30)$$

\mathbf{D}_{3D} (top left), \mathbf{A}_0^T (top left), \mathbf{A}_0 (top right), $\mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D}$ (bottom left), $\mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{A}_0$ (bottom right)

$$\mathbf{D} = \begin{array}{cc|c}
 \mathbf{D}_n & \mathbf{D}_{nm} & \\
 \mathbf{D}_{nm} & \mathbf{D}_m & \\
 \hline
 & & \mathbf{D}_q
 \end{array} = \int \begin{array}{cc|c}
 \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \zeta \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\
 \zeta \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \zeta^2 \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\
 \hline
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{D}_{\perp} \mathbf{A}_2
 \end{array} \cdot \frac{1}{1+\zeta} \cdot dz \quad (A-31)$$

Die Materialbeschreibung erfolgt mit den allgemeinen Materialparametern D_{11} bis D_{55} , die Parameter D_{13} und D_{23} bzw. D_{45} sind aufgrund der angenommenen Koinzidenz von Materialhauptachsen und lokalen Schalenkoordinaten zu Null gesetzt. Durch die zweifache Anwendung der Dickenmatrix \mathbf{A}_0 sind zur Bestimmung von \mathbf{D} 9 Integrale auszuwerten (siehe Gl. (A-32a) bis Gl. (A-32d) bzw. Gl. (A-33)). Die Grundlage dafür sind die Matrixprodukte der Submatrizen \mathbf{A}_1 bzw. \mathbf{A}_2 mit den Materialmatrizen \mathbf{D}_{11}

bzw. \mathbf{D}_\perp .

$$\mathbf{D}_n = \int_z \frac{1}{1+\zeta} \mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{D}_{\parallel} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot dz = \int_z \begin{bmatrix} D_{11}(1+\zeta) & D_{12} & 0 & 0 \\ D_{12} & \frac{D_{22}}{(1+\zeta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_{33}}{(1+\zeta)} & D_{33} \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{33}(1+\zeta) \end{bmatrix} dz \quad (\text{A-32a})$$

$$\mathbf{D}_{nm} = \int_z \frac{\zeta}{1+\zeta} \mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{D}_{\parallel} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot dz = \int_z \begin{bmatrix} D_{11}\zeta(1+\zeta) & D_{12} & 0 & 0 \\ D_{12} & \frac{D_{22} \cdot \zeta}{(1+\zeta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_{33} \cdot \zeta}{(1+\zeta)} & D_{33} \cdot \zeta \\ 0 & 0 & D_{33} \cdot \zeta & D_{33}\zeta(1+\zeta) \end{bmatrix} dz \quad (\text{A-32b})$$

$$\mathbf{D}_m = \int_z \frac{\zeta^2}{1+\zeta} \mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{D}_{\parallel} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot dz = \int_z \begin{bmatrix} D_{11}\zeta^2(1+\zeta) & D_{12} & 0 & 0 \\ D_{12} & \frac{D_{22} \cdot \zeta^2}{(1+\zeta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_{33} \cdot \zeta^2}{(1+\zeta)} & D_{33} \cdot \zeta^2 \\ 0 & 0 & D_{33} \cdot \zeta^2 & D_{33}\zeta^2(1+\zeta) \end{bmatrix} dz \quad (\text{A-32c})$$

$$\mathbf{D}_q = \int_z \frac{1}{1+\zeta} \mathbf{A}_2^T \cdot \mathbf{D}_\perp \cdot \mathbf{A}_2 \cdot dz = \int_z \begin{bmatrix} D_{44}(1+\zeta) & 0 \\ 0 & \frac{D_{55}}{1+\zeta} \end{bmatrix} dz \quad (\text{A-32d})$$

Die resultierende Materialsteifigkeitsmatrix hat die folgende Zusammensetzung:

$$\mathbf{D} = t \cdot \begin{bmatrix}
 J_2 D_{11} & J_1 D_{12} & 0 & 0 & | & J_5 D_{11} & J_4 D_{12} & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\
 J_1 D_{12} & J_3 D_{22} & 0 & 0 & | & J_4 D_{12} & J_6 D_{22} & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & J_3 D_{33} & J_1 D_{33} & | & 0 & 0 & J_6 D_{33} & J_4 D_{33} & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & J_1 D_{33} & J_2 D_{33} & | & 0 & 0 & J_4 D_{33} & J_5 D_{33} & | & 0 & 0 \\
 \hline
 J_5 D_{11} & J_4 D_{12} & 0 & 0 & | & J_8 D_{11} & J_7 D_{12} & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\
 J_4 D_{12} & J_6 D_{22} & 0 & 0 & | & J_7 D_{12} & J_9 D_{11} & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & J_6 D_{33} & J_4 D_{33} & | & 0 & 0 & J_9 D_{33} & J_7 D_{33} & | & 0 & 0 \\
 0 & 0 & J_4 D_{33} & J_5 D_{33} & | & 0 & 0 & J_7 D_{33} & J_8 D_{33} & | & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & J_2 D_{44} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & J_3 D_{55}
 \end{bmatrix} \quad (\text{A-33})$$

Die Dickenintegrale J_1 bis J_9 sind folglich in übersichtlicher Form in Gl. (A-34) zusammengefaßt. Die Integrale J_1 bis J_3 sind zugehörig zur Membransteifigkeitsmatrix \mathbf{D}_n , die Integrale J_4 bis J_6 zur Koppelsteifigkeitsmatrix \mathbf{D}_{nm} und die Integrale J_7 bis J_9 zur Biegesteifigkeitsmatrix \mathbf{D}_m . Die Querschubsteifigkeitsmatrix enthält die Integrale J_2 und J_3 .

A.1.4.5 Berechnung der Dickenintegrale J_i

Exakte Integration in Dickenrichtung

Bei der exakten Integration über die Schalendicke kommen folgende Integrale J_1 bis J_9 mehrmals vor. Dabei resultieren aus den Integralen J_3 , J_6 und J_9 , die den Krümmungseffekt der Schale aufweisen — Faktor $(1/(1+\zeta))$ — logarithmische Terme. Diese werden folglich mittels Taylorreihenentwicklung approximiert, dabei werden die ersten 3 Reihenglieder berücksichtigt. Der dimensionslose Beiwert k repräsentiert den Krümmungseffekt und die davon abhängigen Biegesteifigkeiten der Schale.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int d(z/t) &= 1 &= 1 \\
 J_2 &= \int (1+\zeta)d(z/t) &= 1 &= 1 \\
 J_3 &= \int \frac{1}{1+\zeta}d(z/t) &= \frac{R}{t} \cdot \ln \frac{1+t/2R}{1-t/2R} &\approx 1 + \frac{t^2}{12R^2} &= (1+k) \\
 J_4 &= \int \zeta dz &= 0 &= 0 \\
 J_5 &= \int \zeta(1+\zeta)d(z/t) &= t^2/12R^2 &= k \\
 J_6 &= \int \frac{\zeta}{1+\zeta}d(z/t) &= 1 - \frac{R}{t} \cdot \ln \frac{1+t/2R}{1-t/2R} &\approx -\frac{t^2}{12R^2} &= -k \\
 J_7 &= \int \zeta^2 dz &= t^2/12R^2 &= k \\
 J_8 &= \int \zeta^2(1+\zeta)d(z/t) &= t^2/12R^2 &= k \\
 J_9 &= \int \frac{\zeta^2}{1+\zeta}d(z/t) &= -1 + \frac{R}{t} \cdot \ln \frac{1+t/2R}{1-t/2R} &\approx \frac{t^2}{12R^2} &= k
 \end{aligned} \tag{A-34}$$

$$k = \frac{t^2}{12R^2} = \left(\frac{i}{R}\right)^2 \tag{A-35}$$

A.1.4.6 Approximative Integration in Dickenrichtung

Für den im Nenner stehenden Effekt der unterschiedliche Bezugslängeren für die Bestimmung der Verzerrungen wird vor Durchführung der Integration eine Approximation mittels Taylorreihenentwicklung vorgenommen.

$$\frac{1}{1+\zeta} \approx 1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 - \zeta^5 \dots \tag{A-36}$$

Quadratische Approximation

$$\frac{1}{1+\zeta} \approx 1 - \zeta + \zeta^2 \tag{A-37}$$

Die Integrale J_3 , J_6 und J_9 werden optional mit der Approximation in Gl. (A-37) bestimmt, die Taylorreihenentwicklung wird nach dem quadratischen Glied abgebrochen. Letztendlich resultierten daraus mit der Taylorreihenentwicklung der logarithmischen Terme der exakten Dickenintegration idente Dickenintegrale in Gl. (A-38).

$$\left. \begin{aligned} J_3 &= \int \frac{1}{1+\zeta} d(z/t) \approx \int (1 - \zeta + \zeta^2) d(z/t) = 1 + t^2/12R^2 &= (1+k) \\ J_6 &= \int \frac{\zeta}{1+\zeta} d(z/t) \approx \int \zeta(1 - \zeta + \zeta^2) d(z/t) = -t^2/12R^2 &= -k \\ J_9 &= \int \frac{\zeta^2}{1+\zeta} d(z/t) \approx \int \zeta^2(1 - \zeta + \zeta^2) d(z/t) = \frac{t^2}{12R^2} + \frac{t^4}{80R^4} \approx \frac{t^2}{12R^2} &= k \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-38})$$

Vernachlässigung der Krümmungseffekte

Der Unterschied der Faserlängen in Dickenrichtung wird bei der Ermittlung der 3D-Verzerrungen vernachlässigt und ebenso die trapezförmige Gestalt des Flächenelementes bei der Bestimmung der integralen Spannungsgrößen.

$$\begin{aligned} 1 + \zeta &\approx 1 \\ \frac{1}{1 + \zeta} &\approx 1 \end{aligned} \quad (\text{A-39})$$

Somit ergeben sich die Integrale J_1 bis J_9 in modifizierter Form. Signifikant ist, daß nun alle Integrale in den jeweiligen Untermatrizen von \mathbf{D} ident sind. Weiters wird die Koppelmatrix \mathbf{D}_{nm} eine $\mathbf{0}$ -Matrix.

$$\begin{aligned} J_1 = J_2 = J_3 &\approx \int d(z/t) &= 1 \\ J_4 = J_5 = J_6 &\approx \int \zeta d(z/t) &= 0 \\ J_7 = J_8 = J_9 &\approx \int \zeta^2 d(z/t) &= t^2/12R^2 = k \end{aligned} \quad (\text{A-40})$$

Die Anwendung erfolgt für die Kreiszyinderschale mit schwacher Krümmung (siehe Kap. A.1.8.3). Schwache Krümmung bedeutet hierbei die Vernachlässigung der Krümmungseffekte in den integralen Schalensteifigkeitsparametern im zuvor beschriebenen Sinn.

A.1.4.7 Beschreibung der Materialsteifigkeitsmatrix mittels integraler Ingenieurkonstanten

Die Beschreibung der Materialmatrix mithilfe der Ingenieurkonstanten bei Verwendung der quadratischen Approximation der Dickenintegrale wird getrennt für die einzelnen Untermatrizen von \mathbf{D} vorgenommen. Die Integrale werden entsprechend Gl. (A-37) bzw. Gl. (A-38) verwendet und ergeben gemeinsam mit den Materialkonstanten die Dehn- und Schubsteifigkeiten (D_x , D_Θ bzw. D_v und $S_{x\Theta}$) und die Biege- und Drillsteifigkeiten (K_x , K_Θ bzw. K_v und $K_{x\Theta}$) der Schale. Weiters folgen daraus die Querschubsteifigkeiten S_{xz} und $S_{\Theta z}$.

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} D_x & D_v & 0 & 0 \\ D_v & \bar{D}_\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S}_{x\Theta} & S_{x\Theta} \\ 0 & 0 & S_{x\Theta} & S_{x\Theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A-41})$$

Die Dehnsteifigkeiten in \mathbf{D}_n setzen sich folgend zusammen, wobei der Krümmungseffekt in die Umfangsdehnsteifigkeit \bar{D}_Θ und die Schubsteifigkeit $\bar{S}_{x\Theta}$ eingeht.

$$\begin{aligned} D_x &= E_x \cdot t / (1 - \nu^2) & D_\Theta &= E_\Theta \cdot t / (1 - \nu^2) & S_{x\Theta} &= G_{x\Theta} \cdot t \\ D_v &= \nu^* \cdot E_x \cdot t / (1 - \nu^2) & \bar{D}_\Theta &= D_\Theta (1 + k) & \bar{S}_{x\Theta} &= S_{x\Theta} (1 + k) \end{aligned} \quad (\text{A-42})$$

Beim Biegeanteil \mathbf{D}_m sind aufgrund der dimensionsreinen Darstellung des Schnittkraftvektors \mathbf{n} und des Verzerrungsvektors \mathbf{e} die Biege- und Drillsteifigkeiten mit $1/R^2$ vormultipliziert.

$$\mathbf{D}_m = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} K_x & K_v & 0 & 0 \\ K_v & K_\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{x\Theta} & K_{x\Theta} \\ 0 & 0 & K_{x\Theta} & K_{x\Theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A-43})$$

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu^2)} & K_\Theta &= \frac{E_\Theta t^3}{12(1 - \nu^2)} \\ K_v &= \frac{\nu^* \cdot E_x t^3}{12(1 - \nu^2)} & K_{x\Theta} &= \frac{G_{x\Theta} \cdot t^3}{12} \end{aligned} \quad (\text{A-44})$$

In der Koppelmatrix \mathbf{D}_{nm} in Gl. (A-45) sind die zum Teil unterschiedlichen Vorzeichen der Biege- und Drillsteifigkeiten zu beachten.

$$\mathbf{D}_{nm} = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{x\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A-45})$$

Beim Querschubanteil der Materialmatrix geht der Schalenkrümmungseffekt in die Querschubsteifigkeit $\bar{S}_{\Theta z}$ ein.

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} S_{xz} & 0 \\ 0 & \bar{S}_{\Theta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A-46a})$$

$$\begin{aligned} S_{xz} &= G_{xz} \cdot t \\ S_{\Theta z} &= G_{\Theta z} \cdot t \quad \bar{S}_{\Theta z} = S_{\Theta z}(1 + k) \end{aligned} \quad (\text{A-46b})$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{D} ist nun in endgültiger Form in Gl. (A-47) dargestellt.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_x & D_v & 0 & 0 & K_x/R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_v & \bar{D}_\Theta & 0 & 0 & 0 & -K_\Theta/R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S}_{x\Theta} & S_{x\Theta} & 0 & 0 & -K_{x\Theta}/R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{x\Theta} & S_{x\Theta} & 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline K_x/R^2 & 0 & 0 & 0 & K_x/R^2 & K_v/R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_\Theta/R^2 & 0 & 0 & K_v/R^2 & K_\Theta/R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{x\Theta}/R^2 & 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 & K_{x\Theta}/R^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 & K_{x\Theta}/R^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{\Theta z} \end{bmatrix} \quad (\text{A-47})$$

A.1.5 Gleichgewichtsgleichungen in Differentialform

Für die am Schalelement wirkenden kennflächenorientierten Schnittgrößen und die äußeren vektororientierten Belastungen folgen direkt die Gleichgewichtsgleichungen in Differentialform.

A.1.5.1 Gleichgewicht am Schalelement

Die Schnittgrößen und die möglichen auftretenden Belastungen sind in Bild A-6 dargestellt. Die Beiträge im Kräftegleichgewicht der Umfangsnormalkraft n_Θ in radialer Richtung bzw. der Querkraft q_Θ in Umfangsrichtung sind in Bild A-6.b dargestellt.

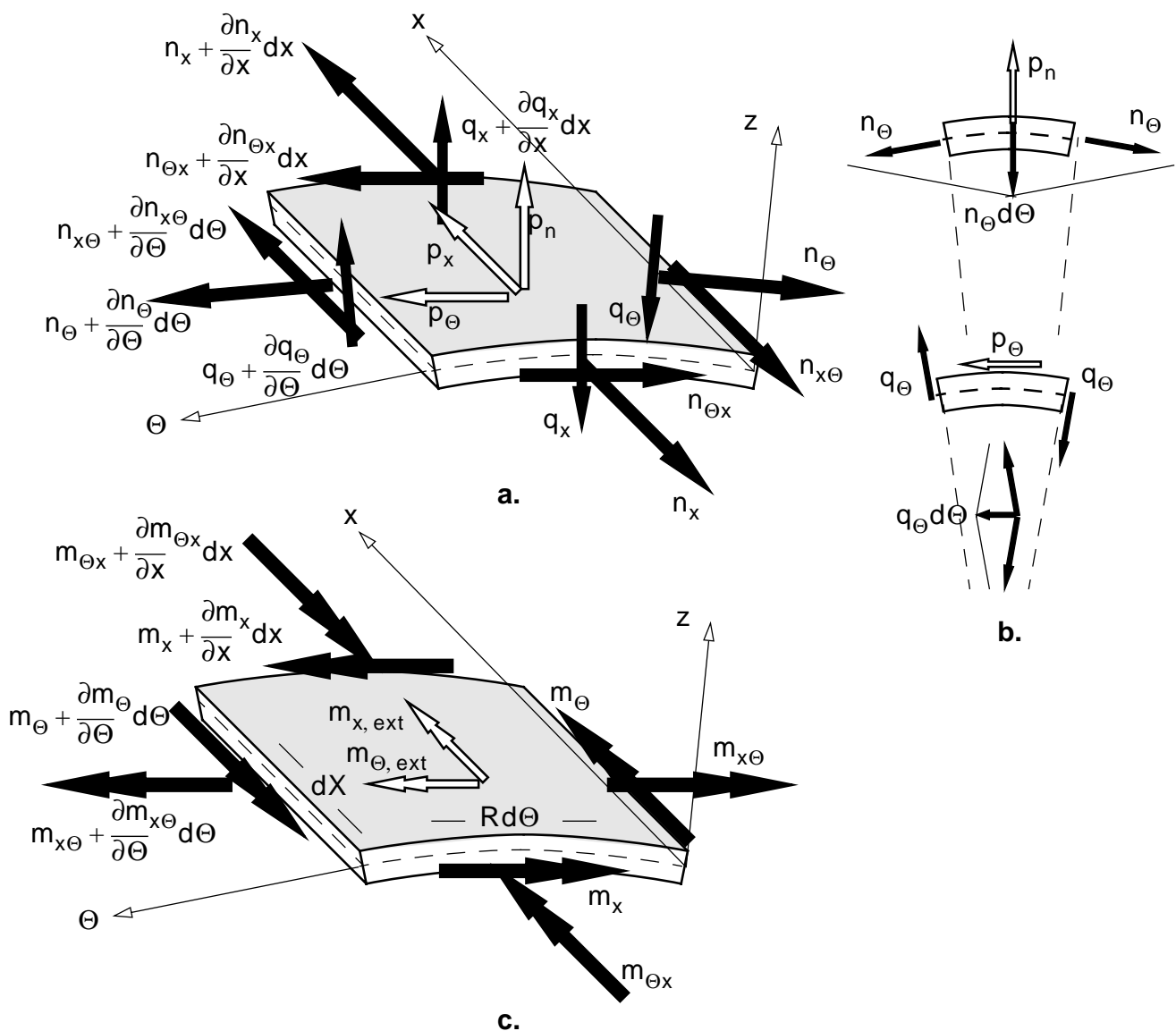


Bild A-6 Gleichgewicht am Schalelement — **a.** Membrankräfte und Flächenbelastungen, **b.** Beiträge der Umfangsnormalkraft n_Θ in Radialrichtung bzw. der Querkraft q_Θ in Umfangsrichtung und **c.** Biege- bzw. Drillmomente und Momentenbelastungen

Die Gleichgewichtsgleichungen in Axial-, Tangential- und Radialrichtung bzw. die Momentengleichgewichtsgleichungen sind in Gl. (A-48) zusammengefaßt.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_x}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{x\theta}}{\partial \Theta} + p_x \cdot R &= 0 \\
 \frac{\partial n_\theta}{\partial \Theta} + \frac{\partial n_{\theta x}}{\partial \xi} + q_\theta + p_\theta \cdot R &= 0 \\
 -n_\theta + \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + \frac{\partial q_\theta}{\partial \Theta} + p_n \cdot R &= 0 \\
 -\frac{\partial m_\theta}{\partial \Theta} - \frac{\partial m_{\theta x}}{\partial \xi} + q_\theta \cdot R + m_{x, \text{ext}} &= 0 \\
 \frac{\partial m_x}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{x\theta}}{\partial \Theta} - q_x \cdot R + m_{\theta, \text{ext}} &= 0
 \end{aligned} \tag{A-48}$$

A.1.5.2 Gleichgewichtsgleichungen in Matrix-Operator-Darstellung

In Matrixform werden die Gleichgewichtsgleichungen durch das Matrixprodukt von Operatormatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ und Schnittgrößenvektor \mathbf{n} und dem Lastvektor \mathbf{p} zusammengefaßt. Die äußeren Momentenbelastungen sind hier zu Null gesetzt ($\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} m_{x, \text{ext}} & m_{\theta, \text{ext}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$).

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix}
 (\)'_{\xi} & 0 & (\)'_{\theta} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\
 0 & (\)'_{\theta} & 0 & (\)'_{\xi} & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & (\)'_{\xi} & (\)'_{\theta} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -(\)'_{\theta} & 0 & -(\)'_{\xi} & | & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & | & (\)'_{\xi} & 0 & (\)'_{\theta} & 0 & | & -1 & 0
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
 n_x \\
 n_\theta \\
 n_{x\theta} \\
 n_{\theta x} \\
 \hline
 m_x/R \\
 m_\theta/R \\
 m_{x\theta}/R \\
 m_{\theta x}/R \\
 \hline
 q_x \\
 q_\theta
 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
 p_x \\
 p_\theta \\
 p_n \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \tag{A-49}$$

$\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$

Analog der Verzerrungsoperatormatrix erfolgt die Unterteilung der Gleichgewichtsoperatormatrix.

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{B}}_{31}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^T & \tilde{\mathbf{B}}_{32}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{11}^T & \mathbf{0}^T & \tilde{\mathbf{B}}_{31}^T \\ \mathbf{0}^T & \tilde{\mathbf{B}}_{22}^T & \tilde{\mathbf{B}}_{32}^T \end{bmatrix} \tag{A-50}$$

A.1.6 Gleichgewichtsgleichungen in Integralform — Prinzip der virtuellen Arbeiten

Eine weitere mathematisch äquivalente Möglichkeit der Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen ist als optionale Formulierung in Integralform gegeben. Ausgangspunkt ist die Grundgleichung des Prinzips der virtuellen Arbeiten für das 3D—Kontinuum. Die Implementierung der Verzerrungsgleichungen — Zusammenhang von 3D- und Schalenverzerrungen — liefert eine optionale Bestimmungsgleichung der integralen Spannungsgrößen und die Gleichgewichtsgleichungen. Die Berücksichtigung von linear-elastischem Material führt zur Materialsteifigkeitsmatrix.

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{A-51a})$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int \delta \mathbf{e}_{3D}^T \cdot \mathbf{s} \cdot dV \quad (\text{A-51b})$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dA = \int \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot R d\Theta \cdot dx \quad (\text{A-51c})$$

Die virtuellen 3D-Verzerrungen ergeben sich durch Anwendung der Dickenmatrix und der Verzerrungsoperatormatrix auf den virtuellen Verformungsvektor der Schale. Das Volumenintegral wird in ein Dickenintegral und ein Flächenintegral aufgeteilt. Das Dickenintegral stellt die Bestimmungsgleichung der integralen Spannungsgrößen, d.h der Schnittkräfte der Schale, dar.

$$\delta \mathbf{e}_{3D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u} = \frac{1}{(1 + \zeta)} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (\text{A-52})$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \left(\int_z \frac{1}{(1 + \zeta)} \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s} \cdot (1 + \zeta) \cdot dz \right) \cdot R d\Theta \cdot dx \quad (\text{A-53a})$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \underbrace{\left(\int_z \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s} \cdot dz \right)} \cdot R d\Theta \cdot dx \quad (\text{A-53b})$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{n} \cdot R d\Theta \cdot dx \quad (\text{A-53c})$$

Der Schnittgrößenvektor \mathbf{n} , wird durch Integration des Matrixproduktes der Dickenmatrix \mathbf{A}_0 mit dem Spannungsvektor \mathbf{s} über die Schalendicke berechnet. Somit ergibt sich ein mit der direkten Bestimmung der Schalenschnittgrößen identer Zusammenhang.

$$\mathbf{n} = \int_z \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{s} \cdot dz \quad (\text{A-54})$$

Die Gleichgewichtsgleichung in Integralform besteht nach Dickenintegration der inneren virtuellen Arbeit aus zwei Flächenintegralen. Sie stellt die Alternative zur Gleichgewichtsgleichung $\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{p}$ in Differentialform dar.

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0$$

$$-\int (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{n} \cdot R d\Theta \cdot dX + \int \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot R d\Theta \cdot dx = 0 \quad (\text{A-55})$$

Für linear elastisches Material wird die Materialbeziehung des 3D-Kontinuums eingearbeitet. Nach Dickenintegration resultiert die Materialsteifigkeitsmatrix der Schale und die Formulierung der Grundgleichungen der Deformationsmethode in Integralform. Die entsprechende Differentialform der Grundgleichungen der Deformationsmethode lautet $\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{p}$ und wird später folgend in Kapitel A.1.8 hergeleitet.

$$-\delta W_{\text{int}} = \int \delta \mathbf{e}_{3D}^T \cdot \mathbf{s} \cdot dV$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{e}_{3D}$$

$$\mathbf{e}_{3D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{(1 + \zeta)} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \left(\int_z \frac{1}{(1 + \zeta)} \cdot \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \frac{1}{(1 + \zeta)} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot (1 + \zeta) dz \right) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \cdot R d\Theta \cdot dx$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \cdot R d\Theta \cdot dx \quad (\text{A-56})$$

$$\text{mit } \mathbf{D} = \int_z \frac{1}{(1 + \zeta)} \cdot \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{D}_{3D} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot dz \quad (\text{A-57})$$

Auch die Bestimmung der Materialsteifigkeitsmatrix ist ident mit jener durch direkte Integration der Spannungen nach Implementierung des 3D-Materialgesetzes, was auch dadurch ersehen werden kann, wenn für $\mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$ in Gl. (A-55) substituiert wird, dann resultiert ebenfalls Gl. (A-56).

A.1.7 Mathematische Äquivalenz der Differential- und Integralformulierungen des Gleichgewichtes

Aus der Integralformulierung des Gleichgewichtes wird durch partielle Integration die Differentialformulierung gewonnen. Durch die Überführbarkeit beider Formulierungen leitet sich ein eindeutiger Zusammenhang der Verzerrungsdifferentialoperatormatrix \mathbf{B} , die bei der Integralformulierung verwendet wird und der Gleichgewichtsdifferentialoperatormatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ ab. Vorweg wird die partielle Integration von Matrixprodukten dargestellt und die damit verbundenen Regeln anschließend auf das Prinzip der virtuellen Arbeiten verwendet.

A.1.7.1 Partielle Integration von Matrixprodukten

Produktfunktionen

Die partielle Integration eines skalaren Produktes kann für zwei Komponenten \mathbf{u} und \mathbf{v} des Integrales angeschrieben werden. Dabei geht — anschaulich gesprochen — die Ableitung auf die zweite Komponente des Integrales über. Dies ist mit einem Vorzeichenwechsel verbunden. Zusätzlich erhält man die Randterme für Anfang und Ende des Integrationsgebietes.

$$\int \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \cdot d\xi = - \int \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \mathbf{v} \cdot d\xi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^E \quad (\text{A-58})$$

Analog kann dies auch für ein Integral mit Ableitungen zweiter Stufe vorgenommen werden.

$$\int \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \xi^2} \cdot d\xi = \int \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} \cdot \mathbf{v} \cdot d\xi + \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \mathbf{v} \right) \Big|_A^E \quad (\text{A-59})$$

Matrixproduktfunktionen

Liegt ein Matrixprodukt vor — hier Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} , so können die Differentialoperatoren den Matrizen vorgestellt werden. Die Matrizen selbst bestehen nur aus zahlenmäßigen Einträgen. Durch die partielle Integration geht der Operator nun auf die andere Matrix über und bewirkt eine Vorzeichenumkehr.

$$\int \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{v} \cdot d\xi = - \int \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot d\xi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \Big|_A^E$$

$$\int \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathbf{v} \cdot d\xi = \int \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot d\xi + \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{v} - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) \Big|_A^E \quad (\text{A-60})$$

A.1.7.2 Prinzip der virtuellen Arbeiten

Aus der Formulierung des Gleichgewichtes in Integralform $\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0$ sollen nun mittels partieller Integration die Gleichgewichtsgleichungen in Differentialform bestimmt werden. Dabei stellen $(\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T$ und der Schnittkräftevektor \mathbf{n} eine Matrixproduktfunktion dar. Zur Anwendung der angegebenen partiellen Integration erfolgt die Aufteilung der Verzerrungsdifferentialoperatormatrix und letztendlich eine Darstellung mit Differentialoperator und zugehöriger logischer Matrix.

Die Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B} wird in Matrizen entsprechend der Ableitungsstufen aufgeteilt. Die Matrix \mathbf{B}_0 repräsentiert den Teil von \mathbf{B} , der keine Differentialoperatoren enthält. Die Matrix \mathbf{B}_1 repräsentiert jenen Teil von \mathbf{B} , der Differentialoperatoren erster Stufe und \mathbf{B}_2 jenen Teil von \mathbf{B} , der Differentialoperatoren zweiter Stufe enthält.

$$-\delta W_{\text{int}} = \int (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{n} \cdot dA \quad (\text{A-61})$$

$$-\delta W_{\text{int}} = \int (\delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots))^T \cdot \mathbf{n} \cdot dA \quad (\text{A-62})$$

Liegen in der Verzerrungsoperatormatrix Ableitungen nach zwei unabhängigen Variablen vor, so müssen die Teiloperatormatrizen \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2 weiter unterteilt werden. Zur Anwendung der partiellen Integration mit den Regeln von Gl. (A-58) bzw. Gl. (A-59) werden diese Matrizen als Produkt von Differentialoperator und dimensionsreiner logischer Matrix ($\mathbf{B}_{1x,0}$, $\mathbf{B}_{1\theta,0}$, $\mathbf{B}_{2xx,0}$...) definiert. Die dimensionsreinen logischen Matrizen bestehen aus '0'- und '1'-Gliedern.

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{1x} + \mathbf{B}_{1\theta} = \mathbf{B}_{1x,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{B}_{1\theta,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \quad (\text{A-63})$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{2xx} + \mathbf{B}_{2x\theta} + \mathbf{B}_{2\theta\theta} = \mathbf{B}_{2xx,0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \mathbf{B}_{2x\theta,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} + \mathbf{B}_{2\theta\theta,0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \quad (\text{A-64})$$

Gebietsterme

Zuerst werden die Feldgleichungen des Gleichgewichtes behandelt. Die Behandlung der Randterme des Integrationsbereiches erfolgt gesondert.

$$-\delta W_{\text{int}} = \int \left(\left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{1x,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{B}_{1\theta,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} + \mathbf{B}_{2xx,0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \mathbf{B}_{2x\theta,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} + \mathbf{B}_{2\theta\theta,0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \right)^T \cdot \mathbf{n} \cdot dA \quad (\text{A-65})$$

Die Durchführung der partiellen Integration bedingt nun den Übergang der Wirkung der Differentialoperatoren auf die zweite Komponente des Integrales, also auf den integralen Spannungsvektor (Schnittkraftvektor) \mathbf{n} . Dieser Vorgang wird anhand der zweiten Komponente in Gl. (A-66) erläutert:

$$\begin{aligned}
-\delta W_{\text{int}} &= \int \dots \left(\mathbf{B}_{1x,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \delta \mathbf{u} \right)^T \cdot \mathbf{n} + \dots \cdot dA = \\
&= \int \dots \left(\mathbf{B}_{1x,0} \cdot \delta \mathbf{u} \right)^T \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n} + \dots \cdot dA = \int \dots \delta \mathbf{u}^T \left(-\mathbf{B}_{1x,0} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n} + \dots \right) \cdot dA
\end{aligned} \quad (\text{A-66})$$

$$\begin{aligned}
-\delta W_{\text{int}} &= \int_A \delta \mathbf{u}^T \cdot \left(\mathbf{B}_0^T \cdot \mathbf{n} - \mathbf{B}_{1x,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{n} - \mathbf{B}_{1\theta,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{n} + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{B}_{2xx,0}^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathbf{n} + \mathbf{B}_{2x\theta,0}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{n} + \mathbf{B}_{2\theta\theta,0}^T \cdot \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \mathbf{n} \right) \cdot dA
\end{aligned} \quad (\text{A-67})$$

Die äußere virtuelle Arbeit ergibt sich aus Lastvektor \mathbf{p} und virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$. Die Gleichgewichtsgleichung in Integralform $\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0$ ist in Gl. (A-70) angegeben.

$$\delta W_{\text{ext}} = \int \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dA \quad (\text{A-68})$$

$$\int_A \delta \mathbf{u}^T \cdot \left(\underbrace{-\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_{1x}^T + \mathbf{B}_{1\theta}^T - \mathbf{B}_{2xx}^T - \mathbf{B}_{2x\theta,0}^T - \mathbf{B}_{2\theta\theta,0}^T}_{\tilde{\mathbf{B}}^T} \right) \cdot \mathbf{n} \cdot dA + \int \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dA + \text{Randterme} = 0 \quad (\text{A-69})$$

$$\int \delta \mathbf{u}^T \cdot \left(\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p} \right) \cdot dA + \text{Randterme} = 0 \quad (\text{A-70})$$

Aus der Forderung der Beliebigkeit der virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ ergibt sich nun die Gleichgewichtsgleichung. Zur Erfüllung dieser Forderung muß der Klammerterm zu Null werden und entspricht den Gleichgewichtsfeldgleichungen im Inneren des Integrationsgebietes

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (\text{A-71})$$

Die Differentialoperatormatrix $\tilde{\mathbf{B}}^T$ des Gleichgewichtes kann somit direkt durch das Prinzip der virtuellen Arbeit bestimmt werden. Es ergibt sich ein eindeutiger und systematischer Zusammenhang zwischen den Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B} und der Gleichgewichtsoperatormatrix $\tilde{\mathbf{B}}^T$.

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = -\mathbf{B}_0^T + \mathbf{B}_{1x}^T + \mathbf{B}_{1\theta}^T - \mathbf{B}_{2xx}^T - 2\mathbf{B}_{2x\theta,0}^T - \mathbf{B}_{2\theta\theta,0}^T \quad (\text{A-72})$$

Liegen Verzerrungsoperatoren höherer Ordnung vor, so wird die partielle Integration mehrmals vorgenommen werden. Der Übergang der Differentialoperatoren findet entsprechend der mehrmaligen Anwendung statt und bedingt die Vorzeichenumkehr. Bei geradzahlgiger Ableitungsstufe erfolgt die Vorzeichenumkehr, bei ungeradzahlgiger bleiben die Vorzeichen unverändert.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_{1x} + \mathbf{B}_{1\theta}) + (\mathbf{B}_{2xx} + \dots) + (\mathbf{B}_{3xxx} + \dots) + (\mathbf{B}_{4xxxx} + \dots) + \dots \text{usw} \quad (\text{A-73})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = -\mathbf{B}_0^T + (\mathbf{B}_{1x} + \mathbf{B}_{1\theta})^T - (\mathbf{B}_{2xx} + \dots)^T + (\mathbf{B}_{3xxx} + \dots)^T - (\mathbf{B}_{4xxxx} + \dots)^T + \dots \text{usw} \quad (\text{A-74})$$

Randgleichungen

Die Bestimmung der Randterme wird hier zur besseren Illustration gesondert dargestellt. Dabei werden jene aus den Differentialoperatoren 1. Ordnung entstehenden Randterme behandelt. Aus den Differentialoperatoren 0. Ordnung entstehen keine Randterme, da hier keine partielle Integration vorgenommen werden muß.

Aus den Differentialoperatoren der jeweiligen Richtung entstehen Randterme für die konjugierten Rändern in den dazu senkrechten Richtungen.

$$\text{Randterme} = \int_{\Theta, (\xi = \text{konst})} \delta \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{B}_{1x,0}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p}) \Big|_{\text{unten}}^{\text{oben}} d\Theta + \int_{\xi, (\Theta = \text{konst})} \delta \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{B}_{1\Theta,0}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p}) \Big|_{\text{rechts}}^{\text{links}} d\xi \quad (\text{A-75})$$

Das Resultat sind die Gleichgewichtsbedingungen entlang der Ränder in Gl. (A-76a) und Gl. (A-76d).

$$\mathbf{B}_{1x,0}^T \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{oben}} = \mathbf{p} \Big|_{\text{oben}} \quad (\text{A-76a})$$

$$\mathbf{B}_{1x,0}^T \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{unten}} = \mathbf{p} \Big|_{\text{unten}} \quad (\text{A-76b})$$

$$\mathbf{B}_{1\Theta,0}^T \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{links}} = \mathbf{p} \Big|_{\text{links}} \quad (\text{A-76c})$$

$$\mathbf{B}_{1\Theta,0}^T \cdot \mathbf{n} \Big|_{\text{rechts}} = \mathbf{p} \Big|_{\text{rechts}} \quad (\text{A-76d})$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit liefert somit in eindeutiger Art und Weise die Gleichgewichtsgleichungen und die Kräfteandbedingungen. Sie sind somit durch die Verzerrungsdifferentialoperatormatrix eindeutig predeterminiert.

A.1.7.3 Anwendung an der schubnachgiebigen Kreiszylinderschale

Die Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B} besteht sich aus 3 Teilmatrizen, die die Ableitungen 0. und 1. Stufe nach ξ bzw. Θ enthalten.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{1\xi} + \mathbf{B}_{1\Theta} \quad (\text{A-77})$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) + \quad (\text{A-78})$$

$$+ \left(\begin{array}{cccccc} ()'_{\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ()'_{\xi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -()'_{\xi} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & ()'_{\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ()'_{\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -()'_{\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ()'_{\Theta} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Differentialoperatormatrix für das Gleichgewicht kann nun direkt ermittelt werden. Es erfolgt eine Vorzeichenumkehr bei den Ableitungen 0. Stufe.

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = (-\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{1\xi} + \mathbf{B}_{1\Theta})^T \quad (\text{A-79})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\Theta} & 0 & ()'_{\xi} & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & ()'_{\xi} & ()'_{\Theta} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -()'_{\Theta} & 0 & -()'_{\xi} & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & | & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-80})$$

Die Gleichgewichtsdifferentialgleichung $\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$ ist zum Vergleich nochmals dargestellt, sie ist Kap. A.1.5.2 entnommen. Die geforderte Eindeutigkeit ist gegeben.

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\Theta} & 0 & ()'_{\xi} & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & ()'_{\xi} & ()'_{\Theta} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -()'_{\Theta} & 0 & -()'_{\xi} & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & | & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_{\Theta} \\ n_{x\Theta} \\ n_{\Theta x} \\ \hline m_x/R \\ m_{\Theta}/R \\ m_{x\Theta}/R \\ m_{\Theta x}/R \\ \hline q_x \\ q_{\Theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_{\Theta} \\ p_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-81})$$

Abschließend muß festgestellt werden, daß die Herleitung der Gleichgewichtsgleichungen über die Integralformulierung die leistungsstärkere und daher zu bevorzugende Methode darstellt. Darüberhinaus ist sie ein Knockout-Kriterium für die Richtigkeit der Formulierung von Gleichgewichtsgleichungen, wenn die Kinematik vorgegeben ist.

A.1.8 Grundgleichungen der Deformationsmethode

Nimmt man die Gleichgewichtsdifferentialgleichungen als Ausgangspunkt und setzt sukzessive die Materialgleichungen und Verzerrungsgleichungen ein, so erhält man die Grundgleichungen der Deformationsmethode als Differentialgleichungssystem formuliert in den Schalenverschiebungskomponenten \mathbf{u} und der Belastung \mathbf{p} . Dieser Zusammenhang ist durch die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} gegeben.

$$\begin{array}{rcl}
 \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} & + \mathbf{p} = \mathbf{0} \\
 \mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \\
 \mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\
 \hline
 \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{u} & + \mathbf{p} = \mathbf{0} \\
 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} & + \mathbf{p} = \mathbf{0}
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \hline \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \end{array}} \right\} \quad (\text{A-82})$$

Übersicht behandelter Formulierungsvarianten

Im folgenden werden die Grundgleichungen der Deformationsmethode für verschiedene Schalenformulierungen dargestellt:

A.1.8.1 Allgemeiner Fall der schubnachgiebigen Kreiszyinderschale

A.1.8.2 Transversal schubstarre Kreiszyinderschale

A.1.8.3 Transversal schubstarre und schwach gekrümmte Kreiszyinderschale

A.1.8.4 Mängel der Kreiszyinderschalengleichungen nach Flügge

A.1.8.5 Vereinfachte Kreiszyinderschalengleichungen nach Donell

Ausgangspunkt ist dabei der allgemeine Fall der schubnachgiebigen Kreiszyinderschale. Sukzessive werden die Grundgleichungen bei Anwendung der Normalenhypothese für die transversal schubstarre und darauf aufbauend bei Vernachlässigung der Krümmungseffekte in den Dickenintegralen für die transversal schubstarre und schwach gekrümmte Kreiszyinderschale aufbereitet.

Abschließend erfolgt der Vergleich mit den Schalengleichungen nach Flügge (1960) bzw. nach Donell (1934).

A.1.8.1 Allgemeiner Fall der schubnachgiebigen Kreiszyinderschale

Die Materialmatrix besteht hierbei aus vier Teilen. Der erste Teil \mathbf{D}_n ist zu den Membrankräften gehörig, der zweite — \mathbf{D}_m — zu den Biege- und Drillmomenten, der dritte \mathbf{D}_q zu den transversalen Schubkräften und der vierte — \mathbf{D}_{nm} ist zugehörig zur Koppelung von Membrankräften und Biegemomenten.

Die Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} besteht dementsprechend ebenfalls aus vier Teilen, dem Membrananteil \mathbf{K}_n , dem Biegeanteil \mathbf{K}_m , dem Transversalschubanteil \mathbf{K}_q und der Normalkraft-Biegemoment-Koppelmatrix \mathbf{K}_{nm} .

$$\mathbf{D} = \bigcup_i \mathbf{D}_i = \bigcup \mathbf{D}_n + \mathbf{D}_m + \mathbf{D}_{nm} + \mathbf{D}_q \quad (\text{A-83})$$

Hierbei bedeutet \bigcup den Assemblieroperator, welcher von seiner Leistungsfähigkeit über den konventionellen "Summenoperator \sum " hinausgeht und zusätzlich die Positionierung der Submatrizen \mathbf{D}_i in der Gesamtmatrix \mathbf{D} berücksichtigt. Im Sonderfall übereinstimmender Dimensionen von Submatrizen \mathbf{D}_i und Gesamtmatrix \mathbf{D} degeneriert der Assemblieroperator \bigcup zum gewöhnlichen Summenoperator \sum .

Daraus ergibt sich:

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot (\bigcup_i \mathbf{D}_i) \cdot \mathbf{B} = \bigcup_i \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_n + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_q + \mathbf{K}_{nm} \quad (\text{A-84})$$

Der Membrananteil \mathbf{K}_n ist mit den Mittelflächenverschiebungen U , V und W verknüpft, der Biegeanteil \mathbf{K}_m lediglich mit den Drehparametern. Der Transversalanteil \mathbf{K}_q ist mit den Verschiebungen V und W bzw. den Drehparametern β_x und β_θ verknüpft. Die Koppelmatrix \mathbf{K}_{nm} hat Einträge in gebänderter Form in den Nebendiagonalgliedern. Die Submatrizen der Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} sind in Gl. (A-85) dargestellt.

Die Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} verkörpert ein 5x5-System partieller Differentialgleichungen jeweils 2. Ordnung. Nach entsprechender Elimination und Übergang auf eine einzige Verformungsunbekannte resultiert eine partielle Differentialgleichung 10. Ordnung. Pro Rand sind 5 Randbedingungen zu erfüllen.

$$\mathbf{K}_n = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} D_X(\)'_{\xi\xi} + \bar{S}_{X\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} & (S_{X\Theta} + D_V)(\)'_{\xi\Theta} & D_V(\)'_{\xi} & 0 & 0 \\ (S_{X\Theta} + D_V)(\)'_{\xi\Theta} & S_{X\Theta}(\)'_{\xi\xi} + \bar{D}_{\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} & \bar{D}_{\Theta}(\)'_{\Theta} & 0 & 0 \\ -D_V(\)'_{\xi} & -\bar{D}_{\Theta}(\)'_{\Theta} & -\bar{D}_{\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_m = \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} + K_{X\Theta}(\)'_{\xi\xi} & -(K_V + K_{X\Theta})(\)'_{\xi\Theta} \\ 0 & 0 & 0 & -(K_V + K_{X\Theta})(\)'_{\xi\Theta} & K_X(\)'_{\xi\xi} + K_{X\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_q = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{S}_{\Theta Z} & \bar{S}_{\Theta Z}(\)'_{\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{S}_{\Theta Z}(\)'_{\Theta} & S_{XZ}(\)'_{\xi\xi} + \bar{S}_{\Theta Z}(\)'_{\Theta\Theta} & -\bar{S}_{\Theta Z}(\)'_{\Theta} & S_{XZ}(\)'_{\xi} \\ 0 & -\bar{S}_{\Theta Z} & \bar{S}_{\Theta Z}(\)'_{\Theta} & -S_{\Theta Z} & 0 \\ 0 & 0 & -S_{XZ}(\)'_{\xi} & 0 & -S_{XZ} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{nm} = \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} - K_{X\Theta}(\)'_{\xi\xi} & K_X(\)'_{\xi\xi} - K_{X\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} \\ 0 & K_{\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} - K_{X\Theta}(\)'_{\xi\xi} & K_{\Theta}(\)'_{\Theta} & 0 & 0 \\ K_X(\)'_{\xi\xi} - K_{X\Theta}(\)'_{\Theta\Theta} & 0 & K_{\Theta}(\)'_{\Theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A.1.8.2 Transversal schubstarre Kreiszyinderschale

Normalenhypothese

Die Anwendung der Normalenhypothese auf die Kinematik der Kreiszyinderschale bedingt, daß die Querschubverformungen γ_{xz} und $\gamma_{\theta z}$ zu Null werden. Damit reduzieren sich die Verzerrungsoperatormatrix, die Materialmatrix und die Gleichgewichtsoperatormatrix.

Durch die Normalenhypothese ergeben sich die Drehparametern als Funktionen der Mittelflächenverschiebungen. Enthält \mathbf{B}_{32} , wie im vorliegenden Fall keine Differentialoperatoren, kann der Drehparametervektor \mathbf{u}_1 durch den Verschiebungsvektor \mathbf{u}_0 direkt ausgedrückt werden. Es folgt daraus die reduzierte Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B}_{red} .

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-86a})$$

$$\mathbf{e}_\perp = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_1 = -\mathbf{B}_{32}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{31} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (\text{A-86b})$$

$$\mathbf{e}_{red} = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_{32}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{31}) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{B}_{red} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (\text{A-86c})$$

Damit resultiert folgende Abhängigkeit der Rotationsparameter von den Verschiebungsgrößen:

$$\begin{bmatrix} \beta_x \cdot \mathbf{R} \\ \beta_\theta \cdot \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & ()'_{\theta} \\ 0 & -()'_{\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad (\text{A-87})$$

Die Verzerrungsoperatormatrix enthält nun auch Ableitungen zweiter Stufe, wie folgt:

$$\mathbf{B}_{red} = \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\theta} & 1 \\ ()'_{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & -()'_{\xi\xi} \\ 0 & ()'_{\theta} & -()'_{\theta\theta} \\ 0 & 0 & -()'_{\xi\theta} \\ 0 & ()'_{\xi} & -()'_{\xi\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A-88})$$

Gleichgewichtsgleichungen

Analog wird bei den Gleichgewichtsgleichungen vorgegangen. Die Querkraftvektor \mathbf{q} kann nicht mehr aus den Materialgleichungen bestimmt werden, sondern muß aus den Gleichgewichtsgleichungen mit dem reduzierten Schnittkraftvektor $\mathbf{n}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_0 & \mathbf{m} \end{bmatrix}^T$ und den äußeren Lasten bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{B}}_{31}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^T & \tilde{\mathbf{B}}_{32}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{\text{red}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A-89})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1^T & \tilde{\mathbf{B}}_{31}^T \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^T & \tilde{\mathbf{B}}_{32}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{\text{red}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q} = -\tilde{\mathbf{B}}_{32}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_2^T \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} - \tilde{\mathbf{B}}_{32}^{-T} \cdot \mathbf{p}_m \quad (\text{A-90})$$

$$\underbrace{(\tilde{\mathbf{B}}_1^T - \tilde{\mathbf{B}}_{31}^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{32}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{B}}_2^T)} \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} + \underbrace{(\mathbf{p}_0 - \tilde{\mathbf{B}}_{31}^T \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{32}^{-T} \cdot \mathbf{p}_m)} = \mathbf{0} \quad (\text{A-91})$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} + \mathbf{p}_0^* = \mathbf{0} \quad (\text{A-92})$$

Die Querkräfte haben im vorliegenden Fall die folgende Abhängigkeit von den Biege- und Drillmomenten.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_x \\ \mathbf{q}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\theta} & 0 \\ 0 & ()'_{\theta} & 0 & ()'_{\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x/R \\ m_\theta/R \\ m_{x\theta}/R \\ m_{\theta x}/R \end{bmatrix} \quad (\text{A-93})$$

Die Gleichgewichtsgleichungen in Gl. (A-94) enthalten nun ebenfalls Ableitungen zweiter Stufe, wie folgt:

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\theta} & 0 & ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\theta} & 0 & ()'_{\xi} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & ()'_{\xi\xi} & ()'_{\theta\theta} & ()'_{\xi\theta} & ()'_{\xi\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_\theta \\ n_{x\theta} \\ n_{\theta x} \\ m_x/R \\ m_\theta/R \\ m_{x\theta}/R \\ m_{\theta x}/R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\theta \\ p_n \end{bmatrix} \quad (\text{A-94})$$

Materialgleichungen

Die Materialsteifigkeitsmatrix ist um den Querkraftsanteil reduziert.

$$\mathbf{D}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_n & \mathbf{D}_{nm} \\ \mathbf{D}_{nm} & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \quad (\text{A-95})$$

Mathematische Äquivalenz der Differential- und Integralformulierungen des Gleichgewichtes

Die Kontrolle integralformulierungskonsistenten Zusammenhanges von Verzerrungsoperatormatrix und Gleichgewichtsoperatormatrix wird nun vorgenommen. Die Operatormatrix für das Gleichgewicht $\tilde{\mathbf{B}}^T$ folgt durch Anwendung der Rechenvorschrift von Kap. A.1.7.2, also nach Umkehr der Vorzeichens in den logischen Matrizen zugehörig zu den Operatoren 0. und 2.Ordnung ($\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_{2xx}, \mathbf{B}_{2x\theta}, \mathbf{B}_{2\theta\theta}$).

$$\tilde{\mathbf{B}}^T = \frac{1}{R} (-\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{1x} + \mathbf{B}_{1\theta} - \mathbf{B}_{2xx} - \mathbf{B}_{2x\theta} - \mathbf{B}_{2\theta\theta})^T \quad (\text{A-96})$$

Vergleicht man Gl. (A-94) und Gl. (A-88), so zeigt sich der geforderte Zusammenhang.

Grundgleichungen der Deformationsmethode für die transversal schubstarre Kreiszyinderschale

Die Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} besteht aus drei Teilen, dem Membrananteil \mathbf{K}_n , dem Biegeanteil \mathbf{K}_m und der Koppelmatrix \mathbf{K}_{nm} .

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{\text{red}} = \mathbf{K}_n + \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_{nm} \quad (\text{A-97})$$

Der Membrananteil ist nach wie vor unverändert, der Biegeanteil ist bedingt durch die Normalenhypothese mit den Verschiebungen V und W verknüpft. Die Koppelmatrix wird nun zu einer Dreiecksmatrix. Die Submatrizen der Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} sind in Kap. (A-98) dargestellt.

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} verkörpert ein 4x4-System partieller Differentialgleichungen jeweils 2. Ordnung. Nach entsprechender Elimination und Übergang auf eine einzige Verformungsunbekannte resultiert eine partielle Differentialgleichung 8. Ordnung. Pro Rand sind 4 Randbedingungen zu erfüllen.

$$\mathbf{K}_n = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} D_x(\)_{,\xi\xi} + \bar{S}_{x\theta}(\)_{,\theta\theta} & (S_{x\theta} + D_v)()_{,\xi\theta} & D_v(\)_{,\xi} \\ (S_{x\theta} + D_v)()_{,\xi\theta} & S_{x\theta}(\)_{,\xi\xi} + \bar{D}_{\theta}(\)_{,\theta\theta} & \bar{D}_{\theta}(\)_{,\theta} \\ -D_v(\)_{,\xi} & -\bar{D}_{\theta}(\)_{,\theta} & -\bar{D}_{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_m = \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{x\theta}(\)_{,\xi\xi} + K_{\theta}(\)_{,\theta\theta} & -(K_{\theta}(\)_{,\xi\theta} - (2K_{x\theta} + K_v)()_{,\xi\xi\theta}) \\ 0 & (K_{\theta}(\)_{,\xi\theta} + (2K_{x\theta} + K_v)()_{,\xi\xi\theta}) & (-K_x(\)_{,\xi\xi} - K_{\theta}(\)_{,\xi\theta} - 2(2K_{x\theta} + K_v)()_{,\xi\xi\theta\theta}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{nm} = \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_x(\)_{,\xi\theta} + K_{x\theta}(\)_{,\xi\theta\theta} \\ 0 & -2K_{\theta}(\)_{,\theta\theta} + 2K_{x\theta}(\)_{,\xi\xi} & -K_x(\)_{,\xi\theta} + K_{x\theta}(\)_{,\xi\theta\theta} \\ -K_x(\)_{,\xi\theta} - K_{x\theta}(\)_{,\xi\theta\theta} & -K_{\theta}(\)_{,\xi\theta} - ()_{,\theta} + K_{x\theta}(\)_{,\xi\xi\theta} & K_{\theta}(\)_{,\xi\theta} - ()_{,\theta} - K_{x\theta}(\)_{,\xi\xi\theta} - 2K_{\theta}(\)_{,\theta\theta} \end{bmatrix}$$

A.1.8.3 Transversal schubstarre und schwach gekrümmte Kreiszyinderschale

Durch die Vernachlässigung des Krümmungseffektes in der Materialsteifigkeitsmatrix — unterschiedliche Faserlängen und trapezförmiger Querschnitt — ergeben sich die vereinfachte Dickenintegrale in Gl. (A-40). Es entfallen somit die Zusatzterme bei der Umfangsdehnsteifigkeit und bei der Schubsteifigkeit. Weiters entfällt die Koppelung zwischen den Membrankräften und Biege- bzw. Drillmomentenanteilen (Gl. (A-99)).

$$\begin{aligned} \bar{D}_\Theta &= D_\Theta \\ \bar{S}_{x\Theta} &= S_{x\Theta} \\ \bar{D}_{nm} &= 0 \end{aligned} \tag{A-99}$$

Die beiden Schubkräfte und Drillmomente sowie die Schubverzerrungen und Verdrillungen werden nun ident, wie folgt:

$$\begin{aligned} n_{x\Theta} &= n_{\Theta x} & \overline{\gamma_{x\Theta}} &= \overline{\gamma_{\Theta x}} \\ m_{x\Theta} &= m_{\Theta x} & \overline{\kappa_{x\Theta}} &= \overline{\kappa_{\Theta x}} \end{aligned} \tag{A-100}$$

Der Schnittkraftvektor \mathbf{n} und der Verzerrungsvektor \mathbf{e} haben nun nur mehr 6 statt der ursprünglich 8 Komponenten. Die Dimension der Gleichgewichtsoperatorenmatrix reduziert sich von 8×3 auf 6×3 . Die Materialmatrix wird nun eine 6×6 -Matrix.

Die Gleichgewichtsgleichungen für die querschubstarre Kreiszyinderschale, die Materialgleichungen und die Bestimmungsgleichungen der Verzerrungen lauten nun folgend:

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\Theta} & ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\Theta} & ()'_{\xi} \\ 0 & -1 & 0 & ()'_{\xi\xi} & ()'_{\Theta\Theta} & 2()'_{\xi\Theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ m_x/R \\ m_\Theta/R \\ m_{x\Theta}/R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta \\ p_n \end{bmatrix} = -\mathbf{p} \tag{A-101}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ m_x/R \\ m_\Theta/R \\ m_{x\Theta}/R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_v & D_\Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{x\Theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_x/R^2 & K_v/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_v/R^2 & K_\Theta/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_\Theta \cdot R \\ \kappa_{x\Theta} \cdot R \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \tag{A-102}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_\theta \cdot R \\ \kappa_{x\theta} \cdot R \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & (\)'_{\theta} & 1 \\ (\)'_{\theta} & (\)'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & -(\)'_{\xi\xi} \\ 0 & (\)'_{\theta} & -(\)'_{\theta\theta} \\ 0 & (\)'_{\xi} & -2(\)'_{\xi\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A-103})$$

Grundgleichungen der Deformationsmethode

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} besteht nun aus zwei Teilen, dem Membrananteil \mathbf{K}_n und dem Biegeanteil \mathbf{K}_m . Die Matrix \mathbf{K}_n ist bis auf die modifizierten Steifigkeiten D_θ und $S_{x\theta}$ und \mathbf{K}_m ist vollständig ident mit der entsprechenden Matrix von Gl. (A-98).

$$\mathbf{K}_n = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} D_x(\)'_{\xi\xi} + S_{x\theta}(\)'_{\theta\theta} & (S_{x\theta} + D_v)(\)'_{\xi\theta} & D_v(\)'_{\xi} \\ (S_{x\theta} + D_v)(\)'_{\xi\theta} & S_{x\theta}(\)'_{\xi\xi} + D_\theta(\)'_{\theta\theta} & D_\theta(\)'_{\theta} \\ -D_v(\)'_{\xi} & -D_\theta(\)'_{\theta} & -D_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A-104a})$$

$$\mathbf{K}_m = \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{x\theta}(\)'_{\xi\xi} + K_\theta(\)'_{\theta\theta} & -K_\theta(\)'_{3\theta} - (2K_{x\theta} + K_v)(\)'_{\xi\xi\theta} \\ 0 & K_\theta(\)'_{3\theta} + (2K_{x\theta} + K_v)(\)'_{\xi\xi\theta} & -K_x(\)'_{4\xi} - K_\theta(\)'_{4\theta} - 2(2K_{x\theta} + K_v)(\)'_{\xi\xi\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A-104b})$$

A.1.8.4 Mängel der Kreiszyinderschalengleichungen nach Flügge

Die nachfolgend angeführten Gleichungen der transversal schubstarrten Kreiszyinderschale sind dem Buch von Flügge (1960) entnommen. Für die Gleichgewichts- und Verzerrungsgleichungen sind die dort getroffenen Vorzeichenfestlegungen zu beachten. Die Indizierung der Membranschubkräfte und Drillmomente nach Flügge richtet sich nach Ort und Richtung ist entgegengesetzt zu der hier verwendeten Festlegung.

$$\begin{aligned} n_{x\Theta, FI} &\rightarrow n_{\Theta x} & m_{x\Theta, FI} &\rightarrow m_{\Theta x} \\ n_{\Theta x, FI} &\rightarrow n_{x\Theta} & m_{\Theta x, FI} &\rightarrow m_{x\Theta} \end{aligned} \tag{A-105}$$

Die Gleichgewichtsgleichungen ($\tilde{\mathbf{B}}_{FI}^T \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{p}$) sind bis auf die unterschiedlichen Vorzeichenfestlegungen ident mit den zuvor hergeleiteten und in Gl. (A-94) dargestellten Gleichgewichtsgleichungen. Sie sind in Gl. (A-106) der Vollständigkeit halber nochmals angeführt:

$$\underbrace{\frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi} & 0 & (\)'_{\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\)'_{\Theta} & 0 & (\)'_{\xi} & 0 & -(\)'_{\Theta} & 0 & -(\)'_{\xi} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (\)'_{\xi\xi} & (\)'_{\Theta\Theta} & (\)'_{\xi\Theta} & (\)'_{\xi\Theta} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_{FI}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} n_x \\ n_{\Theta} \\ n_{x\Theta} \\ n_{\Theta x} \\ m_x/R \\ m_{\Theta}/R \\ m_{x\Theta}/R \\ m_{\Theta x}/R \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} p_x \\ p_{\Theta} \\ p_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} \tag{A-106}$$

Die Materialmatrix \mathbf{D}_{FI} nach der Flügge'schen Darstellung ist unsymmetrisch (!). Dies hängt mit der von Flügge vorgenommenen Definition der Verzerrungsgrößen zusammen. Die Unterschiede in den Materialbeziehungen und den Verzerrungsgleichungen zur korrekten Darstellung in Gl. (A-95) (bzw. Gl. (A-47)) und Gl. (A-88) sind zur Verdeutlichung in Gl. (A-107) und Gl. (A-108) gekennzeichnet:

- Auffallend ist, daß nach Flügge unterschiedliche Koppelsteifigkeitsmatrizen resultieren. Für eine korrekte Formulierung müssen diese Submatrizen transponiert ident sein — $\mathbf{D}_{nm} = \mathbf{D}_{mn}^T$. In der Materialsteifigkeitssubmatrix \mathbf{D}_{nm} wird diese Forderung für die Glieder in der 5. und 6. Zeile jeweils in der 2. Spalte nicht erfüllt.
- Eine weitere Abweichung zur korrekten Darstellung tritt bei der Umfangsdehnsteifigkeit (2. Zeile und 2. Spalte von \mathbf{D}_{FI}) durch den Entfall des Krümmungseffektes auf.
- Die Membranschubsteifigkeiten sind im Gegensatz zur korrekten Darstellung nur in der Hauptdiagonale von \mathbf{D}_{FI} eingetragen, es fehlen die Glieder in 3. Zeile und 4. Spalte bzw. 4. Zeile und 3. Spalte.

Die Kennzeichnung der Abweichungen in \mathbf{D}_{FI} zur korrekten Materialsteifigkeitsmatrix erfolgt nach der ursächlichen Verzerrungskomponente:

- Abweichungen, die der Flügge'schen Definition der Schubverzerrungen und Drillkrümmungen folgen, sind eingerahmt dargestellt.
- Abweichungen, die der Flügge'schen Definition der Biegekrümmung in Umfangsrichtung folgen, sind grau hinterlegt.

Im Gegenzug zu den definierten Schubverzerrungen und Drillkrümmungen entfallen die Nebendiagonalglieder der Membranschubsteifigkeiten in \mathbf{D}_{FI} (3. und 4. Zeile — 4. bzw. 3. Spalte) und das Glied in der 8. Zeile und 4. Spalte wird ebenfalls zu Null.

Durch die Definition der Biegekrümmung κ_Θ in Umfangsrichtung entfällt der Krümmungseffekt der Umfangsdehnsteifigkeit \bar{D}_Θ im 2. Hauptdiagonalglied von \mathbf{D}_{FI} und die Koppelsteifigkeit K_Θ in der 6. Zeile und 2. Spalte. Die Koppelanteil von \mathbf{D}_{FI} wird zusätzlich durch die Querkontraktionssteifigkeit K_v in der 2. Zeile und 5. Spalte erweitert.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ n_{\Theta x} \\ m_x/R \\ m_\Theta/R \\ m_{x\Theta}/R \\ m_{\Theta x}/R \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}_{FI}} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_x & D_v & 0 & 0 & -K_x/R^2 & 0 & 0 & 0 \\ D_v & \boxed{D_\Theta} & 0 & 0 & 0 & K_\Theta/R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{x\Theta} + \frac{K_{x\Theta}}{R^2} & \boxed{0} & 0 & 0 & -K_{x\Theta}/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & S_{x\Theta} & 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 \\ -K_x/R^2 & -K_v/R^2 & 0 & 0 & K_x/R^2 & K_v/R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & K_v/R^2 & K_\Theta/R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 & 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 & K_{x\Theta}/R^2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 & K_{x\Theta}/R^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{FI}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{\Theta x} \\ \kappa_x R \\ \kappa_\Theta R \\ \kappa_{x\Theta} R \\ \kappa_{\Theta x} R \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{FI}} \quad (\text{A-107})$$

Die Flügge'sche Definition der Verzerrungsgrößen — $\mathbf{e}_{FI} = \mathbf{B}_{FI} \cdot \mathbf{u}$ — weist mehrere Unterschiede zu den zuvor hergeleiteten korrekten Verzerrungen auf. Die gekennzeichneten Glieder in der 3. und 4. bzw. 7. Zeile in der 1. bzw. 2. Spalte sind entsprechend der korrekten Formulierung "0":

- Die Membranschubverzerrungen werden nicht nach der Verschiebungsursache getrennt, sondern es wird die gemittelte Schubverzerrung $\gamma_{x\theta} = \gamma_{\theta x}$ verwendet, die Verzerrungsdifferentialoperatormatrix \mathbf{B}_{FI} enthält statt des "0"-Termes in der 3. Zeile und 2. Spalte den Operator $(\)'_{\xi}$ bzw. in der 4. Zeile und 1. Spalte den Operator $(\)'_{\theta}$.
- Die Drillkrümmungen sind ebenfalls gemittelt — $\kappa_{x\theta} = \kappa_{\theta x}$. Die Verzerrungsdifferentialoperatormatrix \mathbf{B}_{FI} enthält statt des "0"-Gliedes in der 7. Zeile und 2. Spalte den Operator $(\)'_{\xi}$.
- Eine weitere Abweichung weist die Biegekrümmung κ_{θ} in Umfangsrichtung auf. In der 6. Zeile von \mathbf{B}_{FI} enthält statt des Differentialoperators $(\)'_{\theta}$ in der 2. Spalte einen "0"-Term, zum Glied in der 3. Spalte $(\)'_{\theta\theta}$ wird "1" addiert.

$$\mathbf{e}_{FI} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_{\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta x} \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_{\theta} \cdot R \\ \kappa_{x\theta} \cdot R \\ \kappa_{\theta x} \cdot R \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & (\)'_{\theta} & 1 \\ (\)'_{\theta} & (\)'_{\xi} & 0 \\ (\)'_{\theta} & (\)'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & (\)'_{\xi\xi} \\ 0 & 0 & (1 + (\)'_{\theta\theta}) \\ 0 & -(\)'_{\xi} & (\)'_{\xi\theta} \\ 0 & -(\)'_{\xi} & (\)'_{\xi\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{FI} \cdot \mathbf{u} \quad (A-108)$$

Zusammenfassend können folgende Feststellungen getroffen werden:

- Der geforderte Zusammenhang von Verzerrungsoperatormatrix und Gleichgewichtsoperatormatrix ist entsprechend der Konsequenzen der partiellen Integrationsregel (integralformulierungskonsistente Darstellung) ist nicht gegeben.
- Die Gesamtdarstellung nach Flügge (Grundgleichungen der Deformationsmethode) ist jedoch KORREKT, da sich die Unstimmigkeiten zufolge der fehlerhaften Definitionen der Schalenverzerrungen und der Schalenmaterialsteifigkeitsmatrix genau kompensieren und sich übereinstimmende Schalenschnittkräfte ergeben. Dies liegt in der fehlerfreien Durchführung der Flügge'schen Dickenintegration begründet.
- Obwohl sich übereinstimmende korrekte Endformulierungen ergeben, ist die Flügge'sche Vorgehensweise konzeptuell dennoch abzulehnen, aus prinzipiellen theoretischen und auch aus praktischen Gründen, weil sie zu falschen Folgerungen verleitet.

Grundgleichungen der Deformationsmethode nach Flügge

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} besteht wiederum aus drei Teilen, dem Membrananteil \mathbf{K}_n , dem Biegeanteil \mathbf{K}_m und der Koppelmatrix \mathbf{K}_{nm} , wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_n &= \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} D_x(\cdot)_{,\xi\xi} + (S_{x\theta} + K_{x\theta}/R^2)(\cdot)_{,\theta\theta} & (S_{x\theta} + K_{x\theta}/R^2 + D_v)(\cdot)_{,\xi\theta} & D_v(\cdot)_{,\xi} \\ (S_{x\theta} + D_v)(\cdot)_{,\xi\theta} & S_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\xi} + D_{\theta}(\cdot)_{,\theta\theta} & D_{\theta}(\cdot)_{,\theta} \\ D_v(\cdot)_{,\xi} & D_{\theta}(\cdot)_{,\theta} & D_{\theta} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_m &= \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2K_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\xi} & -K_{\theta}((\cdot)_{,3\theta} + (\cdot)_{,\theta}) - (2K_{x\theta} + K_v)(\cdot)_{,\xi\xi\theta} \\ 0 & -4K_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\xi\theta} & K_x(\cdot)_{,4\xi} + K_{\theta}((\cdot)_{,4\theta} + (\cdot)_{,\theta\theta}) + 2(2K_{x\theta} + K_v)(\cdot)_{,\xi\xi\theta\theta} + K_v(\cdot)_{,\xi\xi\xi} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_{nm} &= \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & -K_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\theta} & -K_x(\cdot)_{,3\xi} - K_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\theta\theta} \\ 0 & K_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\xi} & K_{\theta}((\cdot)_{,3\theta} + (\cdot)_{,\theta}) - K_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\xi\theta} \\ -K_x(\cdot)_{,3\xi} + K_{x\theta}(\cdot)_{,\xi\theta\theta} & (K_{x\theta} - K_v)(\cdot)_{,\xi\xi\theta} & \overline{K_{\theta}(1 + (\cdot)_{,\theta\theta}) - K_v(\cdot)_{,\xi\xi}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(A-109)

Die hier vorliegenden Teilmatrizen sind aufgrund der beschriebenen unterschiedlichen Definition der Verzerrungen und der Materialsteifigkeitsmatrix zum Teil abweichend von Gl. (A-98). Zum Teil liegen aufgrund der Flügge'schen Vorzeichendefinition nur Abweichungen der Vorzeichen vor.

Zur korrekten Darstellung der Submatrizen \mathbf{K}_n , \mathbf{K}_m und \mathbf{K}_{nm} müssen Umordnungen einzelner Steifigkeitsterme vorgenommen werden:

- die dick unterstrichenen Terme () müssen in die entsprechenden Glieder der MembranstEIFIGKEITSMATRIX \mathbf{K}_n
- die dünn unterstrichenen Terme () müssen in die entsprechenden Glieder der BiegestEIFIGKEITSMATRIX \mathbf{K}_m
- die strichliert unterstrichenen Terme () müssen in die entsprechenden Glieder der Koppelmatrix \mathbf{K}_{nm}

umgeordnet werden.

Weiters müssen aufgrund fehlender Steifigkeitsterme in den 2. Hauptdiagonalgliedern und den Gliedern der 3. Zeilen und 2. Spalten folgende, sich gegenseitig kompensierende Ergänzungen zur Richtigstellung der Submatrizen vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m(2,2) &= \mathbf{K}_m(2,2) - K_{x\theta}(\underline{\quad})_{\xi\xi} + 2K_{x\theta}(\underline{\quad})_{\xi\xi\theta} + K_{\theta}(\underline{\quad})_{3\theta} \\ \mathbf{K}_{nm}(2,2) &= \mathbf{K}_{nm}(2,2) + K_{x\theta}(\underline{\quad})_{\xi\xi} - 2K_{x\theta}(\underline{\quad})_{\xi\xi\theta} - K_{\theta}(\underline{\quad})_{3\theta} \end{aligned} \quad (\text{A-110a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n(3,2) &= \mathbf{K}_n(3,2) + K_{\theta}(\underline{\quad})_{\theta} \\ \mathbf{K}_m(3,2) &= \mathbf{K}_m(3,2) - K_{\theta}(\underline{\quad})_{\theta} + 2K_{x\theta}(\underline{\quad})_{\xi\xi\theta} - K_{\theta}(\underline{\quad})_{3\theta} \\ \mathbf{K}_{nm}(3,2) &= \mathbf{K}_{nm}(3,2) - 2K_{x\theta}(\underline{\quad})_{\xi\xi\theta} + K_{\theta}(\underline{\quad})_{3\theta} \end{aligned} \quad (\text{A-110b})$$

Letztendlich resultiert jedoch, wie bereits ausgeführt, eine korrekte Gesamtsteifigkeitsmatrix, die internen Unstimmigkeiten — Unsymmetrie der Teilmatrizen — kompensieren sich im Zuge der Addition der Teiloperatormatrizen $\mathbf{K} = \mathbf{K}_n + \mathbf{K}_{nm} + \mathbf{K}_m$.

A.1.8.5 Vereinfachte Schalenformulierung nach Donnell

Die Schalengleichungen nach Donnell (1934) stellen die einfachst möglichen Grundgleichungen dar. Sie gelten für flache, das heißt schwach gekrümmte, dünnwandige und transversal schubstarre Kreiszyklinderschalen.

Die Gleichgewichtsgleichungen sind in Gl. (A-111) wiedergegeben. Der Unterschied zur bisherigen Formulierung ist die Nichtberücksichtigung der Querkraft q_Θ und demzufolge der Biegemomente m_Θ und Drillmomente $m_{x\Theta}$ beim Gleichgewicht in die Umfangsrichtung zu nennen (siehe Bild A-6), sie sind in Gl. (A-111) grau hinterlegt. Die Koppelung von Scheiben- und Plattenschnittkräften erfolgt alleinig durch die radiale Kraftkomponente, die aus der Umlenkung der Umfangsnormalkraft n_Θ entsteht (eingerahmt gekennzeichnet in der 3. Zeile und 2. Spalte von $\tilde{\mathbf{B}}_D$ in Gl. (A-111)).

$$\tilde{\mathbf{B}}_D^T \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\Theta} & ()'_{\xi} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & ()'_{\xi\xi} & ()'_{\Theta\Theta} & 2()'_{\xi\Theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ m_x/R \\ m_\Theta/R \\ m_{x\Theta}/R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta \\ p_n \end{bmatrix} = -\mathbf{p} \quad (\text{A-111})$$

Die Materialgleichungen bleiben unverändert und stimmen mit jenen der transversal schubstarr und schwach gekrümmten Schale überein (siehe (A-102)).

Bei den Verzerrungen sind die Membranverzerrungen exakt wiedergegeben. Die Biegekrümmungen sind in Form der Plattenbiegekrümmungen berücksichtigt. Bei der Bestimmung der Verzerrungen geht bei den Biege- und Drillkrümmungstermen nur die Radialverschiebung W ein, die Anteile, die durch Mitwirkung der Umfangsverschiebung V entstehen, werden approximativ vernachlässigt. In \mathbf{B}_D fehlen die Differentialoperatoren in der 2. Spalte in Zeile 5 bzw. 6 (grau hinterlegt gekennzeichnet in Gl. (A-112)). Insgesamt bedeutet dies, daß zur Tragwirkung der Membranschale die Plattentragwirkung superponiert ist. Die Koppelung von Scheiben- und Plattenverzerrungen erfolgt nur durch die Berücksichtigung der radialen Aufweitung, die aus der Tangentialverschiebung entsteht (eingerahmt gekennzeichnet in der 2. Zeile und 3. Spalte von \mathbf{B} in Gl. (A-112)).

$$\mathbf{B}_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_\Theta \cdot R \\ \kappa_{x\Theta} \cdot R \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ & ()'_{\Theta} & \boxed{1} \\ ()'_{\Theta} & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & - ()'_{\xi\xi} \\ 0 & \mathbf{0} & - ()'_{\Theta\Theta} \\ 0 & \mathbf{0} & - 2()'_{\xi\Theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{B}_D \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A-112})$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix ist wiederum getrennt für den Membrananteil \mathbf{K}_n und Biegeanteil \mathbf{K}_m in Gl. (A-113a) und Gl. (A-113b) dargestellt:

$$\mathbf{K}_n = \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} D_x(\cdot)'_{\xi\xi} + S_{x\theta}(\cdot)'_{\theta\theta} & (S_{x\theta} + D_v)(\cdot)'_{\xi\theta} & D_v(\cdot)'_{\xi} \\ (S_{x\theta} + D_v)'_{\xi\theta} & S_{x\theta}(\cdot)'_{\xi\xi} + D_\theta(\cdot)'_{\theta\theta} & D_\theta(\cdot)'_{\theta} \\ -D_v(\cdot)'_{\xi} & -D_\theta(\cdot)'_{\theta} & -D_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{A-113a})$$

$$\mathbf{K}_m = \frac{1}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_x(\cdot)'_{4\xi} + (2K_{x\theta} + K_v)'_{\xi\xi\theta\theta} + K_\theta(\cdot)'_{4\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{A-113b})$$

Zusammenfassend können folgende Feststellungen getroffen werden:

- Kontrolliert man den Zusammenhang der Verzerrungsoperatormatrix und der Gleichgewichtsoperatormatrix, so zeigt sich hier direkt, daß hier die geforderte Integralformulierungskonsistenz erfüllt wird.
- Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix ist getrennt für den Membran- und Biegeanteil dargestellt. Der Membrananteil \mathbf{K}_n in Gl. (A-113a) stimmt mit derjenigen der schwach gekrümmten Kreiszyinderschale mit Normalenhypothese überein (siehe Gl. (A-104a)).
- Der Biegeanteil \mathbf{K}_m in Gl. (A-113b) ist nur mit der Radialverschiebung W verbunden und degeneriert für isotropes Material zum bekannten Steifigkeitsoperator der Plattenbiegung $\nabla\nabla W$ (3. Hauptdiagonalglied von \mathbf{K}_m).
- Durch die einfache und effektive Formulierung wird das Entstehen der Gesamtordnung der resultierenden Differentialgleichung transparent. Die Deformationsgleichungen der Membran ergeben für sich alleine betrachtet eine resultierende partielle Differentialgleichung 4. Ordnung. Der Membranschale ist die Plattenbiegung superponiert, welche durch eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung wiedergegeben wird. Somit ergibt sich für die Kreiszyinderschale eine resultierende partielle Differentialgleichung 8. Ordnung.

A.1.9 Semi-analytische Lösung der Schalengrundgleichungen (Deformationsmethode)

A.1.9.1 Berechnungsverfahren

Basierend auf der mechanischen Formulierung der drei Grundgleichungen in Differential- oder Integralform ergeben sich die in Tab. A-1 dargestellten Berechnungsverfahren für kontinuierliche mechanische Systeme.

Die für Näherungslösungen erforderliche Diskretisierung, die punktweise oder gebietsweise erfolgt, bedingt eine Zuordnung zu Differenzenverfahren oder Finite Elemente Methoden.

Diskretisierung mittels Reihenentwicklungen

Ausgehend von der Darstellung der Grundgleichungen in Differentialform kann eine gebietsweise Lösung mittels Reihenentwicklung vorgenommen werden. Dabei wird die allgemeine Anwendbarkeit eingeschränkt, dies hat spezielle Randbedingungen zur Folge und fordert überdies einen einheitlichen Aufbau der Schale.

Fourier-Doppelreihenentwicklung

Die Fourier-Doppelreihenentwicklung in Meridian- und Umfangsrichtung hat aufgrund der Reihenentwicklung spezielle Randbedingungen in Meridianrichtung zur Folge. Es können nur partikuläre Lösungen ermittelt werden. In Umfangsrichtung entspricht die Reihenentwicklung der Periodizität der Rotationsschale (immer wiederkehrende Meridiane). Ein einheitlicher Aufbau der Schale in Meridian- und Umfangsrichtung ist zur Anwendung dieses Lösungsverfahrens erforderlich. Es verbleiben algebraische Gleichungssysteme für die Kombinationen der Glieder m und n der Doppelreihenentwicklung.

Fourier-Reihenentwicklung in Meridianrichtung

Dadurch können ein beliebiger Aufbau und beliebige Randbedingungen in Umfangsrichtung berücksichtigt werden. An den Rändern in Meridianrichtung sind die speziellen Randbedingungen durch die Reihenentwicklung als ideale, unverformbare Querscheiben anzusehen (perfekte Endquerschottbedingungen = Antimetriebedingung). Diese Diskretisierungsvariante ist für die Berechnung prismatischer Faltwerksstrukturen mit gekrümmten Elementen (Tonnenschalensegmente) vorteilhaft. In Umfangsrichtung erfolgt eine analytische Lösung der Kreiszyinderschalengleichungen und wird klassischerweise als Tonnenschalenlösung bezeichnet.

Fourier-Reihenentwicklung in Umfangsrichtung

Dadurch können ein beliebiger Aufbau und beliebige Randbedingungen in Meridianrichtung berücksichtigt werden. In Umfangsrichtung muß nach wie vor ein einheitlicher Aufbau der Schale gegeben sein, meridionale Versteifungselemente können nicht berücksichtigt werden. Diese Diskretisierungsvariante ist für die Berechnung von kreisrunden kaminartigen bzw. behälterartigen Konstruktionen vorteilhaft. In Meridianrichtung erfolgt nun die analytische Lösung der Kreiszyinderschalengleichungen.

Tab. A-1 Berechnungsverfahren für kontinuierliche mechanische Systeme

Kontinuums- mechanische Grundgleichungen			Systemcharakteristik		
			diskretisiert		kontinuierlich
			approximativ		exakt
Kine- matik	Konsti- tution	Kinetik	punktweise 1D/ 2D/ 3D	gebietsweise $\Omega, \Delta\Omega$ 1D/ 2D/ 3D	
D	D	D	FDM	Reihen- lösungen	analytische Lösungen — Baustatische Lösungs- methoden
J	D	D	FDEM	FEM (kraft- formuliert)	
D	D	J	FDEM	FEM (verschiebungs- formuliert)	

D Differentialformulierung der jeweiligen Grundgleichung
 J Integralformulierung der jeweiligen Grundgleichung

FDM Finite Differenzen Methode
 FDEM Finite Differenzen Energie Methode
 FEM Finite Elemente Methode

A.1.9.2 Aufbereitung der Grundgleichungen der schwach gekrümmten Kreiszyinderschale mittels Reihenentwicklung in Umfangsrichtung

Durch den Lösungsansatz in Umfangsrichtung mittels Reihenentwicklung wird das 2D-Problem auf ein verbleibendes 1D-Problem reduziert. Statt des ursprünglichen partiellen Differentialgleichungssystems mit Ableitungen nach ξ und Θ verbleibt nach Übergang auf eine Verformungsunbekannte eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und Ableitungen nach ξ . Dabei kommen nun Ableitungen 8., 6., 4., 2. und 0. Stufe vor.

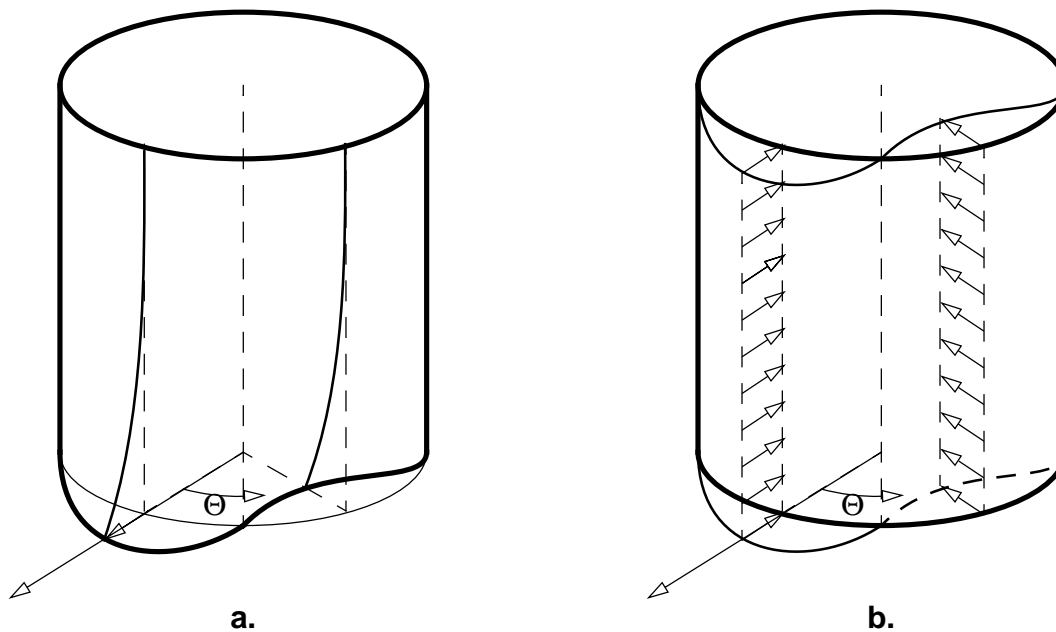


Bild A-7 Reihenentwicklung in Umfangsrichtung —
a. Verschiebungen und b. Belastungen

Für die Verschiebungen, Belastungen und Schnittkräfte (Membrankräfte, Biegemomente und Querkräfte) werden folgende Ansätze entsprechend einer Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung vorgenommen.

$$\begin{aligned}
 U &= \sum U_m \cos m\Theta & p_x &= \sum p_{x,m} \cos m\Theta \\
 V &= \sum V_m \sin m\Theta & p_n &= \sum p_{n,m} \cos m\Theta \\
 W &= \sum W_m \cos m\Theta & p_\Theta &= \sum p_{\Theta,m} \sin m\Theta
 \end{aligned} \tag{A-114}$$

$$\begin{aligned}
 n_x &= \sum n_{x,m} \cos m\Theta & m_x &= \sum m_{x,m} \cos m\Theta & q_x &= \sum q_{x,m} \cos m\Theta \\
 n_\Theta &= \sum n_{\Theta,m} \cos m\Theta & m_\Theta &= \sum m_{\Theta,m} \cos m\Theta & q_\Theta &= \sum q_{\Theta,m} \cos m\Theta \\
 n_{x\Theta} &= \sum n_{x\Theta,m} \sin m\Theta & m_{x\Theta} &= \sum m_{x\Theta,m} \sin m\Theta
 \end{aligned} \tag{A-115}$$

Gleichgewichts- und Verzerrungsgleichungen für ein Reihenglied m

In den Gleichgewichtsgleichungen der transversal schubstarken und schwach gekrümmten Kreiszylinderschale und den Verzerrungsgleichungen werden die Ableitungen nach der Umfangsordinate $(\cdot)'_{\Theta}$ durch das Glied m der Reihenentwicklung ersetzt.

$$\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} \cdot \begin{bmatrix} (\cdot)'_{\xi} & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & (\cdot)'_{\xi} & 0 & -m & (\cdot)'_{\xi} \\ 0 & -1 & 0 & (\cdot)'_{\xi\xi} & -m^2 & 2m(\cdot)'_{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_{\Theta} \\ n_{x\Theta} \\ m_x/R \\ m_{\Theta}/R \\ m_{x\Theta}/R \end{bmatrix}_m = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_{\Theta} \\ p_n \end{bmatrix}_m = -\mathbf{p} \quad (\text{A-116})$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{\Theta} \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_{\Theta} \cdot R \\ \kappa_{x\Theta} \cdot R \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \cdot \begin{bmatrix} (\cdot)'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ -m & (\cdot)'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & -(\cdot)'_{\xi\xi} \\ 0 & m & m^2 \\ 0 & (\cdot)'_{\xi} & 2m(\cdot)'_{\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{A-117})$$

Beschreibung der Materialsteifigkeitsmatrix mithilfe dimensionsloser Steifigkeitsparameterparameter

In Gl. (A-119a) erfolgt die Darstellung der Schalensteifigkeitsmatrix mit dimensionslosen Steifigkeitsparametern. Eine übersichtliche Darstellung erfolgt in Tab. A-2. Als Bezugswerte sind dabei im Hinblick auf die spätere Herleitung von ingenieurmässigen Schalenformulierungen in Kap. A.1.10 die Dehnsteifigkeit D_x in axialer Richtung und die Umfangsbiegesteifigkeit K_{Θ} .

Die Parameter ν , ρ und η stellen das Verhältnis der Membransteifigkeiten dar. ν repräsentiert das Verhältnis der Querkontraktionssteifigkeit, ρ gibt das Verhältnis der Umfangsdehnsteifigkeit und η das Verhältnis von Schubsteifigkeit zu Dehnsteifigkeit an.

Die einzelnen Biege- und Drillsteifigkeiten sind auf die Umfangsbiegesteifigkeit bezogen. Das Verhältnis von Umfangsbiegesteifigkeit K_{Θ} zu axialer Dehnsteifigkeit D_x wird durch den Parameter k erfaßt.

$$k = \frac{K_{\Theta}}{D_x \cdot R^2} \quad (\text{A-118})$$

Das Verhältnis der Biege- und Drillsteifigkeiten untereinander kann mit von den Membransteifigkeiten unabhängigen dimensionslosen Parametern beschrieben werden. Es können hier eigene Schub- und Dehn- bzw. Querkontraktionssteifigkeiten angegeben werden.

Tab. A-2 Definition dimensionsloser Steifigkeitsparameter

Bezugssteifigkeit	Steifigkeit	dimensionsloser Steifigkeitsbeiwert	Steifigkeitsverhältnis
axiale Dehnsteifigkeit D_x	Umfangsdehnsteifigkeit	ρ	D_Θ/D_x
	Querdehnsteifigkeit	ν	D_ν/D_x
	Membranschubsteifigkeit	η	$S_{x\Theta}/D_x$
Umfangsbiegesteifigkeit K_Θ	axiale Biegesteifigkeit	λ	K_x/K_Θ
	Querkontraktionsbiegesteifigkeit	μ	K_ν/K_Θ
	Drillsteifigkeit	ζ	x_Θ/K_Θ

Die Materialsteifigkeitsmatrix ergibt sich bei Verwendung dieser dimensionslosen Parameter wie in Gl. (A-119a) folgt. Dabei bedeutet der Parameter k die in dimensionsloser Form auf die axiale Biegesteifigkeit D_x bezogene Umfangsbiegesteifigkeit K_Θ der Kreiszyinderschale.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_x & D_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_\nu & D_\Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{x\Theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_x/R^2 & K_\nu/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\nu/R^2 & K_\Theta/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 \end{bmatrix} = D_x \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda k & \mu k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta k \end{bmatrix} \quad (\text{A-119a})$$

$$k = \frac{K_\Theta}{D_x \cdot R^2} \quad (\text{A-119b})$$

Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix

Der Membrananteil und der Biegeanteil der Steifigkeitsoperatormatrix sind getrennt in Gl. (A-120a) und Gl. (A-120b) für ein Reihenglied m dargestellt.

$$K_n = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} (\cdot)_{,\xi\xi} - m^2 \eta & m(\eta + \nu)(\cdot)_{,\xi\Theta} & \nu(\cdot)_{,\xi} \\ -m(\eta + \nu)(\cdot)_{,\xi} & \eta(\cdot)_{,\xi\xi} - m^2 \rho & -m\rho \\ -\nu(\cdot)_{,\xi} & -m\rho & -\rho \end{bmatrix} \quad (A-120a)$$

$$K_m = \frac{K_\Theta}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta(\cdot)_{,\xi\xi} - m^2 & -m^3 + m(2\zeta + \mu)(\cdot)_{,\xi\xi} \\ 0 & -m^3 + m(2\zeta + \mu)(\cdot)_{,\xi\xi} & -\lambda(\cdot)_{,\xi\xi} - m^4 + 2m^2(2\zeta + \mu)(\cdot)_{,\xi\xi} \end{bmatrix} \quad (A-120b)$$

Differentialgleichung für ein Reihenglied m

Die resultierende Differentialgleichung in Gl. (A-121) der orthotropen Kreiszyinderschale ist, wie bereits erwähnt eine Differentialgleichung 8. Ordnung.

$$DGL = \det(K) \quad (A-121)$$

$$a_8 \cdot (\cdot)_{,\xi\xi\xi\xi} + a_6 \cdot (\cdot)_{,\xi\xi} + a_4 \cdot (\cdot)_{,\xi\xi} + a_2 \cdot (\cdot)_{,\xi\xi} + a_0 = 0$$

Die Koeffizienten a8 bis a0 der Differentialgleichung in Gl. (A-122a) bis Gl. (A-122e) haben alternierend negative Vorzeichen.

$$a_8 = \lambda(\eta + \zeta k) \quad (A-122a)$$

$$a_6 = -m^2 [\lambda(\rho - \nu^2 - 2\eta\nu) + 2\eta(2\zeta + \mu) + k(\lambda(1 + \zeta\eta) - \mu(2\zeta - \mu))] \quad (A-122b)$$

$$a_4 = (\rho - \nu^2) \left(\frac{\eta}{k} + (\zeta + 2m^2(m^2 - 1)(2\zeta + \mu)) \right) + 2m^2(m^2 - 2)\eta\nu(2\zeta + \mu) + m^4\eta(1 - \lambda\rho) + km^4(\zeta(1 - 2\eta\mu) + \eta(\lambda - \mu^2)) \quad (A-122c)$$

$$a_2 = -m^2(\rho(1 + \zeta\eta) + \nu^2 - 2m^2((\rho - \nu^2) + \eta(\rho(2\zeta + \mu) - \nu))) - km^6\zeta\eta \quad (A-122d)$$

$$a_0 = \eta\rho m^4(m^2 - 1)^2 \quad (A-122e)$$

Für den isotropen Fall — $\rho = 1$, $\eta = (1 + \nu)/2$, $\lambda = 1$, $\zeta = \eta$ und $\mu = \nu$ vereinfachen sich die Koeffizienten der Differentialgleichung.

Axialsymmetrie

Im Falle der Axialsymmetrie — Reihenglied $m = 0$ — werden die Koeffizienten a_0 , a_2 und a_6 zu Null, die entstehende Differentialgleichung 8. Ordnung mit Ableitungen 8., 6. und 4. Stufe reduziert sich auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung in Gl. (A-123b).

$$a_8 = \lambda(\eta + \zeta k) \tag{A-123a}$$

$$a_4 = (\rho - \nu^2)(\eta + \zeta k)/k$$

$$\left[(\)_{,4\xi} + \frac{(\rho - \nu^2)}{\lambda k} \right] \cdot W = 0 \tag{A-123b}$$

Für isotropes Material ($\rho = 1$, $\eta = (1 + \nu)/2$, $\lambda = 1$ und $k = t^2/R^2$) folgt die Differentialgleichung in Gl. (A-124)

$$\left[(\)_{,4\xi} + (1 - \nu^2) \left(\frac{R}{t} \right)^2 \right] \cdot W = 0 \tag{A-124}$$

A.1.10 Ingenieurmäßige Schalenformulierungen

Ingenieurmäßige Überlegungen bezüglich der Steifigkeitsannahmen ermöglichen es, die Ordnung der Differentialgleichung zu reduzieren. Wie im Fall der Axialsymmetrie wird eine Differentialgleichung 4. Ordnung angestrebt. Aus baustatischer Sicht ist die Reduktion sinnvoll, da dieser Differentialgleichungstyp bei vielen baustatischen Problemstellungen auftritt und somit die Lösung dem Praktiker vertraut ist. Weiters gelingt es, die Ergebnisse der Schalenrechnung an einem Analogiemodell, dem elastisch gebetteten Balken zu interpretieren.

Traglastüberlegungen führen zum einfachst möglichen Lastabtragungsmechanismus. Dabei werden nur jene Schalensteifigkeiten berücksichtigt, die vorhanden sein müssen, um die realistische Lastabtragung zu erfassen.

A.1.10.1 Grundannahmen für Schalensteifigkeiten

Im folgenden wird in Tab. A-3 eine Übersicht über technisch sinnvolle und mögliche Steifigkeitsannahmen gegeben, die letztendlich alle auf eine DGL 4. Ordnung führen.

$$a_4 \cdot (\)_{,4\xi} + a_2 \cdot (\)_{,\xi\xi} + a_0 \cdot (\) = 0 \quad (\text{A-125})$$

Basiswerte der Steifigkeiten sind die axiale Dehnsteifigkeit D_x und die Biegesteifigkeit in Umfangsrichtung K_Θ . Sie nehmen stets einen reellen Wert an. Die ingenieurmäßigen Schalenformulierungen gehen somit von der mehr oder weniger real abgebildeten Membranschale aus, von den Biegewirkungen ist zumindest jene in Umfangsrichtung berücksichtigt.

A.1.10.2 Formulierungsvarianten

Grundlage für eine Vielzahl hergeleiteter ingenieurmäßiger Kreiszyinderschalenformulierungen bilden die Schalengleichungen von Flügge. Die Zuordnung verschiedener Arbeiten erfolgt entsprechend den getroffenen Steifigkeitsannahmen zu Varianten 1 bis 4. Aufgrund der aufgezeigten internen Unstimmigkeiten der Flügge'schen Verzerrungsdefinition kann es bei davon ausgehenden ingenieurmäßigen Schalenformulierungen dementsprechend zu Abweichungen zu den im folgenden dargestellten korrekten Differentialgleichungen kommen.

In Tab. A-3 werden die entstehenden Differentialgleichungen auf Basis der zuvor erarbeiteten korrekten Schalenformulierung dargestellt. Zum Vergleich werden in Kap. A.1.10.3 die Differentialgleichungen auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen und in Kap. A.1.10.4 auf Basis der Donnell'schen KZS-Grundgleichungen hergeleitet.

Konzeptuelle Ordnung der Formulierungsvarianten

Konzeptuell sind die Formulierungsvarianten 1 bis 3 zueinander gehörig. Ausgangspunkt ist die Basisvariante 1, sie weist das größte Maß an getroffenen Steifigkeitsannahmen auf. Es werden die Umfangsdehn- und die Membranschubsteifigkeit mit unendlich hohen Grenzsteifigkeiten angenommen. Von den Biegesteifigkeiten wird nur die Umfangsbiegesteifigkeit berücksichtigt. Variante 2 und 3 ergeben sich durch eine zunehmend realere Berücksichtigung der Membransteifigkeiten.

Eine gänzlich andere Formulierungsvariante stellt Variante 4 dar. Zwar gelten für die Membransteifigkeiten die selben Annahmen wie bei Variante 1, es werden aber alle Biege- und Drillsteifigkeiten der Kreiszyinderschale berücksichtigt.

Historische Bezeichnungen der Formulierungsvarianten

Variante 1 und 2 (2') wird als **Semi-Membrantheorie** der Kreiszyinderschale bezeichnet. Die Varianten 1 und 2 bzw. 2' wurden z.B. von Greiner (1972, 1980) bzw. die Variante 1 von Öry (1984) verwendet. Eine konsistente Ableitung von Variante 2' stellt im Gegensatz zu Greiner (1980) Guggenberger (1987) dar.

Variante 3, die als **vollständige Semi-Membrantheorie** der Kreiszyinderschale zu bezeichnen ist, wird von Guggenberger (1987) auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen hergeleitet. Dabei wird das Membrantragverhalten exakt erfaßt.

Variante 4 wird als **Halb-Biegetheorie** der Kreiszyinderschale bezeichnet. Diese Formulierungsvariante stammt von Schardt u. Steingäß (1970) bzw. Steingäß (1972).

Variante 1

Die Koeffizienten der DGL 8. Ordnung der transversal schubstarren und schwach gekrümmten Kreiszyinderschale sind in Gl. (A-122c) für ein Reihenglied m dargestellt. Aus der Zusammensetzung der Koeffizienten wird offensichtlich, daß durch Vernachlässigen der axialen Biegesteifigkeit und der Drillsteifigkeit — $\lambda = 0$ und $\zeta = 0$ — a_8 und a_6 zu Null werden. Dies stellt die klassischen Grundannahmen ingenieurmäßiger Schalenformulierungen dar. Werden weiters die Membranschubsteifigkeit und die Umfangsdehnsteifigkeit unendlich hoch gesetzt ($\eta \rightarrow \infty$ und $\rho \rightarrow \infty$), werden die Membranschubverzerrung und die Umfangsdehnung zu Null ($\gamma_{x\Theta} = 0$ und $\varepsilon_{\Theta} = 0$). Dies ist die Variante 1 in Tab. A-3, sie liefert die einfachste DGL der Kreiszyinderschale und stellt die unterste Stufe der ingenieurmäßigen Lösung dar.

Varianten 2 und 3

Aufbauend auf Grundformulierungsvariante 1 werden die Membransteifigkeiten $S_{x\Theta}$ und D_{Θ} (D_v) sukzessive mit ihren realen Werten berücksichtigt. Zuerst wird die Schubsteifigkeit, danach die Schubsteifigkeit und Dehnsteifigkeit mit ihren reellen Werten berücksichtigt. Dies entspricht Variante 2 und Variante 3 in Tab. A-3. Aus Variante 2 folgt als Zwischenvariante bei Berücksichtigung der Drillsteifigkeit die Variante 2'.

Variante 4

Gänzlich konträre Annahmen sind die Basis für Variante 4. Wie bei Variante 1 werden die Membranschubsteifigkeit und die Umfangsdehnsteifigkeit unendlich hoch gesetzt, alle Biege- und Drillsteifigkeiten aber mit ihren reellen Werten berücksichtigt.

Übereinstimmung verschiedener Formulierungsvarianten durch zusätzliche Grenzsteifigkeitsannahmen

Die Varianten 2, 2' und 3 führen durch entsprechende Annahmen der Grenzsteifigkeiten auf Variante 1. In Variante 2 wird $\eta \rightarrow \infty$ gesetzt, ebenso in Variante 2' und zusätzlich wird $\zeta = 0$ gesetzt. Variante 3 führt unter der Annahme von $\rho \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow \infty$ und $\nu = 0$ auf Variante 1.

Aus Variante 4 folgt durch die Vernachlässigung der axialen Biege- und der Drillsteifigkeit ($\lambda = \zeta = \mu = 0$) Variante 1.

Variante 2' unter der Annahme $\eta \rightarrow \infty$ und Variante 4 unter der Annahme $\lambda = \mu = 0$ ergeben ebenfalls eine vollständig übereinstimmende Formulierungsvariante.

Detaillierte Herleitung der resultierenden Differentialgleichungen

Die detaillierte Herleitung der Differentialgleichungen erfolgt für Variante 1 (klassisches Semi-Membrantheorie-Modell) in Kap. A.1.11, für Variante 2 (Membranschubsteifigkeits-erweitertes Semi-Membrantheorie-Modell) in Kap. A.1.12, für Variante 2' (um die Drillsteifigkeit erweitertes klassisches Semi-Membrantheorie-Modell) in Kap. A.1.13, für Variante 3 (vollständiges Semi-Membrantheorie-Modell) in Kap. A.1.14 und für Variante 4 (Halb-Biegetheorie-Modell) in Kap. A.1.15.

Dabei werden die resultierenden Differentialgleichungen sowohl auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen als auch auf Basis der Flügge'schen KZS-Gleichungen hergeleitet.

Tab. A-3 DGL—Koeffizienten ingenieurmäßiger Schalenformulierungen auf Basis korrekter Schalenrundgleichungen

Variante	Membransteifigkeiten			Biege- u. Drillsteifigkeiten			Koeffizienten der Differentialgleichung			Anmerkungen
	$\frac{S_{x\Theta}}{D_x}$	$\frac{D_\Theta}{D_x}$	$\frac{D_v}{D_x}$	$\frac{K_x}{K_\Theta}$	$\frac{K_{x\Theta}}{K_\Theta}$	$\frac{K_v}{K_\Theta}$	a4	a2	a0	
1	∞	∞	0	0	0	0	1	0		Greiner (1980) Öty (1984)
2	η	∞	0	0	0	0	1	$-km^2 \frac{(m^2 - 1)^2}{\eta}$		Greiner (1980)
2'	η	∞	0	0	ζ	0	$1 + \frac{\zeta}{\eta}(2m^2 - 1)^2$	$-km^2 \left[\frac{(m^2 - 1)^2}{\eta} + \zeta(2m^2 - 1)^2 \right]$		Greiner (1980) Guggenberger (1987)
3	η	ρ	ν	0	0	0	$\frac{\rho - \nu^2 + km^4}{\rho}$	$-km^2 \left[\frac{\rho - \nu^2}{\rho\eta}(m^2 - 1)^2 - \frac{2\nu m^2}{\rho}(m^2 - 1) \right]$		Guggenberger (1987)
4	∞	∞	0	λ	ζ	μ	$1 + \lambda km^4$	$-km^2 [\zeta(2m^2 - 1)^2 + 2\mu m^2(m^2 - 1)]$		Steingäß (1972)

A.1.10.3 Formulierungsvarianten auf Basis der Flügge'schen KZS-Gleichungen

In Tab. A-6 sind die entstehenden Differentialgleichungskoeffizienten auf Basis der Flügge'schen KZS-Gleichungen dargestellt. Die Abweichungen zu den DGL-Koeffizienten der korrekten Darstellung in Tab. A-3 sind gekennzeichnet (grau hinterlegt).

Zugrundeliegende Schalensteifigkeiten

Für den Vergleich in Tab. A-6 werden die Steifigkeiten zur Bestimmung der dimensionslosen Steifigkeitsparameter analog Tab. A-3 verwendet. In den Herleitungen von Greiner (1980) bzw. Steingäß (1972) werden folgende Steifigkeiten verwendet:

In den **Varianten 1 bis 2'** nach Greiner (1980) werden die axiale Dehnsteifigkeit, die Membranschubsteifigkeit und die Umfangsbiegesteifigkeit folgend mithilfe von E-Modul, Schubmodul G und Querkontraktionsziffer μ (Biegequerkontraktionsziffer) definiert.

$$D_x = Et \quad (A-126a)$$

$$S_{x\theta} = Gt \quad (A-126b)$$

$$K_\theta = Et^3/12(1 - \mu^2) \quad (A-126c)$$

In **Variante 4** nach Steingäß (1972) werden die axiale Dehnsteifigkeit und die Bieg- bzw. Drillsteifigkeiten ebenfalls mithilfe von E-Modul, Schubmodul G und Querkontraktionsziffer μ definiert.

$$D_x = Et \quad (A-127a)$$

$$K_x = K_\theta = Et^3/12(1 - \mu^2) \quad (A-127b)$$

$$K_{x\theta} = Gt^3/12$$

Variante 1

Die Koeffizienten von Variante 1 sind ident mit jenen der korrekten Darstellung in Tab. A-3. Die Abweichungen der Flügge'schen Definition der Biegekrümmung in Umfangsrichtung und Drillkrümmung gehen aufgrund der getroffenen Steifigkeitsannahmen ($\rho \rightarrow \infty$ und $\zeta = 0$) nicht ein.

Variante 2

Die Koeffizienten von Variante 2 sind ebenfalls ident mit jenen der korrekten Darstellung in Tab. A-3. Die Abweichungen der Flügge'schen Definition der Biegekrümmung in Umfangsrichtung und Drillkrümmung gehen wiederum aufgrund der getroffenen Steifigkeitsannahmen ($\rho \rightarrow \infty$ und $\zeta = 0$) nicht ein.

Variante 2' nach Greiner

Die Koeffizienten von Variante 2' stimmen nicht mehr mit jenen der korrekten Darstellung in Tab. A-3 überein. Grund dafür ist die von Greiner (1980) approximative Berücksichtigung der Drillsteifigkeit. Diese wird aufgrund einer energetischen Betrachtung zufolge der entstehenden Drillkrümmungen quasi als zusätzliches Steifigkeitsglied im nachhinein in die Differentialgleichung von Variante 2 implementiert. Es erfolgt dabei also keine konsistente Ableitung der resultierenden DGL auf Basis der Schalengrundgleichungen und unter Annahme von Grenzsteifigkeiten.

Die Abweichungen ergeben sich bei Koeffizient a_4 und a_2 . In Tab. A-4 sind diese Koeffizienten jenen der korrekten Darstellung nach Tab. A-3 gegenübergestellt. Für Koeffizient a_2 konvergieren die entstehenden Abweichungen bei steigendem Reihenglied m gegen Null. Dies trifft bei Koeffizient a_4 der DGL nicht zu, hier wird die Abweichung bei steigendem Reihenglied m immer größer (!). Grund dafür ist die bereits erwähnte approximative Berücksichtigung der Drillsteifigkeit.

Variante 2' — konsistente Berücksichtigung der Drillsteifigkeit

Die konsistente Formulierungsvariante für Variante 2' wird im weiteren in Kap. A.1.13.1 detailliert auf Basis der korrekten KZS-Grundgleichungen aufbereitet. Der Vollständigkeit halber erfolgt zusätzlich in Kap. A.1.13.2 die konsistente Herleitung die resultierenden DGL auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen.

Die Abweichungen der Koeffizienten a_4 und a_2 in Kap. Tab. A-4 konvergieren bei steigendem Reihenglied m gegen Null.

Tab. A-4 Variante 2' — Abweichungen der DGL-Koeffizienten

	Greiner (1980) / Basis— Flügge'sche KZS-Gleichungen	konsistente Herleitung Basis— Flügge'sche KZS-Gleichungen	Guggenberger (1987) / Basis — Korrekte Darstellung der KZS-Gl.
a_4	1	$1 + k \frac{\zeta}{\eta} (2m^2 - 2)(2m^2 - 1)$	$1 + \frac{\zeta}{\eta} (2m^2 - 1)^2$
a_2	$-km^2 \cdot \left[\frac{(m^2 - 1)^2}{\eta} + 4\zeta m^2 (m^2 - 1) \right]$	$- km^2 \cdot \left[\frac{(m^2 - 1)^2}{\eta} + k\zeta m^2 (2m^2 - 2)(2m^2 - 1) \right]$	$-km^2 \cdot \left[\frac{(m^2 - 1)^2}{\eta} + \zeta (2m^2 - 1)^2 \right]$

Variante 3

Diese Formulierungsvariante stammt von Guggenberger (1987). Die Herleitungen auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen werden detailliert in Kap. A.1.14.2 aufbereitet. Aufgrund der Flügge'schen Definition der Verzerrungskomponenten — im speziellen der Biegekrümmung κ_{Θ} — folgt eine unsymmetrische Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} (!). Eine mechanisch einwandfreie Formulierungsvariante ist somit nicht gegeben. Die Koeffizienten der DGL werden für Variante 3 deshalb in Tab. A-6 nicht dargestellt

Variante 4

Aufgrund der von Steingaß (1972) verwendeten Flügge'schen Verzerrungsdefinition ergibt sich ein Unterschied für Koeffizient a_2 der resultierenden DGL. Die auftretenden Abweichungen konvergieren bei steigendem Reihenglied m gegen Null.

Tab. A-5 Variante 4— Abweichungen der DGL-Koeffizienten

Basis— Flügge'sche KZS-Grundgleichungen	Basis — Korrekte Darstellung der KZS-Grundgleichungen
$a_2 = -km^2 [\zeta(2m^2 - 2)(2m^2 - 1) + 2\mu m^2(m^2 - 1)]$	$a_2 = -km^2 [\zeta(2m^2 - 1)^2 + 2\mu m^2(m^2 - 1)]$

Tab. A-6 DGL-Koeffizienten ingenieurmäßiger Schalenformulierungen auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen

Variante	Membransteifigkeiten		Biege- u. Drillsteifigkeiten		Koeffizienten der Differentialgleichung			Anmerkungen
	$\frac{S_{x\theta}}{D_x}$	$\frac{D_\theta}{D_x}$	$\frac{D_v}{D_x}$	$\frac{K_x}{K_\theta}$	$\frac{K_{x\theta}}{K_\theta}$	$\frac{K_v}{K_\theta}$	a0	
1	∞	∞	0	0	0	0	0	Greiner (1980) Öry (1984)
2	η	∞	0	0	0	0	$-km^2 \frac{(m^2 - 1)^2}{\eta}$	Greiner (1980)
2'	η	∞	0	0	ζ	0	$-km^2 \left[\frac{(m^2 - 1)^2}{\eta} + 4\zeta m^2 (m^2 - 1) \right]$	Greiner (1980)
2''	η	∞	0	0	ζ	0	$- km^2 \cdot \left[\frac{(m^2 - 1)^2}{\eta} + k\zeta m^2 (2m^2 - 2)(2m^2 - 1) \right]$	Guggenberger (1987)
3	η	ρ	ν	0	0	0	unsymmetrische Steifigkeitsoperatormatrix (!)	Guggenberger (1987)
4	∞	∞	0	λ	ζ	μ	$-km^2 \cdot [\zeta(2m^2 - 2)(2m^2 - 1) + 2\mu m^2 (m^2 - 1)]$	Steingaß (1972)

A.1.10.4 Formulierungsvarianten auf Basis der vereinfachten Donnell'sche KZS-Gleichungen

Zur Überprüfung wird unter Voraussetzung der getroffenen Steifigkeitsannahmen die vereinfachte Schalenformulierung nach Donnell verwendet. Die Koeffizienten der DGL sind nun etwas einfacher, geben aber eine gute Vergleichsmöglichkeit. Durch die modulartige Berücksichtigung der Biege Wirkung der Schale als Plattenbiege Wirkung folgen etwas einfachere Ableitungen der Biegegrößen. Somit vereinfacht sich der Term $m^2 - 1$.

$$m^2 - 1 \rightarrow m^2 \tag{A-128}$$

Es können nun die Potenzen von m und die Steifigkeitsparameter in den Koeffizienten der DGL überprüft werden. Dies gilt sowohl für die auf der korrekte Darstellung der Schalen Grundgleichungen als auch für jene auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen hergeleiteten DGL-Koeffizienten.

Tab. A-7 DGL—Koeffizienten ingenieurmäßiger Schalenformulierungen auf Basis der Donnell'schen KZS-Grundgleichungen

Variante	Membransteifigkeiten			Biege- u. Drillsteifigkeiten			Koeffizienten der Differentialgleichung		
	$\frac{S_{x\Theta}}{D_x}$	$\frac{D_\Theta}{D_x}$	$\frac{D_v}{D_x}$	$\frac{K_x}{K_\Theta}$	$\frac{K_{x\Theta}}{K_\Theta}$	$\frac{K_v}{K_\Theta}$	a4	a2	a0
1	∞	∞	0	0	0	0	1	0	km^8
2	η	∞	0	0	0	0		$-km^6 \frac{1}{\eta}$	
2'	η	∞	0	0	ζ	0	$1 + 4 \frac{\zeta}{\eta} m^4$	$-km^6 \left[\frac{1}{\eta} + 4\zeta \right]$	
3	η	ρ	v	0	0	0	$\frac{\rho - v^2 + km^4}{\rho}$	$-km^6 \left[\frac{\rho - v^2}{\rho\eta} - \frac{2v}{\rho} \right]$	
4	∞	∞	0	λ	ζ	μ	$1 + \lambda km^4$	$-km^6 [4\zeta + 2\mu]$	

A.1.11 Klassisches Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 1)

Die Gleichungen für das klassische Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 1) werden im folgenden aufbauend auf den Grundgleichungen der transversal schubstarren Kreiszyinderschale ausgearbeitet. Es erfolgt ein Vergleich mit den Gleichungen, die sich durch die Verwendung der Grundgleichungen nach Flügge (1960) ergeben.

Das klassische Semi-Membrantheorie-Modell stellt die einfachste Variante ingenieurmäßiger Schalenformulierungen dar, weist aber die größte Anzahl von zugrundegelegten Steifigkeitsannahmen voraus (siehe Tab. A-3, Tab. A-6 bzw. Tab. A-7). Die klassische Formulierung der Semimembranschale ergibt sich durch die folgenden in Tab. A-8 dargestellten Grundannahmen.

Es wird die Querdehnsteifigkeit zu Null gesetzt und die Umfangsdehnsteifigkeit und die Membranschubsteifigkeit der Schale als unendlich angesehen, die Umfangsdehnung bzw. die Querdehnungseffekte und die Membranschubverformungen werden somit zu Null. Daraus folgt eine direkte Abhängigkeit von Radial- und Tangentialverschiebung. Die axiale Biegesteifigkeit und die Drillsteifigkeit werden zu Null gesetzt und somit werden das axiale Biegemoment und das Drillmoment ebenfalls zu Null.

Tab. A-8 Steifigkeitsannahmen der klassischen Semi-Membrantheorie

Grenzsteifigkeiten		zu Null werdende Kraftkomponenten	zu Null werdende Verzerrungskomponenten	abhängige Verformungskomponenten
$D_\Theta \rightarrow \infty$	$\rho \rightarrow \infty$	—	$\varepsilon_\Theta = 0$	$W = -\frac{\partial V}{\partial \Theta}$ bzw. $W_m = -mV_m$
$D_v = 0$	$v = 0$			
$S_{x\Theta} = 0$	$\eta = 0$	—	$\gamma_{x\Theta} = 0$	$U = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$ bzw. $U_m = -\frac{1}{m} \frac{\partial V_m}{\partial \xi}$
$K_x = 0$	$\lambda = 0$	$m_x = 0$	—	—
$K_v = 0$	$\mu = 0$		—	—
$K_{x\Theta} = 0$	$\zeta = 0$	$m_{x\Theta} = 0$	—	—

Durch die Annahme unendlicher Steifigkeiten können die zugehörigen Schnittkräfte nicht mehr aus den konstitutiven Gleichungen bestimmt werden. Diese Schnittkräfte müssen direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen mithilfe der restlichen Schnittkräfte \mathbf{n}_{red} bestimmt werden. Andererseits folgt, daß zugehörige Verzerrungsgrößen zu Null werden (reduzierter Verzerrungskomponentenvektor \mathbf{e}_{red}). Daraus ergibt sich eine Abhängigkeit einzelner Verschiebungsgrößen. Der Bestimmung der Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} liegen nach Einarbeiten dieser Abhängigkeiten modifizierte Gleichgewichts- und Verzerrungsoperatormatrizen $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T$ und \mathbf{B}_{red} zugrunde.

A.1.11.1 Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen

Die Membrankräfte n_Θ und $n_{x\Theta}$ werden direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen bestimmt:

$$\begin{bmatrix} n_\Theta \\ n_{x\Theta} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 0 & -m^2 \\ \frac{-(\cdot)_{,\xi\xi}}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ m_\Theta/R \end{bmatrix}_m + R \begin{bmatrix} p_n \\ -p_x/m \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-129})$$

Es ergeben sich somit folgende Gleichgewichtsgleichungen $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} = -\mathbf{p}_{\text{red}}$ mit den verbleibenden Schnittkräften.

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} \frac{-(\cdot)_{,\xi\xi}}{m} & m(m^2 - 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ m_\Theta/R \end{bmatrix}_m = - \begin{bmatrix} \frac{-(\cdot)_{,\xi}}{m} & 1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta \\ p_n \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-130})$$

Die Materialgleichungen — $\mathbf{n}_{\text{red}} = \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{e}_{\text{red}}$ — liegen in reduzierter Form in Gl. (A-163) vor.

$$\begin{bmatrix} n_x \\ m_\Theta/R \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & K_\Theta/R^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_\Theta R \end{bmatrix}_m = D_x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_\Theta R \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-131})$$

Nach Einsetzen der durch die Steifigkeitsannahmen bedingten Abhängigkeiten der Verschiebungen ergeben sich folgende Verzerrungsgleichungen $\mathbf{e}_{\text{red}} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}}$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_\Theta \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\cdot)_{,\xi\xi}/m \\ -m(m^2 - 1) \end{bmatrix}_m \cdot V_m \quad (\text{A-132})$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} ist in diesem einfachen Fall ein Skalar und stellt direkt die zu lösende Differentialgleichung dar.

$$\mathbf{K} = \underbrace{1}_{a4} \cdot (\cdot)_{,4\xi} - \underbrace{0}_{a2} \cdot (\cdot)_{,\xi\xi} + \underbrace{km^4(m^2 - 1)}_{a0} \quad (\text{A-133})$$

A.1.11.2 Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen

Greiner (1980) führte die Herleitung unter Verwendung der Verzerrungsgleichungen nach Flügge durch. Die Flügge'schen Verzerrungsgleichungen sind für die schwach gekrümmte Schale in der nächsten Gleichung dargestellt. Die inkorrekten Glieder — im Vergleich zur hergeleiteten korrekten Darstellung der Verzerrungen in Gl. (A-103) — sind grau hinterlegt.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_\theta \cdot R \\ \kappa_{x\theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & (\)'_{\theta} & 1 \\ (\)'_{\theta} & (\)'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & -(\)'_{\xi\xi} \\ 0 & 0 & -(1 + (\)'_{\theta\theta}) \\ 0 & 2(\)'_{\xi} & -2(\)'_{\xi\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-134})$$

Nach Einarbeiten der Lösungsansätze und der Abhängigkeiten der Verschiebungsgrößen folgen aufgrund der Vielzahl der getroffenen Annahmen die Verzerrungsgleichungen in Gl. (A-135) übereinstimmend mit den Verzerrungsgleichungen in Gl. (A-132).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_\theta \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi\xi}/m \\ -m(m^2 - 1) \end{bmatrix}_m \cdot V_m \quad (\text{A-135})$$

A.1.12 Um die Membranschubsteifigkeit erweitertes klassisches Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 2)

Die Gleichungen für das Semi-Membrantheorie-Modell, das um die Membranschubsteifigkeit (Variante 2) erweitert ist, werden im folgenden aufbauend auf den Grundgleichungen der transversal schubstarrten Kreiszylinderschale ausgearbeitet. Es erfolgt ein Vergleich mit den Gleichungen, die sich durch die Verwendung der Grundgleichungen nach Flügge (1960) ergeben.

Die klassische Formulierung der Semimembranschale ergibt sich durch die folgenden in Tab. A-9 dargestellten Grundannahmen.

Es wird die Querdehnsteifigkeit zu Null gesetzt und die Umfangsdehnsteifigkeit als unendlich angesehen, die Umfangsdehnung bzw. die Querdehnungseffekte werden somit zu Null. Daraus folgt eine direkte Abhängigkeit von Radial- und Tangentialverschiebung. Die axiale Biegesteifigkeit und die Drillsteifigkeit werden zu Null gesetzt und somit werden das axiale Biegemoment und das Drillmoment ebenfalls zu Null.

Tab. A-9 Steifigkeitsannahmen der klassischen Semi-Membrantheorie

Grenzsteifigkeiten		zu Null werdende Kraftkomponenten	zu Null werdende Verzerrungskomponenten	abhängige Verformungskomponenten
$D_\Theta \rightarrow \infty$	$\rho \rightarrow \infty$	—	$\varepsilon_\Theta = 0$	$W = -\frac{\partial V}{\partial \Theta}$ bzw. $W_m = -mV_m$
$D_v = 0$	$v = 0$			
$K_x = 0$	$\lambda = 0$	$m_x = 0$	—	—
$K_v = 0$	$\mu = 0$		—	—
$K_{x\Theta} = 0$	$\zeta = 0$	$m_{x\Theta} = 0$	—	—

Durch die Annahme unendlicher Steifigkeiten können analog Kap. A.1.11 die zugehörigen Schnittkräfte nicht mehr aus den konstitutiven Gleichungen bestimmt werden. Der Bestimmung der Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} liegen nach Einarbeiten der Abhängigkeiten von Schnittkräften und Verzerrungsgrößen der reduzierte Schnittkraftkomponentenvektor \mathbf{n}_{red} und Verzerrungskomponentenvektor \mathbf{e}_{red} zugrunde. Daraus folgen modifizierte Gleichgewichts- und Verzerrungsoperatormatrizen $\tilde{\mathbf{B}}_{red}^T$ und \mathbf{B}_{red} .

A.1.12.1 Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen

Die Umfangsmembrankraft wird aus den Gleichgewichtsgleichungen in Gl. (A-136a) bestimmt. In den restlichen Gleichgewichtsgleichungen in Gl. (A-136b) ($\tilde{\mathbf{B}}_{red}^T \cdot \mathbf{n}_{red} = -\mathbf{p}_{red}$) gehen die Schnittkräfte n_x , $n_{x\Theta}$ und m_Θ ein.

$$\frac{n_{\Theta,m}}{R} = p_n - m^2 \frac{m_{\Theta,m}}{R} \tag{A-136a}$$

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi} & m & 0 \\ 0 & (\)'_{\xi} & m(m^2 - 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_{x\Theta} \\ m_{\Theta}/R \end{bmatrix}_m = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta - mp_n \end{bmatrix}_m \tag{A-136b}$$

Die reduzierten Materialgleichungen in Gl. (A-137) — $\mathbf{n}_{red} = \mathbf{D}_{red} \cdot \mathbf{e}_{red}$ — sind in einer 3x3-Matrix zusammengefaßt.

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_{x\Theta} \\ m_{\Theta}/R \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & S_{x\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\Theta}/R^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_{\Theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = D_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_{\Theta} \cdot R \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-137})$$

Die Verzerrungen in Gl. (A-138) — $\mathbf{e}_{\text{red}} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}}$ — sind von der Axial- und Tangentialverschiebung abhängig.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_{\Theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 \\ -m & ()'_{\xi} \\ 0 & -m(m^2 - 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-138})$$

Die Steifigkeitsoperatormatrix ist nun eine 2x2-Matrix. Bildet man die Determinante der Steifigkeitsoperatormatrix, so erhält man die Differentialgleichung der Semimembrantheorie (Gl. (A-140b))

$$\mathbf{K} = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} ()'_{\xi\xi} - ()\eta \cdot m^2 & m \cdot \eta \cdot ()'_{\xi} \\ -m \cdot \eta \cdot ()'_{\xi} & \eta \cdot ()'_{\xi\xi} - k \cdot m^2(m^2 - 1)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-139})$$

$$\text{DGL} = \det(\mathbf{K}) \quad (\text{A-140a})$$

$$\text{DGL} = \underbrace{1}_{a4} \cdot ()'_{4\xi} - \underbrace{\frac{k}{\eta} \cdot m^2(m^2 - 1)^2}_{a2} \cdot ()'_{\xi\xi} + \underbrace{k \cdot m^4(m^2 - 1)^2}_{a0} = 0 \quad (\text{A-140b})$$

A.1.12.2 Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen

Von Greiner (1980) wurden die Verzerrungsgleichungen nach Flügge verwendet. Berücksichtigt man die Abhängigkeit von Radial- und Tangentialverschiebung zufolge der getroffenen Steifigkeitsannahmen ($\rho \rightarrow \infty$ bzw. $\varepsilon_{\Theta} = 0$), so ergibt sich der folgende Zusammenhang von Verzerrungen und Verschiebungen in Gl. (A-141). Die verbleibenden Verzerrungen sind ident jenen der korrekten Darstellung in Gl. (A-138). Die folgende DGL stimmt somit mit der DGL, die sich auf Basis der korrekten KZS-Grundgleichungen ergibt, vollständig überein.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_{\Theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 \\ -m & ()'_{\xi} \\ 0 & -m(m^2 - 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-141})$$

A.1.13 Um die Drillsteifigkeit erweitertes Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 2')

Im folgenden werden in konsistenter Art die Grundgleichungen des um die Drillsteifigkeit $K_{x\Theta}$ erweiterten klassischen Semi-Membrantheorie-Modelles (Variante 2) ausgearbeitet. Die Grundgleichungen sind somit um das Drillmoment $m_{x\Theta}$ und die Drillkrümmung $\kappa_{x\Theta}$ erweitert. Durch die Annahme einer unendlich hohen Umfangsdehnsteifigkeit folgt wiederum eine unmittelbare Abhängigkeit von Radial- und Tangentialverschiebung (siehe Tab. A-10).

Tab. A-10 Steifigkeitsannahmen der um die Drillsteifigkeit erweiterten klassischen Semi-Membrantheorie

Grenzsteifigkeiten		zu Null werdende Kraftkomponenten	zu Null werdende Verzerrungskomponenten	abhängige Verformungskomponenten
$D_\Theta \rightarrow \infty$	$\rho \rightarrow \infty$	—	$\epsilon_\Theta = 0$	$W = -\frac{\partial V}{\partial \Theta}$ bzw. $W_m = -mV_m$
$D_v = 0$	$v = 0$			
$K_x = 0$	$\lambda = 0$	$m_x = 0$	—	—
$K_v = 0$	$\mu = 0$		—	—

A.1.13.1 Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen

Die Umfangsmembrankraft wird wiederum aus den Gleichgewichtsgleichungen in Gl. (A-142a) bestimmt. Gegenüber Variante 2 fällt die zusätzliche Abhängigkeit vom Drillmoment $m_{x\Theta}$ auf. In den restlichen Gleichgewichtsgleichungen in Gl. (A-142b) ($\tilde{\mathbf{B}}_{red}^T \cdot \mathbf{n}_{red} = -\mathbf{p}_{red}$) gehen die Schnittkräfte n_x , $n_{x\Theta}$ bzw. m_Θ und nun auch $m_{x\Theta}$ ein.

$$\frac{n_{\Theta, m}}{R} = p_n - m^2 \frac{m_{\Theta, m}}{R} + 2m \frac{m_{x\Theta, m}}{R} \tag{A-142a}$$

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_\xi & m & 0 & 0 \\ 0 & ()'_\xi & m(m^2 - 1) & (1 - 2m^2)()'_\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_{x\Theta} \\ m_\Theta / R \\ m_{x\Theta} / R \end{bmatrix}_m = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta - mp_n \end{bmatrix}_m \tag{A-142b}$$

Die reduzierten Materialgleichungen $\mathbf{n}_{\text{red}} = \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{e}_{\text{red}}$ sind nun in einer 4x4-Matrix in Gl. (A-143) zusammengefaßt.

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_{x\theta} \\ m_{\theta}/R \\ m_{x\theta}/R \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{x\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta}/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{x\theta}/R^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_{\theta} \cdot R \\ \kappa_{x\theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = D_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_{\theta} \cdot R \\ \kappa_{x\theta} \cdot R \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-143})$$

Die Verzerrungen in Gl. (A-144) ($\mathbf{e}_{\text{red}} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}}$) sind wiederum von der Axial- und Tangentialverschiebung abhängig.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_{\theta} \cdot R \\ \kappa_{x\theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 \\ -m & ()'_{\xi} \\ 0 & -m(m^2 - 1) \\ 0 & (1 - 2m^2)()'_{\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-144})$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} ist wiederum eine 2x2-Matrix. Gegenüber Variante 2 ist das 2. Hauptdiagonalglied um den Anteil der Drillsteifigkeit (dimensionsloser Steifigkeitsparameter ζ) erweitert, die restlichen Glieder von \mathbf{K} sind für Variante 2 und 2' ident.

$$\mathbf{K} = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} ()'_{\xi\xi} - \eta \cdot m^2 & m \cdot \eta \cdot ()'_{\xi} \\ -m \cdot \eta \cdot ()'_{\xi} & [\eta + k\zeta(2m^2 - 1)^2] ()'_{\xi\xi} - k \cdot m^2 (m^2 - 1)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-145})$$

Bildet man die Determinante der Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} , so erhält man die Differentialgleichung der Semi-Membrantheorie bei zusätzlicher Berücksichtigung der Drillsteifigkeit in Gl. (A-146). Gegenüber Variante 2 sind die Koeffizienten a_4 und a_2 um die mit dem dimensionslosen Steifigkeitsbeiwert ζ behafteten Terme erweitert, sie sind grau hinterlegt gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} a_4 &= 1 + k \frac{\zeta}{\eta} (2m^2 - 1)^2 \\ a_2 &= -\frac{k}{\eta} \cdot m^2 (m^2 - 1)^2 - k\zeta m^2 (2m^2 - 1)^2 \\ a_0 &= k \cdot m^4 (m^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-146})$$

A.1.13.2 Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen

Die Biegekrümmung von Gl. (A-147) ist ident jener von Gl. (A-138), ein Unterschied ergibt sich durch die Verwendung der Flügge'schen Verzerrungsdefinition bei den Drillkrümmungen $\kappa_{x\Theta}$. In der korrekten Darstellung ist $\kappa_{x\Theta} = (2m^2 - 1)(\)'_{\xi}$.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_{\Theta} \cdot R \\ \kappa_{x\Theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi} & 0 \\ -m & (\)'_{\xi} \\ 0 & -m(m^2 - 1) \\ 0 & (2m^2 - 2)(\)'_{\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}_m \quad (A-147)$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} ist in Gl. (A-148) dargestellt. Gegenüber der korrekten Darstellung in Gl. (A-145) ergibt sich ein Unterschied durch die Definition der Drillkrümmung im 2. Hauptdiagonalglied (grau hinterlegt).

$$\mathbf{K} = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} (\)'_{\xi\xi} - \eta \cdot m^2 & m \cdot \eta \cdot (\)'_{\xi} \\ -m \cdot \eta \cdot (\)'_{\xi} & [\eta + k\zeta(2m^2 - 2)(2m^2 - 1)](\)'_{\xi\xi} - k \cdot m^2(m^2 - 1)^2 \end{bmatrix} \quad (A-148)$$

Die Koeffizienten der resultierenden DGL sind in Gl. (A-149) dargestellt. Unterschiede ergeben sich in den Koeffizienten a_4 und a_2 bei den Anteilen der Drillsteifigkeit (dimensionsloser Steifigkeitsparameter ζ). Für steigendes Reihenglied m konvergieren die Koeffizienten mit jenen der korrekten Darstellung in Gl. (A-146).

$$\begin{aligned} a_4 &= 1 + k \frac{\zeta}{\eta} (2m^2 - 2)(2m^2 - 1) \\ a_2 &= - \frac{k}{\eta} \cdot m^2(m^2 - 1)^2 - k\zeta m^2 (2m^2 - 2)(2m^2 - 1) \\ a_0 &= k \cdot m^4(m^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (A-149)$$

A.1.14 Vollständiges Semi-Membrantheorie-Modell (Variante 3)

Die Übersicht über die ingenieurmäßigen Schalenformulierungen in Tab. A-3 zeigt, daß eine Variante der Semimembrantheorie bei vollständiger Wiedergabe der Membran möglich ist. Von den Biege- und Drillsteifigkeiten wird nur jene in Umfangsrichtung berücksichtigt (siehe Tab. A-11).

Tab. A-11 Steifigkeitsannahmen der vollständigen Semi-Membrantheorie

Grenzsteifigkeiten		zu Null werdende Kraftkomponenten	zu Null werdende Verzerrungskomponenten	abhängige Verformungskomponenten
$K_x = 0$	$\lambda = 0$	$m_x = 0$	—	—
$K_v = 0$	$\nu = 0$		—	—
$K_{x\Theta} = 0$	$\zeta = 0$	$m_{x\Theta} = 0$	—	—

A.1.14.1 Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen

Im folgenden wird zusätzlich die Querschubsteifigkeit berücksichtigt. Dies bietet den Vorteil, daß alle Schnittgrößen— auch die Querkraft q_Θ — in den Materialgleichungen enthalten sind.

Die Gleichgewichtsgleichungen $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} = -\mathbf{p}$, die Materialgleichungen $\mathbf{n}_{\text{red}} = \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{e}_{\text{red}}$ und die Verzerrungsgleichungen $\mathbf{e}_{\text{red}} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}}$ sind in Matrixform für ein Glied m der Reihenentwicklung in Umfangsrichtung in Gl. (A-151a) bis Gl. (A-151c) dargestellt. Der Schnittkraftvektor enthält dabei wie der Verzerrungsvektor 5 Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\text{red}} &= \left[n_x \quad n_\Theta \quad n_{x\Theta} \quad m_\Theta/R \quad q_\Theta \right]^T \\ \mathbf{e}_{\text{red}} &= \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_\Theta \quad \gamma_{x\Theta} \quad \kappa_\Theta R \quad \gamma_{\Theta z} \right]^T \end{aligned} \quad (\text{A-150})$$

Auf den Index m wird in den folgenden Ausführungen verzichtet.

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()_{,\xi} & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & -m ()_{,\xi} & 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & -m & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ m_\Theta/R \\ q_\Theta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta \\ p_n \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{p} \quad (\text{A-151a})$$

$$\mathbf{n}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ m_\Theta/R \\ q_\Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_v & 0 & 0 & 0 \\ D_v & D_\Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{x\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\Theta/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{\Theta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_\Theta R \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_x \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_\Theta R \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{e}_{\text{red}} \quad (\text{A-151b})$$

$$\mathbf{e}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_\Theta \cdot R \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ -m & ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & -m & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_\Theta \cdot R \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}} \quad (\text{A-151c})$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix, die die Grundlage der Differentialgleichung ist, ist in Gl. (A-152) dargestellt. Zusätzlich zum Membrananteil (obere 3x3 Matrix von \mathbf{K}) sind die Biegeanteile zugeordnet zur Umfangsbiegesteifigkeit in der 4. Zeile und 4. Spalte von \mathbf{K} angeordnet.

$$\mathbf{K} = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} ()'_{\xi\xi} - \eta m^2 & ()'_{\xi} m(\eta + \nu) & ()'_{\xi} \nu & \vdots & 0 \\ - ()'_{\xi} m(\eta + \nu) & ()'_{\xi\xi} \eta - \gamma - \rho m^2 & -m(\rho + \gamma) & \vdots & \gamma - km^2 \\ - ()'_{\xi} \nu & -m(\rho + \gamma) & -\gamma m^2 - \rho & \vdots & (\gamma - k)m \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & \gamma - km^2 & (\gamma - k)m & \vdots & -\gamma - km^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-152})$$

Differentialgleichung der Deformationsmethode

Die Koeffizienten der Differentialgleichung sind abhängig von den Steifigkeitsparametern und dem Glied m der Reihenentwicklung. Liegt eine querschubstarre Schale ($\gamma \rightarrow \infty$) vor, so erhält man die schon erarbeiteten Koeffizienten von Tab. A-3.

$$\begin{aligned} a_4 &= (\rho - \nu^2 + km^4) + \frac{km^2(\rho - \nu^2)}{\gamma} \\ a_2 &= -\frac{km^2}{\eta} [(\rho - \nu^2)(m^2 - 1)^2 - 2\eta\nu m^2(m^2 - 1)] \\ a_0 &= \rho km^4(m^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (\text{A-153})$$

Zur weiteren Lösung wird die Differentialgleichung in die endgültigen Form gebracht.

$$(()'_{4\xi} - 2\beta^2 \cdot ()'_{\xi\xi} + \alpha^4) V_{\text{hom}} = 0 \quad (\text{A-154})$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichung lauten nun folgend:

$$\begin{aligned} 2\beta^2 &= a_2/a_4 \\ \alpha^4 &= a_0/a_4 \end{aligned} \quad (\text{A-155})$$

Je nach den Vorzeichen der Koeffizienten bzw. der Relation der Koeffizienten zueinander können verschiedene Typen von Fundamentallösungen die Lösung der DGL beschreiben. Für den allgemeinen Fall sind 9 verschiedene Lösungstypen möglich. Die Bestimmung der Fundamentallösungen ist in Kap. A.1.18 dargestellt, das Vorzeichen in der DGL von $2\beta^2$ und das Verhältnis von β^2/α^2 bestimmen den Lösungstyp der DGL.

DGL-Lösungstyp für isotropes Material

Die transversal querschubstarre Semimembranschale ist bei Vorliegen isotropen Materialverhaltens — $\rho = 1$ und $\eta = (1 - \nu)/2$ — durch einen eindeutigen Lösungstyp der DGL bestimmt. Dies trifft bei Variante 2 nicht zu, dort muß aufgrund des Verhältnisses von β^2/α^2 eine Änderung des Lösungstyps mit steigendem Reihenglied m in Kauf genommen werden. Variante 1 hingegen hat ebenfalls stets einen eindeutigen Lösungstyp, da β^2 stets Null ist.

Das Vorzeichen vor β^2 ist stets negativ. Im Entscheidungskriterium $\kappa = \beta^2/\alpha^2$ weisen Zähler und Nenner die gleiche Potenz von m auf. Dies ist der Grund dafür, daß κ im Bereich $0 < \kappa < 1$ liegt, das Maximum wird bei $\sqrt{k} \cdot (m^2 - 1) \approx 1$ erreicht.

$$\beta^2 = \frac{-km^2(m^2 - 1)[(m^2 - 1) - \nu]}{(1 - \nu^2 + km^4)} \quad (\text{A-156a})$$

$$\alpha^4 = \frac{km^4(m^2 - 1)^2}{(1 - \nu^2 + km^4)} \quad (\text{A-156b})$$

$$\kappa = \beta^2/\alpha^2 = \frac{\sqrt{k} \cdot [(m^2 - 1) - \nu]}{\sqrt{(1 - \nu^2 + km^4)}} \quad (\text{A-156c})$$

Anmerkung:

Bei Variante 2 liegt das Entscheidungskriterium in geänderter Form vor. Der Nenner enthält keine Potenz von m , das Verhältnis β^2/α^2 steigt von 0 gegen unendlich an, ab einer Grenzzahl m_{gr} kommt es zum Wechsel des Lösungstyps der DGL.

$$\begin{aligned} \beta^2/\alpha^2 &= \frac{\sqrt{k}(m^2 - 1)}{1 - \nu} \\ m_{gr} &= \sqrt{\frac{1 - \nu + k}{\sqrt{k}}} \end{aligned} \quad (\text{A-157})$$

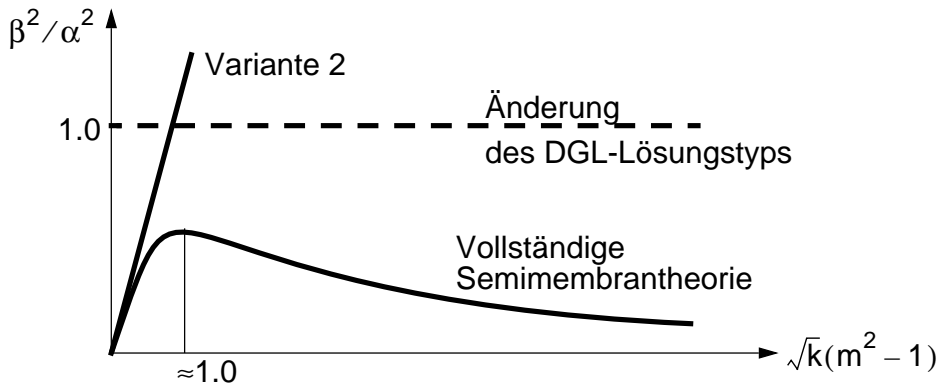


Bild A-8 Kriterium β^2/α^2 zur Bestimmung des DGL-Lösungstyps

A.1.14.2 Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen

Die Gleichgewichtsgleichungen $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} = -\mathbf{p}$, die Materialgleichungen $\mathbf{n}_{\text{red}} = \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{e}_{\text{red}}$ und die Verzerrungsgleichungen $\mathbf{e}_{\text{red}} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}}$ sind in Matrixform für ein Glied m der Reihenentwicklung in Umfangsrichtung in Gl. (A-159a) bis Gl. (A-159c) dargestellt. Die Verzerrungsoperatormatrix weist die schon bekannten Abweichungen der definierten Biegekrümmung κ_Θ auf, diese sind in Gl. (A-159c) grau hinterlegt. Im Gegensatz zur vorhin beschriebenen Formulierung enthält der Schnittkraftvektor genauso wie der Verzerrungsvektor nun 4 Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\text{red}} &= \begin{bmatrix} n_x & n_\Theta & n_{x\Theta} & m_\Theta/R \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{e}_{\text{red}} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_\Theta & \gamma_{x\Theta} & \kappa_\Theta \cdot R \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{A-158}$$

Auf den Index m , der für das aktuelle Reihenglied m der Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung steht, wird in den folgenden Ausführungen verzichtet.

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{n}_{\text{red}} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_\xi & 0 & m & 0 \\ 0 & -m ()'_\xi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -m^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ m_\Theta/R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta \\ p_n \end{bmatrix} = -\mathbf{p} \tag{A-159a}$$

$$\mathbf{n}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Theta \\ n_{x\Theta} \\ m_\Theta/R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_v & 0 & 0 \\ D_v & D_\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{x\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\Theta/R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_\Theta R \end{bmatrix} = D_x \begin{bmatrix} 1 & v & 0 & 0 \\ v & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{e}_{\text{red}} \tag{A-159b}$$

$$\mathbf{e}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_\Theta \cdot R \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ -m & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & m^2 - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}} \quad (\text{A-159c})$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix \mathbf{K} , die die Grundlage der Differentialgleichung ist, ist in Gl. (A-160a) getrennt für die MembranstEIFigkeitsoperatormatrix \mathbf{K}_n und die Biegesteifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K}_m dargestellt.

Die Matrix \mathbf{K}_n stimmt mit jener von Gl. (A-152) überein. Aufgrund der Flügge'schen Definition der Biegekrümmung in Umfangsrichtung ist die Biegesteifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K}_m unsymmetrisch (!).

$$\mathbf{K}_n = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} ()'_{\xi\xi} - \eta m^2 & ()'_{\xi} m(\eta + \nu) & ()'_{\xi} \nu \\ - ()'_{\xi} m(\eta + \nu) & ()'_{\xi\xi} \eta - \gamma - \rho m^2 & -m(\rho + \gamma) \\ - ()'_{\xi} \nu & -m(\rho + \gamma) & -\gamma m^2 - \rho \end{bmatrix} \quad (\text{A-160a})$$

$$\mathbf{K}_m = \frac{K_\Theta}{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m(m^2 - 1) \\ 0 & 0 & -m^2(m^2 - 1) \end{bmatrix} \quad (\text{A-160b})$$

Eine mechanisch einwandfreie Formulierungsvariante auf Basis der Flügge'schen KZS-Gleichungen ist somit nicht gegeben.

A.1.15 Halb-Biegetheorie-Modell (Variante 4)

Für das Halb-Biegetheorie-Modell (Variante 4) werden folgende Grundannahmen in Tab. A-12 getroffen. Die Umfangsdehnsteifigkeit und die Schubsteifigkeit werden mit unendlich hohen Grenzsteifigkeiten angenommen. Die damit verbundenen Verzerrungsgrößen werden zu Null. Alle Verschiebungsgrößen sind nun voneinander abhängig.

Tab. A-12 Steifigkeitsannahmen der Halbbiegetheorie

Grenzsteifigkeiten		zu Null werdende Kraftkomponenten	zu Null werdende Verzerrungskomponenten	abhängige Verformungskomponenten
$D_\Theta \rightarrow \infty$	$\rho \rightarrow \infty$	—	$\epsilon_\Theta = 0$	$W = -\frac{\partial V}{\partial \Theta}$ bzw. $W_m = -mV_m$
$S_{x\Theta} = 0$	$\eta = 0$	—	$\gamma_{x\Theta} = 0$	$U = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$ bzw. $U_m = -\frac{1}{m} \frac{\partial V_m}{\partial \xi}$

A.1.15.1 Formulierung auf Basis der korrekten Darstellung der KZS-Gleichungen

Die Membrankräfte n_Θ und $n_{x\Theta}$ werden direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen bestimmt:

$$\begin{bmatrix} n_\Theta \\ n_{x\Theta} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 0 & (\cdot)_{,\xi\xi} & -m^2 & 2m(\cdot)_{,\xi} \\ \frac{-(\cdot)_{,\xi}}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ m_x/R \\ m_\Theta/R \\ m_{x\Theta}/R \end{bmatrix}_m + R \begin{bmatrix} p_n \\ -p_x \\ m \end{bmatrix}_m \tag{A-161}$$

Es ergeben sich somit folgende Gleichgewichtsgleichungen $\tilde{\mathbf{B}}_{red}^T \cdot \mathbf{n}_{red} = -\mathbf{p}_{red}$ mit den verbleibenden Schnittkräften.

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} -(\cdot)_{,\xi\xi} & -m(\cdot)_{,\xi\xi} & m(m^2 - 1) & -2(m^2 - 1)(\cdot)_{,\xi} \\ \frac{-(\cdot)_{,\xi}}{m} & 1 & -m & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ m_x/r \\ m_\Theta/r \\ m_{x\Theta}/r \end{bmatrix}_m = - \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta \\ p_n \end{bmatrix}_m \tag{A-162}$$

Die Materialgleichungen — $\mathbf{n}_{red} = \mathbf{D}_{red} \cdot \mathbf{e}_{red}$ — liegen in reduzierter Form in Gl. (A-163) vor.

$$\begin{bmatrix} n_x \\ m_x/R \\ m_\Theta/R \\ m_{x\Theta}/R \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_x/R^2 & K_v/R^2 & 0 \\ 0 & K_v/R^2 & K_\Theta/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{x\Theta}/R^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x R \\ \kappa_\Theta R \\ \kappa_{x\Theta} R \end{bmatrix}_m = D_x \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda k & \mu k & \\ & \mu k & k & \\ & & & \zeta k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x R \\ \kappa_\Theta R \\ \kappa_{x\Theta} R \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-163})$$

Nach Einsetzen der durch die Steifigkeitsannahmen bedingten Abhängigkeiten der Verschiebungen ergeben sich folgende Verzerrungsgleichungen $\mathbf{e}_{\text{red}} = \mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{u}_{\text{red}}$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_\Theta \cdot R \\ \kappa_{x\Theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi\xi\xi}/m \\ m()'_{\xi\xi} \\ -m(m^2 - 1) \\ -(2m^2 - 1)()'_{\xi} \end{bmatrix}_m \cdot V_m \quad (\text{A-164})$$

Die Steifigkeitsdifferentialoperatormatrix ist in diesem Fall ein Skalar und stellt direkt die zu lösende Differentialgleichung dar.

$$\mathbf{K} = \underbrace{(1 + m^4 \lambda k)}_{a4} \cdot ()_{,4\xi} - \underbrace{km^2 \cdot (\zeta(2m^2 - 1)^2 + 2\mu m^2(m^2 - 1))}_{a2} \cdot ()'_{\xi\xi} + \underbrace{km^4(m^2 - 1)}_{a0} \quad (\text{A-165})$$

A.1.15.2 Formulierung auf Basis der Flügge'schen KZS-Grundgleichungen

Steingäß (1972) führte die Herleitung unter Verwendung der Verzerrungsgleichungen nach Flügge durch. Die Flügge'schen Verzerrungsgleichungen sind für die schwach gekrümmte Schale in der nächsten Gleichung dargestellt. Die inkorrekten Glieder — im Vergleich zur hergeleiteten korrekten Darstellung der Verzerrungen in Gl. (A-103) — sind grau hinterlegt.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\Theta \\ \gamma_{x\Theta} \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_\Theta \cdot R \\ \kappa_{x\Theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} ()'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & ()'_{\Theta} & 1 \\ ()'_{\Theta} & ()'_{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & -()'_{\xi\xi} \\ 0 & 0 & -(1 + ()'_{\Theta\Theta}) \\ 0 & 2()'_{\xi} & -2()'_{\xi\Theta} \end{bmatrix}_m \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}_m \quad (\text{A-166})$$

Nach Einarbeiten der Lösungsansatzes und der Abhängigkeiten der Verschiebungsgrößen ergeben sich die Verzerrungsgleichungen in Gl. (A-167). Es ergibt sich ein Unterschied bei den Drillkrümmungen gegenüber Gl. (A-164).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \kappa_x \cdot R \\ \kappa_\theta \cdot R \\ \kappa_{x\theta} \cdot R \end{bmatrix}_m = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} (\)_{,\xi\xi} / m \\ m (\)_{,\xi\xi} \\ -m(1 - m^2) \\ -2(1 - m^2) (\)_{,\xi} \end{bmatrix}_m \cdot V_m \quad (\text{A-167})$$

Dadurch ändert sich der Vorkoeffizient der Ableitungen 2. Ordnung. Die Abweichungen sind in Gl. (A-168) grau hinterlegt dargestellt.

$$a_2 = km^2 \cdot [\zeta(2m^2 - 2) \cdot (2m^2 - 1) + 2\mu m^2(m^2 - 1)] \quad (\text{A-168})$$

A.1.16 Matrixorientierte Lösungsmethodik

Eine im Sinne der Deformationsmethode (Weggrößenverfahren) matrixorientierte Lösungsmethode baut auf die Darstellung der mechanischen Grundgleichungen in Matrixform auf. Unter Verwendung der zu den Differentialgleichungen zugehörigen Fundamentallösungen werden Verformungen und Schnittkräfte des homogenen Lösungsanteiles bestimmt. Daraus folgt die Systemsteifigkeitsmatrix, die den Zusammenhang von Einheitsverformungszuständen und Randschnittkräften beschreibt. Der Starreinspannzustand folgt aus der partikulären Lösung (inhomogener Anteil der Differentialgleichung).

A.1.16.1 Aufteilung der Verschiebungen

Der Verschiebungsvektor setzt sich aus einem homogenen und einem partikulären Verschiebungsanteil zusammen (Gl. (A-169)). Der homogene Anteil teilt sich weiters in einen zugehörig zu den Systemverschiebungen und den Starreinspannzustand.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{hom}} + \mathbf{u}_{\text{part}} = \mathbf{u}_{\text{hom, sys}} + \mathbf{u}_{\text{hom, Starr}} + \mathbf{u}_{\text{part}} \quad (\text{A-169})$$

Die homogenen Verformungen ergeben sich aus dem Skalarprodukt des Fundamentallösungsvektors \mathbf{f} mit dem jeweiligen Konstantenvektor (\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ...). Der Verformungsvektor \mathbf{u}_{hom} ergibt sich durch Multiplikation der Fundamentallösungsmatrix \mathbf{F} , die entsprechend der Anzahl der Verformungen den Vektor \mathbf{f} enthält, mit dem Konstantenvektor \mathbf{c}^* . Dies wird sowohl für die Systemverformungen, dem Starreinspannzustand als auch die sogenannten Einheitsverschiebungszustände vorgenommen. Die Integrationskonstanten, die sich für alle Einheitsverschiebungszustände ergeben, ergeben die Konstantenmatrix \mathbf{A} in Gl. (A-170). Durch Multiplikation mit dem Amplitudenvektor \mathbf{c} ergibt sich der Konstantenvektor \mathbf{c}^* für einen beliebigen Verschiebungszustand.

$$\mathbf{u}_{\text{hom}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \dots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \dots \end{bmatrix} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}^* = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-170})$$

Die Randverschiebungen in Gl. (A-171) für die Ränder $\xi = 0$ und $\xi = \xi_1$ sind in gestapelter Form im Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ angeordnet und ergeben sich als Produkt von Matrix $\hat{\mathbf{F}}^T$, die die Funktionsmatrix \mathbf{F}^T ausgewertet an den Rändern enthält, der Konstantenmatrix und dem Amplitudenvektor.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{hom}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \dots \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \dots \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{\xi = 0 \\ \xi = \xi_1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T|_{\xi = 0} \\ \mathbf{F}^T|_{\xi = \xi_1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-171})$$

Die partikulären Verformungen werden aus den partikulären Schnittkräften über die Material- und Verzerrungsgleichungen bestimmt.

Die Ableitungen einer Verformungsgröße, die bei der Bestimmung der Schnittkräfte bzw. der Steifigkeitsmatrix verwendet werde, erhält man durch die Ableitung des Vektors \mathbf{f} . Diese wird durch eine einfache Matrixmultiplikation durchgeführt. Dabei muß die Ableitungsmatrix \mathbf{D}_∂ für den jeweiligen Funktionsvektor \mathbf{f} der Fundamentallösungen bestimmt werden. Die Ableitung erhält man durch Multiplikation von \mathbf{D}_∂ mit \mathbf{f} (Gl. (A-172)). Dies beruht auf der Tatsache, daß sich jede Fundamentallösung als Linearkombination der anderen Fundamentallösungen darstellen läßt.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi} = \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{D}_\partial \cdot \mathbf{f} \quad (\text{A-172})$$

Die Ableitung n-ter Stufe des Funktionsvektors in Gl. (A-173) kann dann durch n-faches Vormultiplizieren (Matrizenpotenz) der Ableitungsmatrix \mathbf{D}_∂ bestimmt werden. Durch Vertauschen und Transponieren erhält man den transponierten n-fach abgeleiteten Funktionsvektor $\mathbf{f}^{(n)T}$.

$$\frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial \xi^n} = \mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{D}_\partial^{(n)} \cdot \mathbf{f} \quad (\text{A-173})$$

$$\mathbf{f}^{(n)T} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{D}_\partial^{(n)T} \quad (\text{A-174})$$

A.1.16.2 Homogene Schnittgrößen und Deformationsgleichungen

Homogene Schnittgrößen

Die homogenen Schnittgrößen in Gl. (A-175) werden durch die Verknüpfung der konstitutive Gleichungen mit den Verzerrungsgleichungen bestimmt. Die Materialsteifigkeitsmatrix enthält skalare Größen, die Verzerrungsoperatormatrix enthält daneben auch Differentialoperatoren. Für eine gänzliche matrixorientierte Lösung wird die Funktionsmatrix vorweg gestellt, im Gegenzug müssen \mathbf{D} und \mathbf{B} expandiert werden. Dies geschieht durch das Einarbeiten der Einheitsmatrix \mathbf{I} und der Ableitungsmatrix \mathbf{D}_∂ anstelle der Differentialoperatoren. Letztendlich ergeben sich die Schnittkräfte aus der homogenen

Schnittkraftmatrix \mathbf{S}_{hom} und dem Konstantenvektor.

$$\mathbf{n}_{\text{hom}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{\text{hom}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}^* = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{S}_{\text{hom}} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-175})$$

Exemplarisch ist zur Illustration eine beliebige, expandierte Verzerrungsoperatormatrix in Gl. (A-176) angegeben.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_{11} \mathbf{D}_\partial^T & \mathbf{0} & \dots \\ b_{21} \mathbf{I} & d_{22} \mathbf{D}_\partial^T & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{A-176})$$

Die Randschnittkräfte in Gl. (A-177) für die Ränder $\xi = 0$ und $\xi = \xi_1$ sind in gestapelter Form im Vektor $\hat{\mathbf{n}}_{\text{hom}}$ angeordnet. Die Grundlage für die Randschnittkraftmatrix $\hat{\mathbf{S}}_{\text{hom}}$ bilden die Randfunktionsmatrix $\hat{\mathbf{F}}^T$, die expandierten \mathbf{D} - und \mathbf{B} - Matrizen und die Konstantenmatrix \mathbf{A} .

$$\hat{\mathbf{n}}_{\text{hom}} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \hat{\mathbf{S}}_{\text{hom}} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-177})$$

Deformationsgleichungen

Für die spätere Bestimmung der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ werden vorweg zur Wiedergabe des Zusammenhanges von homogenen Verformungen und Randkräften die Deformationsgleichungen in Abhängigkeit der Fundamentallösungen bestimmt.

Die Deformationsgleichungen ergeben sich durch Anwendung der Steifigkeitsoperatormatrix \mathbf{K} auf den Verschiebungsvektor \mathbf{u} . In Gl. (A-178) ist zur Illustration exemplarisch eine beliebige \mathbf{K} —Matrix angegeben. Dabei sind die Koeffizienten d_{ij} der Einzelglieder zugehörig zu den Ableitungen und die k_{ij} die skalaren Größen.

$$\mathbf{r} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}^* = \begin{bmatrix} d_{11}(\cdot)_{,\xi\xi} + k_{11} & d_{12}(\cdot)_{,\xi} & k_{13} & \dots \\ d_{21}(\cdot)_{,\xi} & d_{22}(\cdot)_{,\xi\xi} + k_{22} & k_{23} & \dots \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \dots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \dots \end{bmatrix} \quad (\text{A-178})$$

Der Verschiebungsvektor wird durch das Produkt von Funktionsmatrix \mathbf{F} und Konstantenvektor \mathbf{c}^* ersetzt. Die Anwendung der Differentialoperatoren auf die Verschiebungen der Steifigkeitsmatrix, bedingt analog der Bestimmung der homogenen Schnittgrößen die Multiplikation von \mathbf{F}^T mit der Ableitungsmatrix \mathbf{D}_∂ . Durch das Einsetzen von \mathbf{D}_∂^T in \mathbf{K} entsteht die expandierte Steifigkeitsoperatormatrix \mathbb{K} . Für Glieder ohne Ableitung wird die Einheitsmatrix \mathbf{I} eingesetzt.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \dots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_\partial^{2T} + k_{11}\mathbf{I} & \mathbf{D}_\partial^T & k_{13}\mathbf{I} & \dots \\ \mathbf{D}_\partial^T & \mathbf{D}_\partial^{2T} + k_{22}\mathbf{I} & k_{13}\mathbf{I} & \dots \\ k_{31}\mathbf{I} & k_{32}\mathbf{I} & k_{33}\mathbf{I} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\mathbb{K}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \dots \end{bmatrix} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbf{c}^* \quad (\text{A-179})$$

A.1.16.3 Steifigkeitsmatrix

Die Glieder der Steifigkeitsmatrix stellen den kräftemäßigen Zusammenhang zwischen aufgebrachten Randverschiebungen und Randkräften dar.

Der Bestimmung der Steifigkeitsmatrix liegen sogenannte Einheitsverschiebungszustände zugrunde. Die Randkräfte aus diesen Einheitsverschiebungszuständen stellen die Einzelglieder der Steifigkeitsmatrix dar.

Bestimmung der Integrationskonstanten bei Einheitsverschiebungszustände

Die Randverschiebungen in Gl. (A-180) für die Ränder $\xi = 0$ und $\xi = \xi_1$ sind in gestapelter Form im Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ angeordnet und ergeben sich als Produkt von Randfunktionsmatrix $\hat{\mathbf{F}}^T$, die die Funktionsmatrix \mathbf{F}^T ausgewertet an den Rändern enthält, und dem Konstantenvektor.

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \dots \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left| \right. \\ \xi = 0 \\ \left| \right. \\ \left| \right. \\ \xi = \xi_1 \end{array} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left| \right. \\ \xi = 0 \\ \left| \right. \\ \left| \right. \\ \xi = \xi_1 \end{array} \cdot \mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{c}^* \quad (\text{A-180})$$

Für den homogenen Anteil müssen, da keine Belastung vorliegt, die Deformationsgleichungen zu Null erfüllt sein. Da die Funktionsmatrix ungleich Null ist, folgt daß das Produkt $\mathbb{K} \cdot \mathbf{c}^*$ in Gl. (A-181) zu Null wird.

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbf{c}^* = \mathbf{0} \quad (\text{A-181})$$

Es gelten somit die zwei Gleichungen zur Bestimmung des Konstantenvektors. Aus rechentechnischen Gründen wird die erste Gleichung mit $(1/2)\mathbf{c}^{*T}$ vormultipliziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{1}{2} \mathbf{c}^{*\top} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbf{c}^* = \mathbf{0} \\ \mathbf{g} &= \hat{\mathbf{F}}^\top \cdot \mathbf{c}^* - \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A-182})$$

Die Gleichungen \mathbf{G} und \mathbf{g} werden zusammengefaßt und zur bestmöglichen Bestimmung von \mathbf{c}^* als Extremwertproblem mit Nebenbedingung in Gl. (A-183) definiert.

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G} + \lambda^\top \cdot \mathbf{g} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^{*\top} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbf{c}^* - \mathbf{c}^{*\top} \cdot \mathbf{r} + \lambda^\top \cdot \hat{\mathbf{F}}^\top \cdot \mathbf{c}^* - \hat{\mathbf{u}} = \text{extr} \quad (\text{A-183})$$

Die Extremalbedingung bedeutet, daß die Ableitungen nach dem Konstantenvektor \mathbf{c}^* und dem Multiplikatorenvektor λ zu Null sind (Gl. (A-184)).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}^*} \mathbf{G}^* &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}^*} \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{c}^*} \cdot \lambda = \mathbb{K} \cdot \mathbf{c}^* + \hat{\mathbf{F}} \cdot \lambda = \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{G}^* &= \mathbf{g} = \hat{\mathbf{F}}^\top \cdot \mathbf{c}^* - \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A-184})$$

Diese beiden Gleichungen werden nun in Matrixform vereint:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \hat{\mathbf{F}} \\ \hat{\mathbf{F}}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}^* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (\text{A-185})$$

Daraus kann nun der zu den vorgegebenen Randbedingungen — Randverschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}$ — zugehörige Konstantenvektor \mathbf{c}^* ermittelt werden. Entsprechend der Deformationsmethode werden Einheitsverschiebungszustände (zB. $\hat{\mathbf{u}} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]^\top$) aufgebracht, zugehörig dazu soll der Konstantenvektor bestimmt werden. Dies kann simultan für alle Randverschiebungen durchgeführt werden, die Verschiebungszustände zusammen ergeben die Einheitsmatrix \mathbf{I} . Die Konstantenvektoren werden in der Konstantenmatrix \mathbf{A} einsortiert. Die Multiplikatoren sind in der Matrix Λ zusammengefaßt

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & \hat{\mathbf{F}} \\ \hat{\mathbf{F}}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \tilde{\mathbb{K}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A-186})$$

Die Konstantenmatrix \mathbf{A} und die Multiplikatorenmatrix Λ können durch Invertierung von $\tilde{\mathbb{K}}$ bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A-187})$$

Die Randverformungen ergeben sich nun aus der Multiplikation von Funktionsmatrix $\hat{\mathbf{F}}^T$ mit dem Konstantenvektor \mathbf{c}^* . Als Kontrolle muß das Produkt von Konstantenmatrix \mathbf{A} und $\hat{\mathbf{F}}^T$ die Einheitsmatrix ergeben (Gl. (A-188)).

$$\hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (\text{A-188})$$

Steifigkeitsmatrix

Die Glieder der Steifigkeitsmatrix stellen den kräftemäßigen Zusammenhang zwischen aufgebrauchten Randverschiebungen und Randkräften dar. Dabei werden die Einheitsverschiebungszustände verwendet. Für diese wurde die Konstantenmatrix \mathbf{A} bereits bestimmt.

Die Bestimmung der Randkräfte $\hat{\mathbf{r}}$ erfolgt analog den Schnittkräften. Es wird die Funktionsmatrix durch an den Rändern ausgewertete Funktionsmatrix $\hat{\mathbf{F}}^{T*}$ ersetzt. Dabei wird eine Vorzeichenkorrektur für das negative Schnittufer — Rand $\xi = 0$ — mit der Matrix \mathbf{I}_V vorgenommen. Die Randkräfte hängen nun von der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ und dem Amplitudenvektor \mathbf{c} ab. $\hat{\mathbf{K}}$ ergibt sich aus der vorzeichenkorrigierten homogenen Randschnittkraftmatrix $\hat{\mathbf{S}}_{\text{hom}}$ in Gl. (A-190).

$$\hat{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{F}^T|_{\xi=0} \\ \mathbf{F}^T|_{\xi=L/r} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{F}}^{T*}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{I}_V \cdot \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-189})$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{F}}^{T*} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_V \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\text{hom}} \quad (\text{A-190})$$

A.1.16.4 Partikuläre Schnittkräfte und Verformungen

Die partikulären Schnittkräfte werden direkt aus den Gleichgewichtsgleichungen bestimmt. Der Zusammenhang mit den Belastungen ist über die partikuläre Schnittkraftmatrix \mathbf{S}_{part} in Gl. (A-191) gegeben. Die partikulären Verzerrungen \mathbf{e}_{part} ergeben sich nach durch Umkehr der Materialgleichungen. Zugehörig dazu kann über die Verzerrungsoperatormatrix der einfachste partikuläre Verschiebungszustand \mathbf{u}_{part} konstruiert werden.

$$\mathbf{n}_{\text{part}} = \mathbf{S}_{\text{part}} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-191})$$

$$\mathbf{e}_{\text{part}} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{n}_{\text{part}} \quad (\text{A-192})$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{\text{part}} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{n}_{\text{part}} \quad (\text{A-193})$$

Die partikulären Verschiebungen zufolge den einzelnen Belastungskomponenten werden in der partikulären Verschiebungsmatrix \mathbf{U}_{part} eingeordnet. Zugehörig zu den Randverformungen sind der Vektor $\hat{\mathbf{u}}_{\text{part}}$ und die Matrix $\hat{\mathbf{U}}_{\text{part}}$:

$$\mathbf{u}_{\text{part}} = \mathbf{U}_{\text{part}} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-194})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{part}} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{part}} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-195})$$

Starreinspannzustand

Im Starreinspannzustand müssen die Randverformungen aus partikulären und homogenen Lösungsteil zu Null werden. Die homogenen Randverformungen in Gl. (A-197) bestimmen sich aus der Funktionsmatrix $\hat{\mathbf{F}}^T$, der zu den Einheitsverschiebungszuständen zugehörigen Konstantenmatrix \mathbf{A} und dem Amplitudenvektor $\mathbf{c}_{\text{Starr}}$.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{hom}} + \hat{\mathbf{u}}_{\text{Part}} = \mathbf{0} \quad (\text{A-196})$$

$$\hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}_{\text{Starr}} + \hat{\mathbf{U}}_{\text{Part}} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (\text{A-197})$$

Das Produkt von $\hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{A}$ ergibt die Einheitsmatrix, die Konstanten des Starreinspannzustandes ergeben sich somit direkt aus den partikulären Randverformungen. Die Verformungen des Starreinspannzustandes in Gl. (A-199) setzen sich somit aus einem homogenen Anteil und den partikulären Verformungen zusammen.

$$\mathbf{c}_{\text{Starr}} = -\hat{\mathbf{U}}_{\text{Part}} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-198})$$

$$\mathbf{u}_{\text{starr}} = (-\hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{part}} + \mathbf{U}_{\text{part}}) \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-199})$$

Die Schnittkräfte des Starreinspannzustandes bestehen aus den partikulären und den zu Starreinspannbedingung zugehörigen Schnittkräften:

$$\mathbf{n}_{\text{starr}} = \mathbf{S}_{\text{hom}} \cdot \mathbf{c}_{\text{Starr}} + \mathbf{S}_{\text{part}} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-200})$$

$$\mathbf{n}_{\text{starr}} = (-\mathbf{S}_{\text{hom}} \cdot \mathbf{U}_{\text{Part}} + \mathbf{S}_{\text{part}}) \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-201})$$

Die Randkräfte in Gl. (A-202) werden nach Vorzeichenkorrektur aus den Randkräften des Partikulär- und Starrensanzustandes gewonnen.

$$\hat{\mathbf{r}}_{\text{Starr}} = (-\mathbf{I}_V \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\text{hom}} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{Part}} + \mathbf{I}_V \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\text{part}}) \cdot \mathbf{p} = (-\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\text{Part}} + \mathbf{I}_V \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\text{part}}) \cdot \mathbf{p} \quad (\text{A-202})$$

A.1.16.5 Gleichungssystem der Deformationsmethode

Zur Bestimmung der unbekannt Systemverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{sys}}$ liegt folgendes Gleichungssystem zugrunde. Der Belastungsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ setzt sich aus den Randkräften des Starreinspannzustandes und den äußeren Knotenkräften zusammen:

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A-203})$$

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\text{sys}} = \hat{\mathbf{r}}_{\text{extern}} + \hat{\mathbf{r}}_{\text{starr}} \quad (\text{A-204})$$

A.1.17 Vollständige Semimembrantheorie — Anwendung der matrixorientierten Lösungsmethodik

Hier liegen 4 Verschiebungsgrößen (u , v , w und β_Θ) vor. Aufgrund der Steifigkeitsannahmen wird das Biegemoment m_x bzw. die Querkraft q_x zu Null. Es ergibt sich die Besonderheit, daß in den Randbedingungen die Verschiebungen U und V bzw. die Kräfte n_x und $n_{x\Theta}$ eingehen. Die beiden restlichen Verformungs- und Schnittgrößen und stellen innere Größen dar. Zur besseren Darstellung erfolgt eine Neusortierung des Schnittkraft- und Verzerrungsvektors in Gl. (A-205) und Gl. (A-206).

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & n_{x\Theta} & n_\Theta & m_\Theta/R & q_\Theta \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-205})$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{x\Theta} & \varepsilon_\Theta & \kappa_\Theta R & \gamma_{\Theta z} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A-206})$$

Die einzelnen Verformungsgrößen ergeben sich in Gl. (A-207) aus den zugehörigen Integrationskonstanten und den Fundamentallösungen.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_\Theta \cdot r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{c}}^* = \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{c}}^* \quad (\text{A-207})$$

Die Komponenten U und V des Verschiebungsvektors \mathbf{u}_{red} , die in die Randbedingungen eingehen, sind durch die Funktionsmatrix, der Konstantenmatrix und dem Amplitudenvektor in Gl. (A-208) bestimmt.

$$\mathbf{u}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{f}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c}^* = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-208})$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-209})$$

Die expandierte Steifigkeitsoperatormatrix \mathbb{K} in Gl. (A-210) hat folgendes Aussehen, eine Unterteilung in 4 Submatrizen zur Bestimmung der Abhängigkeit der Integrationskonstanten untereinander wird vorgenommen.

$$\mathbb{K} = \frac{D_x}{R^2} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\partial^{2T} - \eta m^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}_\partial^T m(\eta + \nu) & \mathbf{I} & \mathbf{D}_\partial^T \nu & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_\partial^T m(\eta + \nu) & \mathbf{D}_\partial^{2T} \eta - (\gamma + \rho m^2) \mathbf{I} & \mathbf{I} & -m(\rho + \gamma) \mathbf{I} & (\gamma - km^2) \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}_\partial^T \nu & -m(\rho + \gamma) \mathbf{I} & \mathbf{I} & -(\gamma m^2 + \rho) \mathbf{I} & (\gamma - k) m \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & (\gamma - km^2) \mathbf{I} & \mathbf{I} & (\gamma - k) m \mathbf{I} & -(\gamma + km^2) \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A-210})$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A-211})$$

Aus der Bedingung $\mathbf{F}^T \cdot \mathbb{K} \cdot \bar{\mathbf{c}}^* = \mathbf{0}$ ergibt sich die Abhängigkeit der Konstantenvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} von der Konstantenmatrix und dem Amplitudenvektor. Weiters folgt daraus die modifizierte expandierte \mathbb{K}^* -Matrix zur Bestimmung der Konstantenmatrix \mathbf{A} in Gl. (A-213).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = -[\mathbb{K}_{22}]^{-1} \cdot [\mathbb{K}_{21}] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-212})$$

$$\mathbb{K}^* = \mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12} \cdot \text{inv}(\mathbb{K}_{22}) \cdot \mathbb{K}_{21} \quad (\text{A-213})$$

Die Verschiebungsgrößen für einen beliebigen Ort ergeben sich aus den Randverformungen. Als Zwischenschritt müssen aus den Axial- und Tangentialverschiebungen an den Rändern noch die Radialverschiebungen und die Drehwinkel an den Rändern bestimmt werden. Der Zusammenhang der Verschiebungsgrößen untereinander in Gl. (A-214) ist über die Untermatrizen \mathbb{K}_{22} und \mathbb{K}_{21} gegeben und wurde bereits bei der Ermittlung der Steifigkeitsmatrix verwendet.

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbb{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbb{K}_{21} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-214})$$

In den Schnittkraftvektoren $\mathbf{n}_{\text{hom,red}}$ und $\hat{\mathbf{n}}_{\text{hom,red}}$ beinhalten die Axialkraft n_x und Schubkraft $n_{x\theta}$. Ihre Bestimmung erfolgt bei Verwendung der modifizierten expandierten Matrizen \mathbb{B}_{red} und \mathbb{D}_{red} . Es liefern die Axialdehnung ϵ_x , die Schubverzerrung $\gamma_{x\theta}$ und die Umfangsdehnung ϵ_θ Beiträge für die Kräfte n_x und $n_{x\theta}$. Daraus ergeben sich die reduzierte Materialsteifigkeitsmatrix \mathbf{D}_{red} bzw. \mathbb{D}_{red} und die reduzierte Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B}_{red} bzw. \mathbb{B}_{red} zur Bestimmung der Schnittkraftvektoren in Gl. (A-215) und Gl. (A-216).

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_{x\theta} \\ n_\theta \\ m_\theta/R \\ q_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{D}_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & v^* & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ v^* & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{x\theta} \\ \epsilon_\theta \\ \kappa_\theta R \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} \quad \mathbb{D}_{\text{red}} = \mathbf{D}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & v\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \eta\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-215})$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{x\theta} \\ \epsilon_\theta \\ \kappa_\theta R \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ -m & \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & -m & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ \beta_\theta R \end{bmatrix} \quad \mathbb{B}_{\text{red}} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -m\mathbf{I} & \mathbf{D}_\partial^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A-216})$$

$$\mathbf{n}_{\text{hom, red}} = \mathbf{F}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{G}_{\text{red}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbb{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbb{K}_{21} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{S}_{\text{hom, red}} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-217})$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{\text{hom, red}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{red}}^T \cdot \mathbf{D}_{\text{red}} \cdot \mathbf{G}_{\text{red}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbb{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbb{K}_{21} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c} = \hat{\mathbf{S}}_{\text{hom, red}} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-218})$$

A.1.17.1 Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich nach Vorzeichenkorrektur aus der Randschnittkraftmatrix $\hat{\mathbf{S}}_{\text{hom, red}}$ in Gl. (A-219).

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{I}_V \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\text{hom, red}} \quad (\text{A-219})$$

Für die Bestimmung aller Schnittkräfte erfolgt in Gl. (A-220) analog aus dem Matrixprodukt von Funktionsmatrix \mathbf{F} , expandierter Materialmatrix \mathbf{D} , expandierter Verzerrungsoperatormatrix \mathbf{B} , der Konstantenmatrix \mathbf{A} und dem Amplitudenvektor \mathbf{c} .

$$\mathbf{n}_{\text{hom}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbb{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbb{K}_{21} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-220})$$

$$\mathbf{n}_{\text{hom}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^T \end{bmatrix} \mathbf{D}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \nu \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \eta \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \nu \mathbf{I} & \mathbf{0} & \rho \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & k \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{1}{\bar{R}} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\partial^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -m \mathbf{I} & \mathbf{D}_\partial^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & m \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -m \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbb{K}_{22}^{-1} \cdot \mathbb{K}_{21} \cdot \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{A-221})$$

Für die Berechnung der Verschiebungen bzw. der Schnittkräfte hat die Funktionsmatrix \mathbf{F} eine unterschiedliche Größe. Dies beruht auf der Anzahl der zu bestimmenden Schnittkräfte - hier 5 - bzw. Verschiebungsgrößen - hier 4.

A.1.17.2 Starreinspannzustand

Aus dem partikulären Lösungsanteil ergeben sich nach Berechnung der partikulären Schnittkräfte und der zugehörigen Verschiebungsgrößen die Starreinspannkkräfte.

Die Bestimmung der partikulären Schnittkraftverläufe erfolgt aus den Gleichgewichtsgleichungen. In der nächsten Gleichung sind die Schnittkräfte für jeweils konstante Belastungskomponenten angegeben.

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_{x\Theta} \\ n_\Theta \\ m_\Theta/R \\ q_\Theta \end{bmatrix}_{\text{part}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -R/m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R \cdot m}{m^2 - 1} & -\frac{R}{m^2 - 1} \\ 0 & \frac{R \cdot m}{m(m^2 - 1)} & \frac{R}{m^2 - 1} \\ 0 & \frac{R}{m^2 - 1} & -\frac{R \cdot m}{m^2 - 1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_\Theta \\ p_n \end{bmatrix} \quad (\text{A-222})$$

Zur Bestimmung der partikulären Verformungen müssen vorerst die Verzerrungen zufolge der partikulären Schnittkräfte bestimmt werden (Gl. (A-223)). Basis dafür sind die konstitutiven Gleichungen.

$$\mathbf{e}_{\text{part}} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{n}_{\text{part}} \quad (\text{A-223})$$

Die Inverse der Materialmatrix hat folgendes Aussehen. Die Materialparameter sind wiederum auf die axiale Dehnsteifigkeit bezogen:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{D_x} \begin{bmatrix} \frac{\rho - k}{\rho - v^2 - k} & 0 & \frac{-v^*}{\rho - v^2 - k} & \frac{v}{\rho - v^2 - k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v^*}{\rho - v^2 - k} & 0 & \frac{1}{\rho - v^2 - k} & \frac{-1}{\rho - v^2 - k} & 0 \\ \frac{v}{\rho - v^2 - k} & 0 & \frac{-1}{\rho - v^2 - k} & \frac{\rho - v^2}{k(\rho - v^2 - k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{A-224})$$

Über die Verzerrungsoperatormatrix können die Verschiebungsgrößen bestimmt werden.

$$\mathbf{e}_{\text{part}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{\text{part}} \quad (\text{A-225})$$

Zur besseren Übersichtlichkeit werden die partikulären Verschiebungen für die einzelnen Belastungskomponenten getrennt in Gl. (A-226) angegeben.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{\text{part}} &= \frac{R^2}{\eta \cdot D_x} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p_x \\
 \mathbf{u}_{\text{part}} &= \frac{R^2}{D_x \cdot (m^2 - 1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\gamma(m^2 - 1)} + \frac{k(2m^2 + 1) - 1}{k(\rho - v^2 - k)m^2(m^2 - 1)^2} \\ -\frac{m}{\gamma(m^2 - 1)} + \frac{k(2m^2 + 1) - 1}{k(\rho - v^2 - k)m(m^2 - 1)^2} \\ \frac{1 - m^2 \cdot k}{(\rho - v^2 - k) \cdot m^2 \cdot k} \end{bmatrix} \cdot p_\Theta \\
 \mathbf{u}_{\text{part}} &= \frac{R^2}{D_x \cdot (m^2 - 1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-m}{\gamma(m^2 - 1)} - \frac{2m^2 + 1 + k}{(\rho - v^2 - k)m(m^2 - 1)} \\ \frac{-m^2}{\gamma(m^2 - 1)} + \frac{3k + 1}{k(\rho - v^2 - k)(m^2 - 1)} \\ \frac{k + 1}{(\rho - v^2 - k) \cdot m \cdot k} \end{bmatrix} \cdot p_n
 \end{aligned} \tag{A-226}$$

Die partikulären Verformungen müssen nun an den Rändern $\xi = 0$ bzw. $\xi = L/R$ ausgewertet werden. Für die Deformationsmethode werden nur die Axial- bzw. Tangentialverschiebungsgrößen verwendet:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{part}} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ U \\ V \end{bmatrix}_{\text{Part } \xi = 0} \quad \begin{bmatrix} U \\ V \\ U \\ V \end{bmatrix}_{\text{Part } \xi = \frac{L}{R}} \tag{A-227}$$

A.1.18 Analytische Lösung baustatischer Differentialgleichungen

Die folgenden Ausarbeitungen zur Lösung von baustatischen Differentialgleichungen sind von Guggenberger (1996) übernommen.

Die Differentialgleichung 4. Ordnung lautet in allgemeiner Form:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \pm 2\beta^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \pm 2\alpha^4 \right) \cdot V_{\text{hom}} = 0 \quad (\text{A-228})$$

Die Lösung erfolgt durch Ansatz der Exponentialfunktion.

$$V_{\text{hom}} = c \cdot e^{-\lambda \xi} \quad (\text{A-229})$$

Dabei ergibt sich folgendes charakteristisches Polynom zur Bestimmung von λ

$$P(\lambda) = \lambda^4 (\pm 2\beta^2 \cdot \lambda^2 \pm 2\alpha^4) = 0 \quad (\text{A-230})$$

Wurzeln des charakteristischen Polynoms und Fallunterscheidungen

Die 4 Wurzeln des charakteristischen Polynoms ergeben sich allgemein als 4 Punkte in der komplexen Zahlenebene, welche sowohl symmetrisch zur reellen Achse liegen (treten immer konjugiert komplex auf) als auch symmetrisch zur imaginären Achse liegen (wegen Beschränkung auf geradzahlige Ableitungen). Durch diese doppelte Symmetrie resultiert, daß diese 4 Wurzeln durch lediglich 2 Zahlen μ_1 und μ_2 eindeutig charakterisierbar sind und es ergeben sich, aus rein topologischen Überlegungen, folgende 9 Fallunterscheidungen. Diese möglichen Fälle der *Lage* der charakteristischen Wurzeln in der komplexen Zahlenebene können geometrisch in der komplexen Zahlenebene wie in nachfolgendem Bild dargestellt werden. Hierbei kann in den Fällen 1 und 2 die weitere, jedoch unwesentliche Besonderheit hinzukommen, daß die Zahlen μ_1 und μ_2 gleich sind ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$, Fälle 1' und 2').

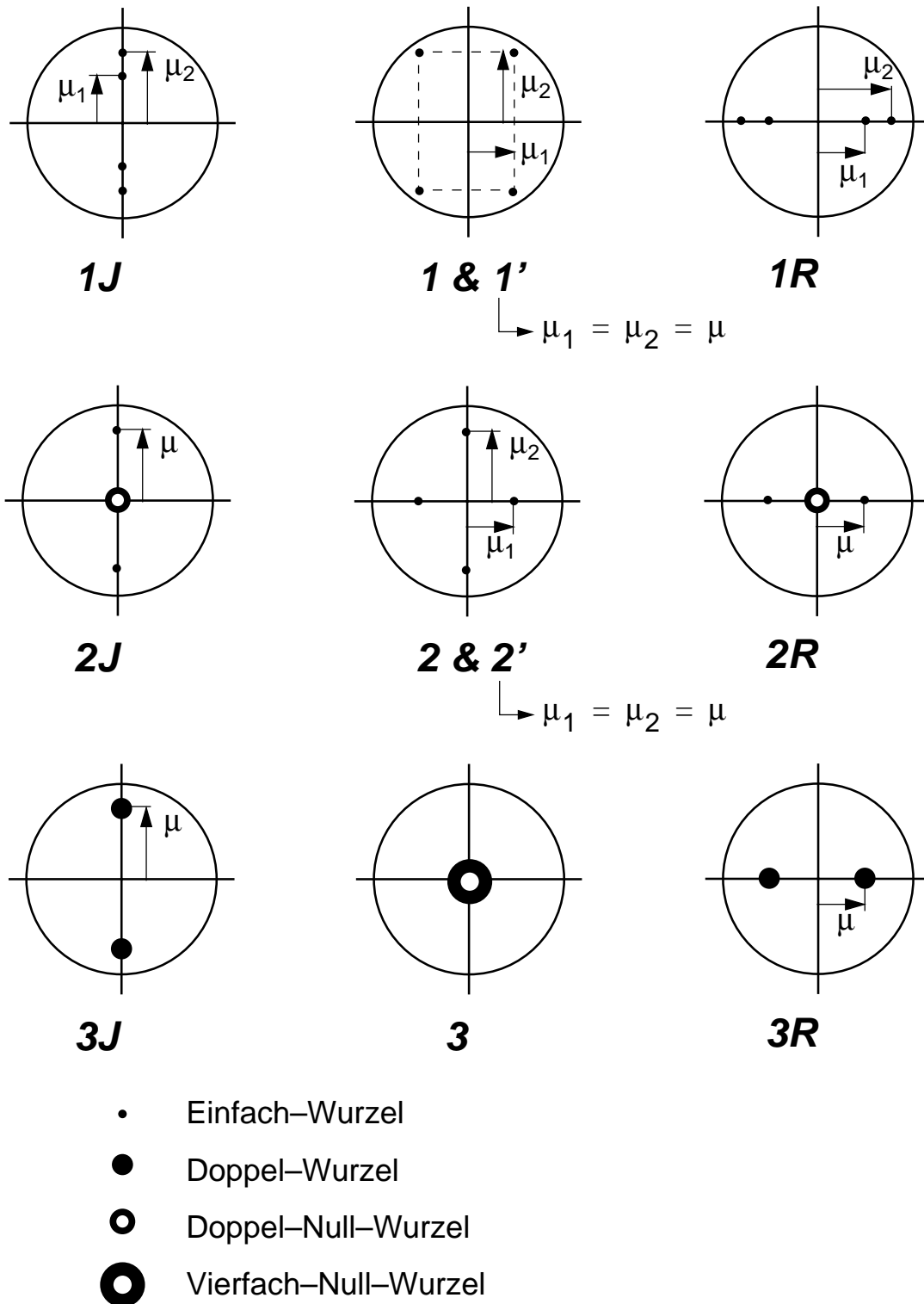


Bild A-9 Lage der charakteristischen Wurzeln in der komplexen Zahlenebene — Fallunterscheidungen

Typen von Fundamentalfunktionen

Entsprechend der zuvor herausgearbeiteten Fallunterscheidungen hinsichtlich der Lage der charakteristischen Wurzeln in der komplexen Zahlenebene ergeben sich, entsprechend dem exponentiellen Lösungsansatz und der Berücksichtigung des Grades der Vielfachheit dieser Wurzeln (Doppelwurzeln) bzw. Nullwurzeln (Doppel- bzw. Vierfach-Nullwurzeln) folgende zugeordneten Typen von Fundamentalfunktionen:

Tab. A-13 Typen von Fundamentalfunktionen: $\mathbf{f}^T = [f_1, f_2, f_3, f_4]$

		Lösungstyp der Differentialgleichung		
		J	-	R
1	$\begin{bmatrix} \sin \mu_1 \xi \\ \cos \mu_1 \xi \\ \sin \mu_2 \xi \\ \cos \mu_2 \xi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{Sinh} \mu_1 \xi \cdot \sin \mu_2 \xi \\ \text{Cosh} \mu_1 \xi \cdot \sin \mu_2 \xi \\ \text{Sinh} \mu_1 \xi \cdot \cos \mu_2 \xi \\ \text{Cosh} \mu_1 \xi \cdot \cos \mu_2 \xi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{Sinh} \mu_1 \xi \\ \text{Cosh} \mu_1 \xi \\ \text{Sinh} \mu_2 \xi \\ \text{Cosh} \mu_2 \xi \end{bmatrix}$	
2	$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \sin \mu \xi \\ \cos \mu \xi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{Sinh} \mu_1 \xi \\ \text{Cosh} \mu_1 \xi \\ \sin \mu_2 \xi \\ \cos \mu_2 \xi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \text{Sinh} \mu \xi \\ \text{Cosh} \mu \xi \end{bmatrix}$	
3	$\begin{bmatrix} \sin \mu \xi \\ \cos \mu \xi \\ \xi \cdot \sin \mu \xi \\ \xi \cdot \cos \mu \xi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2/2 \\ \xi^3/6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{Sinh} \mu \xi \\ \text{Cosh} \mu \xi \\ \xi \cdot \text{Sinh} \mu \xi \\ \xi \cdot \text{Cosh} \mu \xi \end{bmatrix}$	

Explizite Berechnung der Wurzeln des charakteristischen Polynoms und Zuordnung von Fundamentalfunktionen

Tab. A-14 Charakteristische Zahlen μ_1 und μ_2 & Fundamentalfunktionen

FALL	β	α	D	μ_1	μ_2	TYP
1			< 1	$\alpha \cdot \sqrt{(1-\kappa)/2}$	$\alpha \cdot \sqrt{(1+\kappa)/2}$	1
2	+	+	$\kappa = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1$	α		3J
3		> 1		$\alpha \cdot \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}}$	$\alpha \cdot \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}$	1J
4				α, β beliebig	$\alpha \cdot \sqrt{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1}}$	$\alpha \cdot \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1}}$
5	+	-				
6						
7			< 1	$\alpha \cdot \sqrt{(1+\kappa)/2}$	$\alpha \cdot \sqrt{(1-\kappa)/2}$	1
8	-	+	$\kappa = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 1$	α		3R
9		> 1		$\alpha \cdot \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}}$	$\alpha \cdot \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}$	1R
10				α, β beliebig	$\alpha \cdot \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1}}$	$\alpha \cdot \sqrt{-\kappa + \sqrt{\kappa^2 + 1}}$
11	-	-				
12						
13	+	0	β beliebig	$\sqrt{2} \cdot \beta$		2J
14	-					2R
15	0	+	α beliebig	$\alpha/\sqrt{2}$		1'
16		-				2'
17	0	0	—	—		3

wobei: $\kappa = (\beta/\alpha)^2 > 0$ oder $\beta = \alpha \cdot \sqrt{\kappa}$

Ableitungen der Fundamentalfunktionen (Berechnung der Ableitungsmatrizen)

Entsprechend den 9 Typen von Fundamentalfunktionen werden nachfolgend, getrennt für jeden Typ, deren erste Ableitungen berechnet, die sich in Form einer einfachen Matrizenmultiplikation ergeben wird. Hierbei wird die Tatsache ausgenutzt, daß sich jede Ableitung einer Fundamentalfunktion immer als Linearkombination der 4 Fundamentalfunktionen desselben Typs darstellen läßt. Die höheren Ableitungen berechnen sich dann einfach durch mehrmalige Anwendung, d.h. durch ein mehrfach hintereinander geschaltetes Matrizenprodukt (= Matrizenpotenz).

Tab. A-15 Ableitungsmatrizen D_j der Fundamentalfunktionen:

		derivative matrices of fundamental functions		
		J	-	R
1		$\begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & \mu_2 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & -\mu_2 & \mu_1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix}$
2		$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \mu & 0 \end{bmatrix}$
3		$\begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & -\mu & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \mu & 0 \end{bmatrix}$

A.2 Grundgleichungen des elastischen räumlich belasteten Kreisbogenträgers

Die Grundgleichungen des Kreisringträgers sind den Ausarbeitungen von Greiner, Guggenberger (1990) bzw. Guggenberger (1991) entnommen. Sie sind dabei für

- beliebige Querschnittsformen
- Berücksichtigung der Querschubverformungen
- Berücksichtigung der klassischen Wölbkrafttorsion (Wagner-Hypothese)

aufbereitet.

Als Bezugspunkte der Grundgleichungen werden der Schwerpunkt S und der Schubmittelpunkt M verwendet. Die Querschnittsachsen sind dabei auch im Fall allgemeiner Querschnittsformen vertikal bzw. horizontal.

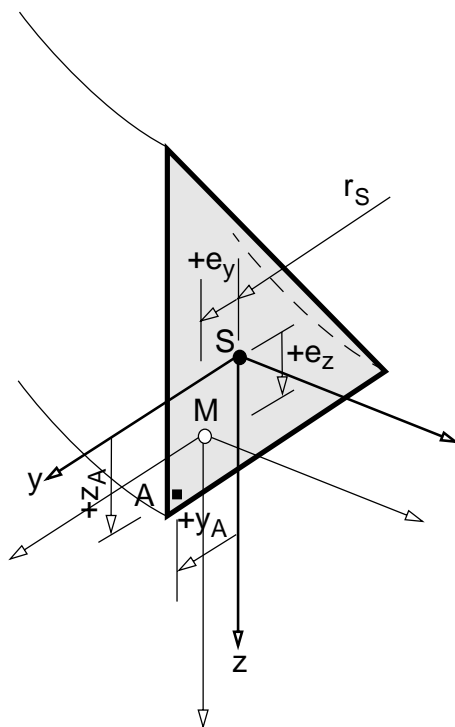
A.2.1 Kinematische Annahmen

Die Kinematik des Kreisringträgers in Gl. (A-231) wird mit drei Verschiebungsgrößen und drei Drehparametern beschrieben (Bild A-11) Die Verschiebungen eines beliebigen Punktes ergeben sich somit aus:

- Umfangsverschiebung u der Schwerpunktslinie
- Radialverschiebung v und Vertikalverschiebung w der Schubmittelpunktslinie
- Drehparametern β_y und β_z (Querschnittsdrehung um die y - bzw. z -Achse)
- Verdrehung φ der Schubmittelpunktslinie und der Verwölbungsamplitude (Wölbfunktion ω) des Querschnittes

Die Beschreibung der Kinematik erfolgt kennfaserorientiert, der Drehparameter β_z ist positiv definiert, wenn die entstehenden Umfangsverschiebungen u für Querschnittspunkte mit positiven Querschnittsordinaten y und z positiv sind (Bild A-11). Der Drehvektor weist somit in die negative z - Richtung.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \Big|_A = \begin{bmatrix} u|_S \\ v|_M \\ w|_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \cdot \beta_y + y \cdot \beta_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \cdot \varphi \\ y \cdot \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{(y,z)} \varphi' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-231})$$



S Schwerpunkt
M ... Schubmittelpunkt
A beliebiger Punkt

Bild A-10 Ausgezeichnete Punkte des Kreisringträgers

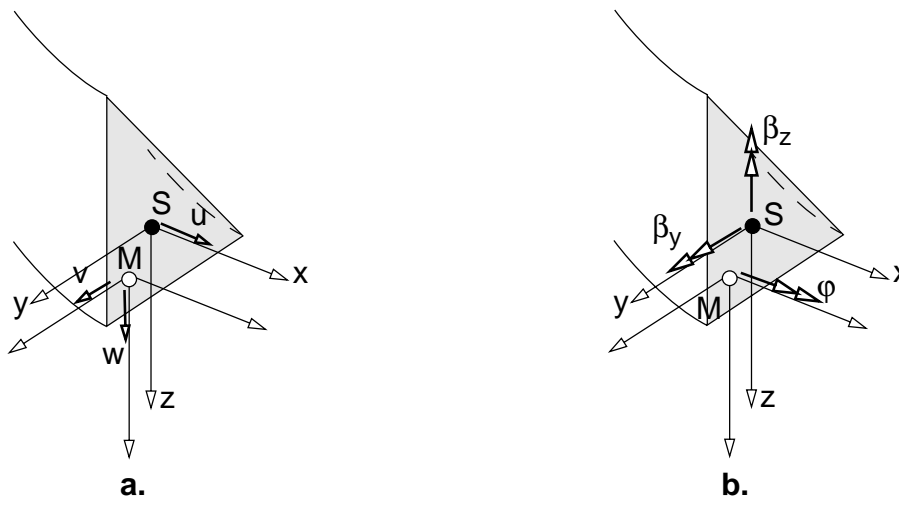


Bild A-11 Verformungsgrößen des Kreisringträgers — **a.** Verschiebungsgrößen und **b.** Drehparameter

A.2.2 Schnittkräfte des Kreisbogenträgers

Die Grundgleichungen des Kreisbogenträgers sind im folgenden in dimensionsreiner Darstellung aufbereitet. Es erfolgt der Bezug auf die ausgezeichneten Querschnittspunkte des Kreisringträgers.

- Die Querkräfte Q_y bzw. Q_z und das Torsionsmoment M_t wirken im Schubmittelpunkt M.
- Die Normalkraft N und die Biegemomente M_y bzw. M_z wirken im Schwerpunkt S.

Alle Grundgleichungen des Kreisringträgers sind auf die horizontale bzw. vertikale Querschnittsachse bezogen. Es muß daher bei allgemeiner Querschnittsform keine Hauptachsentransformation durchgeführt werden. Dies ist sinnvoll, da bei allgemeinen Querschnittsformen die Hauptachsen bezüglich der Biegesteifigkeiten (Hauptträgheitsachsen) und jene der Schubsteifigkeiten nicht parallel sind.

Tab. A-16 Verformungs- und Schnittgrößen des Kreisringträgers

Verformungsgrößen		Schnittgrößen		Bezugspunkt	Bezugsachse
Verschiebungen	u	Normalkraft	N	S	Längsachse (x-Achse)
	v	Querkräfte	Q_y	M	horizontale y-Achse
	w		Q_z	M	vertikale y-Achse
Verdrehungen	φ	Torsionsmoment	M_z	M	Längsachse (x-Achse)
	β_y	Biegemomente	M_y	S	horizontale y-Achse
	β_z		M_z	S	vertikale z-Achse

Die Biegesteifigkeiten sind somit um die Koppelbiegesteifigkeit K_{yz} , die Schubsteifigkeiten und die Koppelschubsteifigkeit S_{yz} erweitert.

Das Biegemoment M_z ist entsprechend der Festlegung des Drehparameters β_z positiv, wenn es im ersten Quadranten (Querschnittskordinaten y und z sind positiv) Zugspannungen erzeugt. Der Momentenvektor weist somit in die negative z-Richtung.

Im folgenden wird der Radius am Schwerpunkt des Ringträgers mit r_S bezeichnet. Der Radius r_M des

Schubmittelpunktes ergibt sich durch den Abstand vom Schwerpunkt S.

$$r_M = r_S + e_y = r_S \cdot (1 + e_y/r_S) = r_S \cdot \rho \quad (\text{A-232})$$

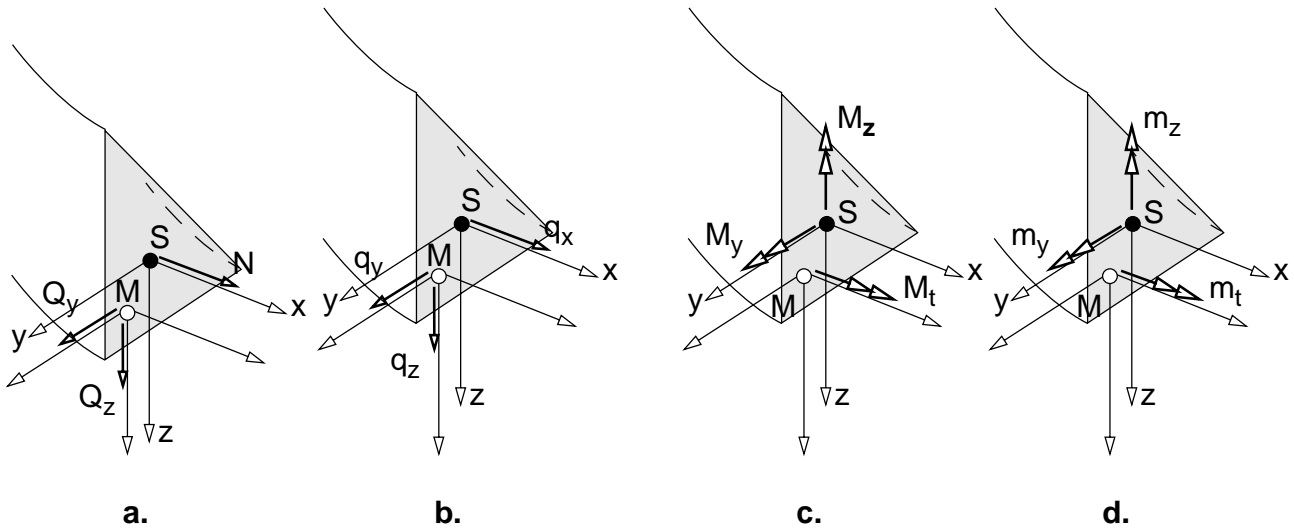


Bild A-12 Schnittkräfte und Belastungsgrößen des Kreisringträgers —
a. Normal- und Querkräfte, **b.** Streckenbelastungen, **c.** Biege- und Torsionsmomente und **d.** Streckenmomentenbelastungen

A.2.3 Grundgleichungen in Matrixform

A.2.3.1 Gleichgewichtsdifferentialgleichungen

Die Gleichgewichtsgleichungen des infinitesimalen Kreisbogenträgerelementes sind in Gl. (A-233) dargestellt.

$$\frac{1}{r_S} \begin{bmatrix} (\cdot)_{,\Theta} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (\cdot)_{,\Theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,\Theta} & 0 & 0 & 0 \\ -e_z/r_S & 0 & 0 & (\cdot)_{,\Theta} & 1 & 0 \\ 0 & e_z/r_S & -\rho & -1 & (\cdot)_{,\Theta} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & (\cdot)_{,\Theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_t/r_S \\ M_y/r_S \\ M_z/r_S \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \cdot \rho \\ q_z \cdot \rho \\ m_t \cdot \rho/r_S \\ m_y/r_S \\ m_z/r_S \end{bmatrix} \quad (\text{A-233})$$

$\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{p}$

A.2.3.2 Konstitutive Gleichungen

Die konstitutiven Gleichungen — Materialgleichungen — des elastischen Kreisbogenträgers sind in Gl. (A-234) dargestellt, die verwendeten Steifigkeitsparameter sind in Gl. (A-235a) bis Gl. (A-235e) definiert.

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_t/r_S \\ M_y/r_S \\ M_z/r_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & -K_{yz} & -K_{yy} \\ 0 & S_{yy} & S_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{yz} & S_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_t - K_w (\cdot)_{,\Theta\Theta} & 0 & 0 \\ -K_{yz} & 0 & 0 & 0 & K_{zz} & K_{yz} \\ -K_{yy} & 0 & 0 & 0 & K_{yz} & K_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma_y \\ \gamma_z \\ \vartheta \cdot r_S \\ \kappa_y \cdot r_S \\ \kappa_z \cdot r_S \end{bmatrix} \quad (\text{A-234})$$

$\mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}$

Alle Steifigkeiten weisen durch die dimensionsreine Formulierung die Einheit einer Kraft auf. Der Effekt starker Krümmung des Kreisringträgers ist in der Dehnsteifigkeit D und in der Materialmatrix \mathbf{D} durch die Koppelung von Normalkraft- und Biegemomenten berücksichtigt. Der Bezug auf vertikale und horizontale Querschnittsachsen bei allgemeinen Querschnittsformen wird durch die Koppelschubsteifigkeit S_{yz} und die Koppelbiegesteifigkeit K_{yz} berücksichtigt. Die Torsionsschubsteifigkeit S_t ergibt sich aus dem St. Venant'schen Torsionsträgheitsmoment I_t des Querschnittes, die Wölbsteifigkeit K_w folgt aus dem Wölbträgheitsmoment I_w .

$$D = EA^* = EA(1 + I_{yy}/(A \cdot r_S^2)) \quad (\text{A-235a})$$

$$\begin{aligned}
 S_{yy} &= GA_{syy} \\
 S_{yz} &= GA_{syz} \\
 S_{zz} &= GA_{szz}
 \end{aligned}
 \tag{A-235b}$$

$$\begin{aligned}
 K_{yy} &= EI_{yy}/r_S^2 = E(\int y^2 dA)/r_S^2 \\
 K_{yz} &= EI_{yz}/r_S^2 = E(\int yz dA)/r_S^2 \\
 K_{zz} &= EI_{zz}/r_S^2 = E(\int z^2 dA)/r_S^2
 \end{aligned}
 \tag{A-235c}$$

$$S_t = GI_t/r_S^2 \tag{A-235d}$$

$$K_w = EI_w/r_S^4 = E(\int \omega^2 dA)/r_S^4 \tag{A-235e}$$

Die kinematischen Gleichungen — der Zusammenhang von Verzerrungsvektor \mathbf{e} und Verformungsvektor \mathbf{u} — sind in Gl. (A-236) dargestellt.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \overline{\gamma}_y \\ \overline{\gamma}_z \\ \vartheta \cdot r_S \\ \kappa_y \cdot r_S \\ \kappa_z \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} = \frac{1}{r_S} \underbrace{\begin{bmatrix} ()'_{\Theta} & 1 & 0 & e_z/r_S & 0 & 0 \\ -1 & ()'_{\Theta} & 0 & 0 & -e_z/r_S & 1 \\ 0 & 0 & ()'_{\Theta} & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ()'_{\Theta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & ()'_{\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ()'_{\Theta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \cdot r_S \\ \beta_y \cdot r_S \\ \beta_z \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}
 \tag{A-236}$$

A.2.3.3 Grundgleichung der Deformationsmethode

Die Grundgleichung der Deformationsmethode folgt aus der Verknüpfung der drei Grundgleichungen. Die Matrix \mathbf{K} ist dabei die Steifigkeitsoperatormatrix, die Determinante von \mathbf{K} liefert die Differentialgleichung des räumlich beanspruchten Kreisringträgers.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{n} &= -\mathbf{p} \\
 \mathbf{n} &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \\
 \mathbf{e} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}
 \end{aligned}
 \tag{A-237}$$

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{p}$$

Diskretisierung mittels Fourierreihenansatz in Umfangsrichtung

Für die Lösung der Ringträgergleichungen erfolgt durch einen Fourierreihenansatz in Umfangsrichtung. Dadurch werden aus den Grundgleichungen mit Differentialgleichungssystemen algebraische Gleichungssysteme.

Die Verformungen und die zugehörigen Belastungsgrößen werden durch folgende Sinus- bzw. Cosinusreihen wiedergegeben.

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} U_m \sin m\Theta \quad (\text{A-238a})$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos m\Theta \quad (\text{A-238b})$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} W_m \cos m\Theta \quad (\text{A-238c})$$

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m \cos m\Theta \quad (\text{A-238d})$$

$$\beta_y = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{ym} \sin m\Theta \quad (\text{A-238e})$$

$$\beta_z = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{zm} \sin m\Theta \quad (\text{A-238f})$$

A.2.3.4 Elastische Bettung des Kreisbogenträgers

Die elastische Bettung des Kreisbogenträgers erfolgt durch den unteren Schalenrand des Siloschaftes. Dabei wirken am Ringträger gekoppelte Wegfedern im Anschlußpunkt des Schaftes. Für die Bezugspunkte — Schwerpunkt S und Schubmittelpunkt M — bedeutet dies durch die vorhandene Exzentrizität des Schalenanschlußpunktes eine elastische Bettung durch gekoppelte Weg- und Drehfedern.

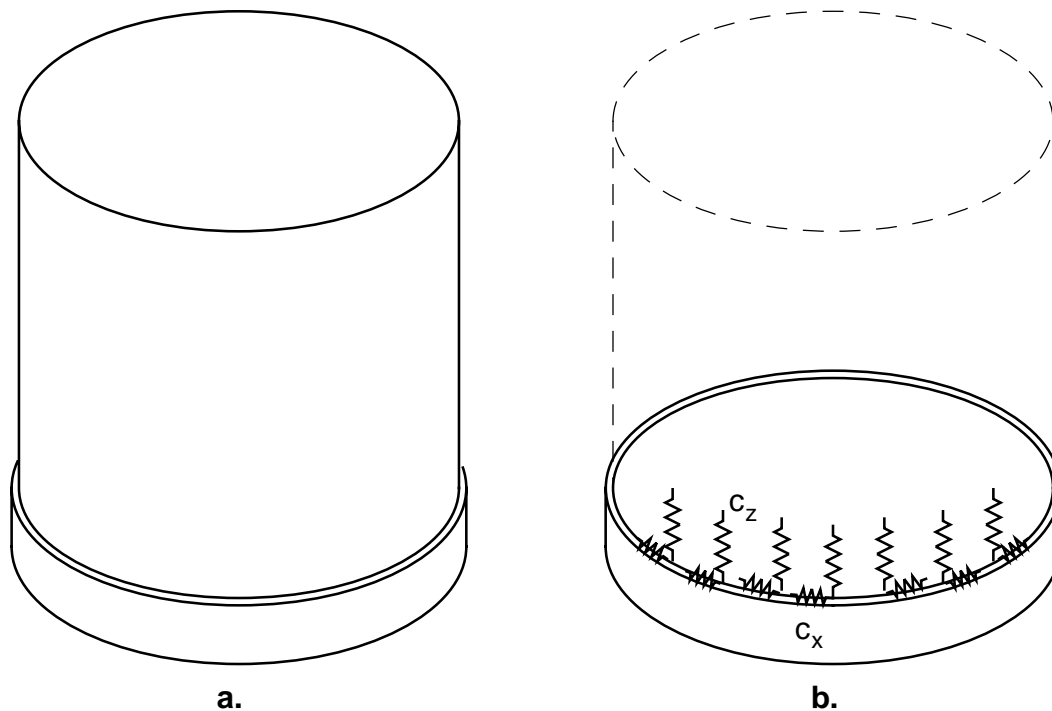


Bild A-13 **a.** Integrierter Kreisringträger und **b.** elastische Bettung des Kreisringträgers durch den unteren Schalenrand des Siloschaftes

Vorweg wird die elastische Bettung durch entkoppelte Weg- und Drehfedern dargestellt.

Elastische Bettung durch entkoppelte Weg- und Drehfedern

In Bild A-14 ist elastischer Bettung des Kreisringträgers dargestellt. Dabei erfolgt die Bettung durch entkoppelte Federn:

- im Schwerpunkt S angreifende Wegfeder c_x
- im Schubmittelpunkt M angreifende Wegfedern c_y und c_z
- im Schwerpunkt S angreifenden Drehfedern c_{β_y} und c_{β_z}
- im Schubmittelpunkt M angreifende Drehfeder c_{φ}

Die elastische Bettung ergibt durch die aktuellen Verschiebungen direkt ihren Beitrag in den Gleichgewichtsgleichungen ein (Gl. (A-239)).

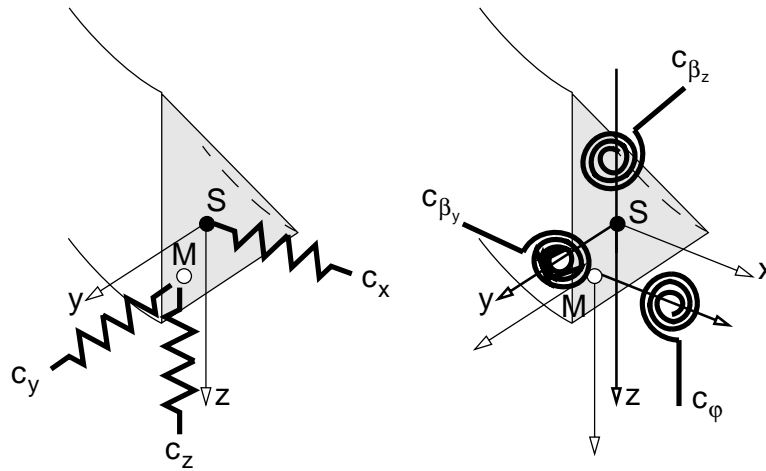


Bild A-14 Elastische Bettung des Kreisringträgers

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_y \cdot \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_z \cdot \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_t \cdot \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{\beta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{\beta_z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \cdot \rho \\ q_z \cdot \rho \\ m_t \cdot \rho \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}}_{-\mathbf{p}} \quad (\text{A-239})$$

Transformation einer im Punkt A angreifenden elastischen Bettung

Im allgemeinen wirken die Einzelfedern der elastischen Bettung nicht im Schwer- bzw. Schubmittelpunkt sondern an einem beliebigen Punkt A des Dreiecksträgers.

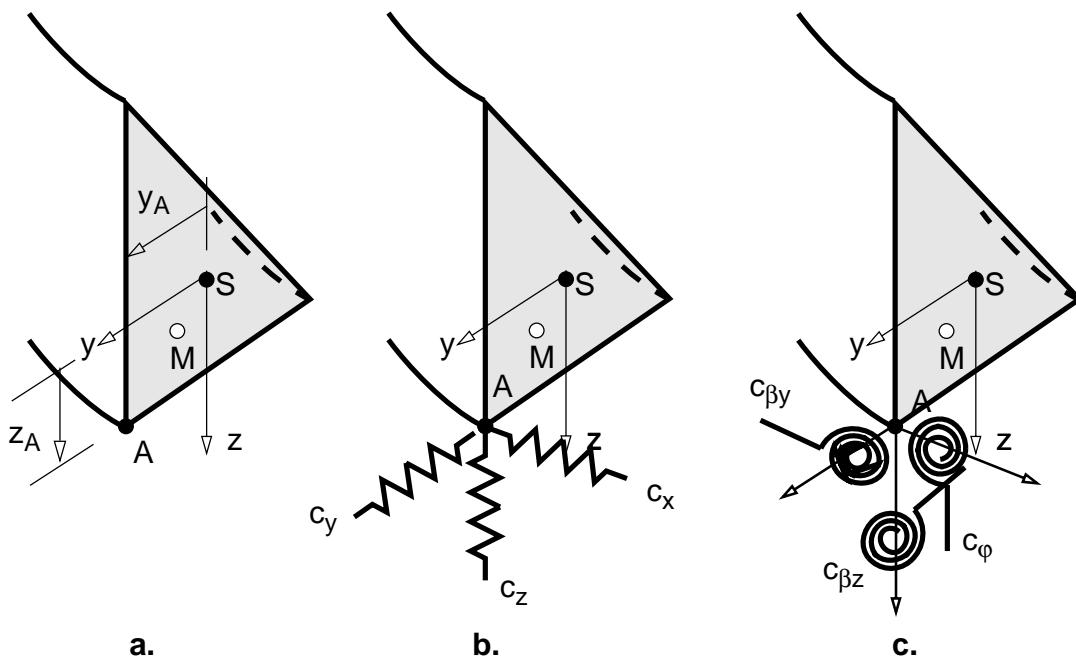


Bild A-15 Elastische Bettung des Kreisringträgers —
a. Lage von Punkt A, **b.** elastische Bettung und **c.** elastische Drehbettung

Zur Transformation der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_C , der in Punkt A angreifenden Weg- und Drehfedern, müssen sowohl die Verschiebungen als auch das Kräftegleichgewicht des Punktes A mit den ausgezeichneten Bezugspunkten des Kreisringträgers in Zusammenhang gebracht werden. dies geschieht durch die Transformationsmatrix \mathbf{T}

Der Zusammenhang zwischen den Verformungen des Punktes A und den Verformungen von Schwer- bzw. Schubmittelpunkt ergibt sich aus den kinematischen Annahmen des Kreisringträgers (Gl. (A-240a)), zufolge der Drehparameter ergeben sich zusätzliche Verschiebungsgrößen. Die Beschreibung erfolgt mithilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T} (Gl. (A-240b)).

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} u|_S \\ v|_M \\ w|_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z_A & y_A \\ -(z_A - e_z) & 0 & 0 \\ y_A - e_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi|_M \\ \beta_y|_S \\ \beta_z|_S \end{bmatrix} \quad (\text{A-240a})$$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_A} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_A & y_A \\ 0 & 1 & & -(z_A - e_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_A - e_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{S, M}} \quad (\text{A-240b}) \\
 \mathbf{u}_A &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{S, M}
 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den Kräften bzw. Belastungsgrößen des Punktes A und jenen von Schwer- bzw. Schubmittelpunkt wird durch die transponierte Transformationsmatrix \mathbf{T}^T hergestellt. Zusätzlich wird noch mit dem Radienverhältnis r_A/r_s vorweg multipliziert, dies gibt die unterschiedlichen Bogenlängen des infinitesimalen Kreisträgerelementes wieder.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} p_x|_S \\ p_y|_M \\ p_z|_M \\ m_t|_M \\ m_y|_S \\ m_z|_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_{S, M}} &= \frac{r_A}{r_s} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(z_A - e_z) & y_A - e_y & 1 & 0 & 0 \\ z_A & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ y_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ m_t \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_A} \quad (\text{A-241}) \\
 \mathbf{p}_{S, M} &= \frac{r_A}{r_s} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{p}_A
 \end{aligned}$$

Transformation der Steifigkeitsmatrix der elastischen Bettung

Die transformierte Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Transformation der Gleichgewichtsgleichungen und der Verschiebungsgrößen (Gl. (A-242a)). Durch die Transformation entsteht im allgemeinen eine vollbesetzte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{c, S, M}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{r_A}{r_s} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{p}_A &= -\mathbf{p}_{S, M} \\
 \mathbf{p}_A &= -\mathbf{K}_{c|_A} \cdot \mathbf{u}_A \\
 \mathbf{u}_A &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{S, M} \quad (\text{A-242a})
 \end{aligned}$$

$$\frac{r_A}{r_s} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_{c, A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{S, M} = -\mathbf{p}_{S, M}$$

$$\mathbf{K}_{c, S, M} = \frac{r_A}{r_s} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_{c, A} \cdot \mathbf{T} \quad (\text{A-242b})$$

Elastische Bettung des Ringträgers durch den unteren Rand des Siloschafts

Der Schaft wird als Semi-Membran-Schale modelliert. Das Schalenelement weist somit nur Steifigkeiten bezüglich der Axial- und Tangentialverschiebungen (= Umfangs- und Vertikalverschiebung des Ringträgers) der Schale auf. Die Steifigkeitsmatrix für ein Glied m der Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung ist somit eine 2×2 Matrix, die zugehörige Verschiebungsgrößen des Ringträgers sind die Verschiebung in Umfangsrichtung u und die Vertikalverschiebung w des Ringträgers.

- Die Semi-Membranschale ergibt eine elastische Bettung mit gekoppelten Wegfedern des Ringträgers im Punkt A.
- Für den Schwer- bzw. Schubmittelpunkt folgen in Gl. (A-243b) eine zusätzliche Drehbettung mit gekoppelten Drehfedern. Dabei ist $y_M = y_A - e_y$ der Abstand des Punktes A vom Schubmittelpunkt M.

$$\mathbf{K}_{S,A} = \begin{bmatrix} K_S(2,2) & 0 & K_S(1,2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_S(1,2) & 0 & K_S(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-243a})$$

$$\mathbf{K}_{S,S,M} = \frac{r_A}{r_S} \begin{bmatrix} K_S(2,2) & 0 & K_S(1,2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_S(1,2) & 0 & K_S(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_S(1,1)y_M^2 & K_S(1,2)z_A y_M & K_S(1,2)y_A y_M \\ 0 & 0 & 0 & K_S(1,2)z_A y_M & K_S(2,2)z_A^2 & K_S(2,2)y_A z_A \\ 0 & 0 & 0 & K_S(1,2)y_A y_M & K_S(2,2)y_A z_A & K_S(2,2)y_A^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-243b})$$

A.2.3.5 Sonderfälle des räumlichen Kreisringträgers

Spezialisierungen bezüglich der Querschnittsform und den wirkenden Belastungen führen zur Entkoppelung der allgemeinen räumlichen Tragwirkung des Kreisringträgers in die

- Trägerrosttragwirkung und die
- Tragwirkung des ebenen Kreisringträgers

Belastung senkrecht zur Kreisträger-Ebene — Trägerrosttragwirkung

Als Voraussetzungen sind hier zu nennen:

- Querschnitt ist einfachsymmetrisch bezüglich der vertikalen z-Achse — Radius von Schubmittelpunkt M und Schwerpunkt S sind ident ($\mathbf{e}_y = 0$ bzw. $r_S = r_M$). Daraus folgt, daß die Biegesteifigkeit K_{yz} zu Null wird
- die Belastungen des Kreisringträgers sind zugehörig zu den Schnittkräften der Trägerrosttragwirkung ($q_x = q_y = m_z = 0$)

Als problembeschreibende Größen verbleiben:

- Vertikalverschiebung w , der Drehparameter β_y und Torsionsverdrehung ϑ
- Querkraft Q_z , Biegemoment M_y und das Torsionsmoment M_t

Die Gleichgewichtsgleichungen sind in Gl. (A-244a), die Materialgleichungen in Gl. (A-244b) und die kinematischen Gleichungen in Gl. (A-244c) dargestellt.

$$\underbrace{\frac{1}{r_S} \begin{bmatrix} ()',_{\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & ()',_{\Theta} & 1 \\ -1 & -1 & ()',_{\Theta} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} Q_z \\ M_t/r_S \\ M_y/r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} = \underbrace{- \begin{bmatrix} q_z \\ m_t \cdot r_S \\ m_y/r_S \end{bmatrix}}_{-\mathbf{p}} \quad (\text{A-244a})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_z \\ M_t/r_S \\ M_y/r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & S_t - K_w ()',_{\Theta\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_z \\ \vartheta \cdot r_S \\ \kappa_y \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} \quad (\text{A-244b})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_z \\ \vartheta \cdot r_S \\ \kappa_y \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} = \underbrace{\frac{1}{r_S} \begin{bmatrix} ()',_{\Theta} & 0 & 1 \\ 0 & ()',_{\Theta} & 1 \\ 0 & -1 & ()',_{\Theta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ \varphi \cdot r_S \\ \beta_y \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (\text{A-244c})$$

Belastung parallel zur Kreisringträger-Ebene — Tragwirkung des ebenen Kreisringträgers

Als Voraussetzungen sind hier zu nennen:

- Querschnitt ist einfachsymmetrisch bezüglich der vertikalen y -Achse ($e_z = 0$). Daraus folgt, daß die Biegesteifigkeit K_{yz} zu Null wird
- die Belastungen des Kreisringträgers sind zugehörig zu den Schnittkräften der ebenen Tragwirkung ($q_z = m_y = m_t = 0$)

Als problembeschreibende Größen verbleiben:

- Umfangsverschiebung u , Radialverschiebung v und der Drehparameter β_z
- Normalkraft N , Querkraft Q_y und das Biegemoment M_z

Die Gleichgewichtsgleichungen sind in Gl. (A-245a), die Materialgleichungen in Gl. (A-245b) und die kinematischen Gleichungen sind in Gl. (A-245c) dargestellt.

$$\underbrace{\frac{1}{r_S} \begin{bmatrix} ()'_{,\theta} & 1 & 0 \\ -1 & ()'_{,\theta} & 0 \\ 0 & -1 & ()'_{,\theta} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ M_z/r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} = \underbrace{- \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \cdot \rho \\ m_z/r_S \end{bmatrix}}_{-\mathbf{p}} \quad (\text{A-245a})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ M_z/r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} D & 0 & -K_{yy} \\ 0 & S_{yy} & 0 \\ -K_{yy} & 0 & K_{yy} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \bar{\gamma}_y \\ \kappa_z \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} \quad (\text{A-245b})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \bar{\gamma}_y \\ \kappa_z \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}} = \underbrace{\frac{1}{r_S} \begin{bmatrix} ()'_{,\theta} & 1 & 0 \\ -1 & ()'_{,\theta} & 1 \\ 0 & 0 & ()'_{,\theta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ \beta_z \cdot r_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (\text{A-245c})$$

Literatur

Baustatik und Festigkeitslehre

Parkus, H. (1987). *Mechanik der festem Körper*. Springer-Verlag

Salzgeber, G. (1998). *Nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabtragwerken aus Stahl*. Dissertation, Technische Universität Graz.

Salzgeber, G. (2000). *Nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabtragwerken aus Stahl*. Heft 10/ 2000, Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.

Steinwender, L.G (2000). *Elastostatik des ebenen Kreisbogenträgers*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz.

Unold (1922). *Der Kreisringträger*. Forschungsarbeit an der Geb. des Ingenieurwesens. Heft 225, Berlin.

Berechnung von Schalenträgern

Donnell, L.H. (1934). *A new theory for the Buckling of thin Cylinders under Axial Compression and Bending*. Trans. Americ. Soc. Eng. 56.

Flügge, W. (1960). *Stresses in Shells*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Greiner, R. (1972). *Ein baustatisches Lösungsverfahren zur Beulberechnung dünnwandiger Kreiszyklinderschalen unter Manteldruck*. Ernst & Sohn, Berlin.

Greiner, R. (1980). *Ingenieurmässige Berechnung dünnwandiger Kreiszyklinderschalen*. Heft 1/ 1980, Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.

Guggenberger, W (1987). *Rückführung aller Zylinder-Semi-Membran-Theorien auf Spezialfälle der allgemeinen Zylinderbiegetheorien bei orthotropem Materialverhalten*. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz (unveröffentlicht).

Guggenberger, W. (1997). *Die Berechnung rotationssymmetrischer Biegeandstörungsprobleme mithilfe eines Kreisringträger- Analogiemodelles*. Vorlesungsskriptum AK Baustatik. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz (unveröffentlicht).

Linder, C. (2001). *Theorie der allgemeinen Rotationsschale und Entwicklung eines Kreisringträger- Analogiemodelles zur Berechnung axialsymmetrischer Biegeandstörungen*. Diplomarbeit, TU Graz

Mang (1966). *Berechnung und Konstruktion ringversteifter Druckrohrleitungen*. Springer-Verlag

Sawczuk, A. and Hodge, P.G. (1960). *Comparison of Yield Conditions for Circular Cylindrical Shells*. Journal of Franlin Institut, Vol. 269, No. 5.

Schardt, R. und Steingaß, J. (1970). *Eine Erweiterung der Technischen Biegelehre für die Berechnung dünnwandiger geschlossener Kreiszyklinderschalen*. Der Stahlbau 39(3), Ernst & Sohn, Berlin.

Schnell, W. (1955). *Krafteinleitung in versteifte Kreiszyklinderschalen*. Zeitschrift für Flugwissenschaften (3)

Steingaß, J. (1972). *Ein Beitrag zur Klärung des Tragverhaltens von geschlossenen isotropen Kreiszyklinderschalen*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt.

Berechnung von Stahl-Silokonstruktionen

Eurocode 3 – Teil 1.6 (1999). *prENV 1993-1-6 — Eurocode 3: Design of Steel Structures — Part 1.6.: General Rules: Supplementary Rules for Shell Structures*. CEN, European Committee for Standardisation, Brüssel.

Eurocode 3 – Teil 4.1 (1999). *prENV 1993-4-1 — Eurocode 3: Design of Steel Structures — Part 4.1.: Silos*. CEN, European Committee for Standardisation, Brüssel.

Greiner, R. (1984). *Zur Längskrafteinleitung in stehende zylindrische Behälter aus Stahl*. Der Stahlbau 53 (7), Ernst & Sohn, Berlin.

Greiner, R. & Guggenberger, W. (1990). *Zur Tragringberechnung punktgestützter zylindrischer Silos aus Stahl*. Festschrift Schardt, Band 51, THD-Schriftenreihe Wissenschaft und Technik, Technische Hochschule Darmstadt.

Guggenberger, W. & Wallner, S. (1996). *Patch Loads and their Use in Metal Silo Design — Strand 3: Effect of Patch Loads on stiffened circular cylindrical Silos*. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.

Guggenberger, W. et al (1998a). *Axialbelastete Kreiszyklinderschalen auf Einzelstützen - Numerische Tragverhaltensstudie, Versuchsergebnisse und Bemessungsvorschläge*. Stahlbau 67 (6), Ernst & Sohn Berlin.

Guggenberger, W. (1999b). *Proposal for Design Rules of axially loaded Steel Cylinders on local Supports*. Thin-Walled Structures, Vol. 31 (1998), Elsevier

Guggenberger, W. et al (1998c). *Schadensfall, Schadensanalyse und Schadensbehebung eines Silos auf 8 Einzelstützen*. Stahlbau 67 (6), Ernst & Sohn, Berlin.

Guggenberger, W. & Wallner, S. (1998). *Traglaststudie Stahlblechsilo 'Webersberger' (Fa. Doubrava GmbH)*. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz (unveröffentlicht).

Guggenberger, W. & Wallner, S. (1999a). *Traglaststudie 'Kegelauflagerung' Stahlblechsilo 'Webersberger' (Fa. Doubrava GmbH)*. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz (unveröffentlicht).

Guggenberger, W. & Wallner, S. (1999b). *Rational design method for metal silo structures based on linear and nonlinear shell analysis*. Proceedings of the 40th IASS Anniversary Congress for Shell and Spatial Structures, Madrid.

Guggenberger, W. (2000). *FFF-Projektvorschlag: Entwicklung innovativer Berechnungs- und Bemessungsmethoden für den Stahlsilobau / Automatisierte Berechnung und Bemessung komplexer Silokonstruktionen aus Stahl*. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.

Martens, P. (Hrsg) (1988). *Silohandbuch*. Ernst & Sohn, Berlin

- Öry, H. et al (1984). *Beitrag zur Bemessung der Schalen von Metallsilos*. Der Stahlbau 53 (8), Ernst & Sohn, Berlin.
- Rotter, J.M. (1985). *Analysis and Design of Ringbeams*. In Design of Steel Bins for the Storage of Bulk Solids, edited by J.M. Rotter, University of Sydney, March 1985, pp 164-183.
- Rotter, J.M. (1987). *The buckling and plastic collapse of ring stiffeners at cone-cylinder junctions*. Proceedings, International Colloquium on Stability of Plate and Shell Structures, Ghent, Belgium, April 1987
- Rotter, J.M.. (1989). *Elastic Stability of Lap-Jointed Cylinders*. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 115, No. 3.
- Rotter, J.M.. (1990a). *Structural Design of Light-Gauge Silo Hoppers*. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 7.
- Rotter, J.M., Teng, J.G. (1990b). *A Study of Buckling in Column-Supported Cylinders*. Department of Civil Engineering, University of Edinburgh, U.K.
- Rotter, J.M.. (1996). *Patch Loads and their Use in Metal Silo Design*. Research Report R96-13, Department of Civil Engineering, University of Edinburgh, U.K.
- Rotter, J.M.. (2001). *Pressures, Stresses and Buckling in Metal Silos containing Eccentrically Discharging Solids*. Festschrift Richard Greiner. , Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.
- Teng, J.G. & Rotter, J.M. (1989). *Plastic Collapse of restrained Steel Silo Hoppers*. Journal of Constructional Steel Research, Vol. 14 (2).
- Teng, J.G. & Rotter, J.M. (1991a). *Collapse Behavior and Strength of Steel Silo Transition Junctions. Part I: Collapse Mechanics*. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 12.
- Teng, J.G. & Rotter, J.M. (1991b). *Collapse Behavior and Strength of Steel Silo Transition Junctions. Part II: Parametric Study*. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 12.
- Teng, J.G. & Rotter, J.M. (1992). *Recent Research on the Behaviour and Design of Steel Silo Hoppers and Transition Junctions*. Journal of Constructional Steel Research, Vol. 23.
- Teng, J.G. (1996). *The Effective Area Method For Collapse Strength Prediction of Complex Metal Shell Intersections*. Advances in Steel Structures - Volume II, Proceedings , International Conference on Structural Steelwork, Hong Kong, Dec. 1996.

Finite-Elemente-Programm

ABAQUS (1997). *Abaqus Theory Manual & Abaqus Users Manual*. Abaqus Version 5.8. Hibbit, Karlson & Sorensen Inc., Pawtucket, Rhode Island, USA.

Mathematik

Guggenberger, W (1995). *Analytische Berechnung der Fundamentallösungen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 4. Ordnung und Anwendung auf die Grundgleichungen der Semi-Membran-Theorie der Kreiszyinderschale*. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz (unveröffentlicht).

MATLAB (1997). *Matlab Users & Reference Manual*. Matlab Version 5.2, Math Works Inc., Natick, Massachusetts (USA).

Silolasten

Australien Standard AS 3774-1996 (1996). *Loads on Bulk Solids Containers*. Standards Association of Australia, Sydney.

DIN 1055 – Teil 6 (1987). *Lastannahmen für Bauten - Lasten in Silozellen*. Beuth-Verlag, Berlin

Eurocode 1 – Teil 4 (1997). *ENV 1991-4 — Eurocode 3: Basis of Design and Actions on Structures — Part 4: Actions in Silos and Tanks*. CEN, European Committee for Standardisation, Brüssel.

Hampe, E. (1991). *Silos. Band : Bauwerke*. Verlag für Bauwesen, Berlin.

Stahlbau Allgemein

AISC (1990). *Manual of Steel Construction - Load and Resistance Factor Design*. American Institute of Steel Construction.

Bleich, F. (1932). *Stahlhochbauten, ihre Theorie, Berechnung und bauliche Gestaltung*. Springer-Verlag, Berlin.

DIN 18800 – Teil 2 (1990). *Stahlbauten — Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabtragwerken*. Beuth-Verlag, Berlin

DIN 18800 – Teil 4 (1990). *Stahlbauten — Stabilitätsfälle, Schalenbeulen*. Beuth-Verlag, Berlin

Petersen, C. (1988). *Stahlbau*. Vieweg-Verlag

Tragfähigkeit und Tragverhalten von Stahlschalen

Diack, A. (1983). *Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck*. Bericht Nr. 3 (1983), Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

Derler, P. (1993). *Tragverhalten zylindrischer Behälter unter Windlast*. Dissertation, Technische Universität Graz.

Guggenberger, W. (1991). *Nichtlineares Beulverhalten von Kreiszyinderschalen unter lokaler Axialbelastung*. Dissertation, Technische Universität Graz.

- Guggenberger, W. (1992). *Nichtlineares Beulverhalten von Kreiszyinderschalen unter lokaler Axialbelastung*. Heft 6/ 1992, Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.
- Guggenberger, W. (1998). *Load Carrying Behaviour, Analysis and Design of Shell Structures*. Habilitation Thesis, Graz University of Technology
- Knödel, P. & Ummenhofer, T. (1998). *Ein einfaches Modell zum Stabilitätsnachweis zylindrischer Schalentragwerke auf Einzelstützen*. Stahlbau 67 (6), Ernst & Sohn Berlin.
- Lesitschnig, H. (1999). *Statik von zylindrischen Behältern aus Stahl*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz.
- Pircher, M. (1996). *Tragverhalten zylindrischer Schalenstrukturen aus Stahl unter Windbelastung*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz
- Wallner, S. (1993). *Baustatische Berechnung dünnwandiger zylindrischer Behälter*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz.
- Winkler, H. (2000). *Automatische Erstellung von Finite- Elemente Modellen für komplexe dünnwandige Silostrukturen aus Stahl*. Diplomarbeit, Technische Universität Graz.
- Yang, Y. (1996). *Zum Beulverhalten axialbelasteter Kreiszyinderschalen mit rotationsymmetrischen Diskontinuitäten in Geometrie, Last und Lagerung*. Dissertation, Technische Universität Graz.

Ergänzung der Literaturliste

Im folgenden erfolgt eine Auflistung von Literaturangaben, die vom Zweitbegutachter Prof. J.M. Rotter zur Verfügung gestellt wurde.

- Gaylord, E.H. and Gaylord, C.N. (1984). *Design of Steel Bins for Storage of Bulk Solids*. Prentice Hall, 1984.
- Trahair, N.S., Abel, A., Ansourian, P., Irvine, H.M. and Rotter, J.M. (1983). *Structural Design of Steel Bins for Bulk Solids*. Australian Institute of Steel Construction.
- Rotter, J.M. (1983). *Effective Cross-Sections of Ringbeams and Stiffeners for Bins*. Proc., International Conference on Bulk Materials Storage Handling and Transportation, Institution of Engineers, Australia, Newcastle, Aug., pp 329-334.
- Rotter, J.M. (1987a). *Membrane Theory of Shells for Bins and Silos*. Transactions of Mechanical Engineering, Institution of Engineers, Australia, Vol. ME12 No.3 September, pp 135-147.
- Rotter, J.M. (1987b). *Bending Theory of Shells for Bins and Silos*. Transactions of Mechanical Engineering, Institution of Engineers, Australia, Vol. ME12 No.3 September, pp 147-159.
- Ketchum, M.S. (1907). *Design of Walls, Bins and Grain Elevators*. 1st edition, McGraw-Hill, New York (2nd edn 1911, 3rd edn 1919).

- Pippard, A.J.S. and Baker, J.F. (1957). *The Analysis of Engineering Structures*. 3rd edn, Edward Arnold, London.
- Lambert, F.W. (1968). *The Theory and Practical Design of Bunkers*. Publication 32, British Constructional Steelwork Association, London.
- Wozniak, R.S. (1979). *Steel Tanks*. Structural Engineering Handbook, 2nd edn, Section 23, Eds. E.H. and C.N. Gaylord, McGraw-Hill.
- Barthelmes, W. (1977). *Ermittlung der Schnittkräfte in kreiszylindrischen Silos mit kegelförmigem Boden*. Bauingenieur, Vol. 52, pp 423-435.
- Fuchssteiner, W. and Olsen, O.W. (1979). *Ein Problem der Stahlblechsilos*. Bauingenieur, Vol. 54, pp 17-21.
- Bodarski, Z., Hotala, E. and Pasternak, H. (1982). *Zum Einfluss der Biegedrillsteifigkeit des Fussrings auf den Störungsbereich im Mantel von Metallsilos*. Bauingenieur, Vol 57, pp 423-427.
- Bodarski, Z., Hotala, E. and Pasternak, H. (1984). *Untersuchung des Spannungszustande im Mantel von Metallsilos*. Proc., 10th Internationaler Kongress über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Weimar, Sept 1984.
- Ignatenko, V.M. (1977). *Some Aspects of Structural Design and Detailing of Large Coal Bins*. Proc., AISC 2nd Conference on Steel Developments, May, pp 183-192.
- Ignatenko, V.M. (1978). *Failures of Structural Steel Bins and Critical Design Considerations*. Proc., Metal Structures Conf. 1978, 30 Nov-1 Dec., Inst. of Engrs, Aust., Perth. pp 1-5.
- Gorenc, B.E. (1985). *Design of supports for steel bins*. In Design of Steel Bins for the Storage of Bulk Solids, Ed. J.M. Rotter, Univ. Sydney, March 1985, pp 184-188.
- Kaups, T. and Lieb, J.M. (1985). *A Practical Guide for the Design of Quality Bulk Storage Bins and Silos*. In Design of Steel Bins for the Storage of Bulk Solids, Ed. J.M. Rotter, Univ. Sydney, March 1985, pp 205-220.
- Rotter, J.M. (1982). *Analysis of Ringbeams in Column-Supported Bins*. Eighth Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials, University of Newcastle, Aug.
- Rotter, J.M. (1983). *Ringbeams for Elevated Bins and Silos*. Proceedings, Metal Structures Conference, Institution of Engineers, Australia, Brisbane, May, pp 111-116.
- Jumikis, P.T. and Rotter, J.M. (1983). *Buckling of Simple Ringbeams for Bins and Tanks*. Proc., International Conference on Bulk Materials Storage, Handling and Transportation, Institution of Engineers Australia, Newcastle, Aug., pp 323-328.
- Rotter, J.M. (1984). *Elastic Behaviour of Isolated Column-Supported Ringbeams*. Journal of Constructional Steel Research, Vol 4, No. 4, 1984, pp 235-252.
- Rotter, J.M. (1986). *On the Significance of Switch Pressures at the Transition in Elevated Steel Bins*. Proc., Second International Conference on Bulk Materials Storage Handling and Transportation, Institution of Engineers, Australia, Wollongong, July 1986, pp 82-88.

- Sharma, U.C., Rotter, J.M. and Jumikis, P.T. (1987). *Shell Restraint to Ringbeam Buckling in Elevated Steel Silos*. First National Structural Engineering Conference, Melbourne, Institution of Engineers, Australia, August 1987, pp. 604-609.
- Teng, J.G. and Rotter, J.M. "Buckling of Restrained Monosymmetric Rings", *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, Vol. 114, EM10, October 1988, pp 1651-1671.
- Teng J.G. and Rotter, J.M. (1989). *Buckling of Rings in Column-Supported Bins and Tanks*. *Thin Walled Structures*, Vol. 7, Nos 3 and 4, 1989, pp 257-280.
- Teng, J.G. and Rotter, J.M. (1989). *The Strength of Silo Transition Rings and Hoppers*. *Transactions of Mechanical Engineering*, Institution of Engineers, Australia, Vol. ME14, No.3, 1989, pp 170-177.
- Teng, J.G. and Rotter, J.M. (1991). *Plastic Buckling of Rings at Steel Silo Transition Junctions*. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 19, No. 1, pp. 1-18.
- Teng, J.G. and Rotter, J.M. (1991). *The Strength of Welded Steel Silo Hoppers under Filling and Flow Pressures*. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 9, pp 2567-2583.
- Teng, J.G. and Rotter, J.M. (1992). *Linear Bifurcation of Column-Supported Perfect Cylinders: Support Modelling and Boundary Conditions*. *Thin-Walled Structures*, Vol. 14, No.3, pp 241-263.
- Teng, J.G. and Rotter, J.M. (1993). *Structural Consequences of Filling and Flow Pressures in Steel Hoppers*. *Transactions of Mechanical Engineering*, Special Edition on Bulk Materials Handling, Institution of Engineers, Australia, Vol. ME18, No.1, March 1993, pp 75-89.
- Teng, J.G. (1994). *Cone-cylinder intersection under internal pressure: axisymmetric failure*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 120, No. 9, Sept., pp. 1896-1912.
- Teng, J.G. (1995). *Cone-cylinder intersection under internal pressure: nonsymmetric buckling*. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 121, No. 12, Dec., pp. 1298-1305.
- Teng, J.G. (1995). *Internally pressurised cone-cylinder intersections: failure modes*. In *Structural Stability and Design*, Eds Kitipornchai, Hancock and Bradford, Balkema, Rotterdam, pp 365-371.
- Teng, J.G. (1996). *Buckling of thin shells: recent advances and trends*. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, No. 4 April, pp 263-274.
- Teng, J.G. (1996). *The effective area method for collapse strength prediction of complex metal shell intersections*. *Proc., International Conference on Advances in Steel Structures*, Hong Kong, 11-14 Dec 1996.
- Teng, J.G. (1996). *Elastic buckling of cone-cylinder intersection under localised circumferential compression*. *Engineering Structures*, Vol. 18, No. 1, pp 41-48.
- Teng, J.G. (1997). *Out-of-plane plastic buckling strength of annular plate ringbeams in steel silos*. *Proc., Int. Conf. on Carrying Capacity of Steel Shell Structures*, Brno, 1-3 October 1997, pp 78-84.
- Teng, J.G. (1998). *Plastic collapse behaviour and strength of cone-cylinder and cone-cone junctions*. *PVP-Vol. 360, Pressure Vessel and Piping Codes and Standards - 1998*, American Society of Mechanical Engineers, pp 391-400.

Teng, J.G. (1997). *Plastic buckling approximations for transition ringbeams in steel silos*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 123, No. 12, Dec, pp. 1822-1930.

Teng, J.G. and Chan, F. (1997). *Elastic buckling strength of T-section ringbeams clamped at the inner edge*. Proc., Int. Conf. on Carrying Capacity of Steel Shell Structures, Brno, 1-3 October 1997, pp 71-77.

Teng J.G. and Chan, F. (1999). *Buckling strength of T-section ringbeams in steel silos*. Proc., International Conference on Structural Steelwork, ICASS'99, Vol. 2, Hong Kong, December 1999, pp. 655-662.

Teng, J.G. and Lucas, R.M. (1994). *Out-of-plane buckling of restrained thin rings of general open section*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 120, No. 5, May, pp. 929-947.

Lebenslauf von Siegfried Wallner

Geboren:	am 24. Feber 1968 in Lienz/Osttirol Eltern Elisabeth und Siegfried Wallner, ein Zwillingbruder Dietmar
Wohnadresse:	A – 8045 Graz, Am Arlandgrund 9/6
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Familienstand:	Lebensgemeinschaft mit Dr. Juliane Hainig, Tochter Sophie
Schulausbildung:	1974 – 1978 Volksschule in Winklern im Mölltal 1978 – 1982 Unterstufe des Bundesrealgymnasiums in Lienz/Osttirol 1982 – 1987 Höhere Technische Lehranstalt für Bautechnik in Villach Abschluß mit Reifeprüfung
Universitäre Ausbildung:	1987 - 1993 Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Universität Graz 2002 Promotion zum Doktor der technischen Wissenschaften an der Technischen Universität Graz
Berufliche Laufbahn:	1994 - 2000 Beschäftigung als Forschungs– bzw. Universitätsassistent am Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke der TU Graz seit 2001 beschäftigt im Ingenieurbüro Platzer in Graz

Schriftenreihe des Institutes für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke der TU Graz

- Heft 1 – 1980:** Greiner, R., Ingenieurmäßige Berechnung dünnwandiger Kreiszylinderschalen, April 1980, 129 Seiten.
- Heft 2 – 1980:** Pischl, R., Holzbau – mit kritischen Betrachtungen und neuen Vorschlägen zur Berechnung nach Theorie 1. und 2. Ordnung, Mai 1980, 86 Seiten.
- Heft 3 – 1983:** Stoiser, H., Greiner, R., Koller, S., Pischl, R., Sonderprobleme des konstruktiven Ingenieurbaus – Zum 60. Geburtstag von Prof. Fritz Resinger, April 1983, 219 Seiten.
- Heft 4 – 1985:** Resinger, F., Randl, E., Pischl, R., Greiner, R., Guggenberger, W., Einige Beiträge zum heutigen Ingenieurbau – Konrad Sattler zum 80. Geburtstag, 1985, 220 Seiten.
- Heft 5 – 1989:** Pischl, R., Eurocodes für Bauwerke: Das neue Sicherheitskonzept und die österreichische Holzbaunormung, April 1989, 63 Seiten.
- Heft 6 – 1992:** Guggenberger W., Nichtlineares Beulverhalten von Kreiszylinderschalen unter lokaler Axialbelastung, 1992, 540 Seiten.
- Heft 7 – 1996:** Unterweger H., Berücksichtigung der Betriebsbeanspruchung beim Ermüdungsnachweis von stählernen Eisenbahnbrücken, 1996.
- Heft 8 – 1997:** Schickhofer G., Koller S., Vielfalt des Ingenieurholzbaus in Forschung und Praxis, 1997, ca. 300 Seiten.
- Heft 9 – 1997:** Ofner R., Traglasten von Stäben aus Stahl bei Druck und Biegung, 1997, xxx Seiten.
- Heft 10–2000:** Salzgeber G., Nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabtragwerken aus Stahl, 2000, 246 Seiten.
- Heft 11–2001:** Bogensperger T., Erweiterte Stabtheorie und der gevoutete Träger im Brückenbau, 2001, 292 Seiten.
- Heft 12–2004:** Kaim P., Spatial buckling behaviour of steel members under bending and compression, Mai 2004, 257 Seiten.
- F–5–13/2005:** Wallner, S., Modellbildung und plastische Tragfähigkeit diskret gelagerter Stahlsilokonstruktionen mit Auflagerlängssteifen, 2004, 682 Seiten.
- F–5–14/2005:** Greiner R., Hörmeier I., Ofner R., Kettler M., Buckling Behaviour of Stainless Steel Members under Bending and Axial Compression, Extended Diploma Thesis, Graz University of Technology, 99 Seiten.

Hefte No. 1 – 5 wurden von Prof. Dr. Fritz Resinger herausgegeben, Hefte No. 6 – 14 wurden von Prof. Dr. Richard Greiner herausgegeben. Bei Heften No. 6, 7 und 9 – 13 handelt es sich um (meist korrigierte und leicht modifizierte) Nachdrucke von Doktorarbeiten, welche in dieser Zeit am Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke entstanden sind.

Seit 1. Oktober 2004 ist das Institut in zwei Institute aufgeteilt, nämlich in das Institut für Stahlbau und Flächentragwerke (Prof. Dr. Richard Greiner) und das Institut für Holzbau und Holztechnologie (Prof. Dr. Gerhard Schickhofer), wobei letzteres am neuerrichteten Bautechnik-Zentrum (BTZ) der TU Graz angesiedelt ist.

Diese Schriftenreihe endet mit Heft No. 12, findet jedoch ihre Fortsetzung in geänderter Gestaltung innerhalb der neugegründeten Schriftenreihe des Fachbereiches "Ingenieurbaukunst" (IBK), vormals "Konstruktiver Ingenieurbau", der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften an der Technischen Universität Graz, in den sich das Institut für Stahlbau und Flächentragwerke eingliedert.

Dies ist eine Veröffentlichung des

FACHBEREICHS INGENIEURBAUKUNST (IBK) AN DER TU GRAZ

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst umfasst die dem konstruktiven Ingenieurbau nahe stehenden Institute für Baustatik, Betonbau, Stahlbau & Flächentragwerke, Holzbau & Holztechnologie, Materialprüfung & Baustofftechnologie, Baubetrieb & Bauwirtschaft, Hochbau & Industriebau, Bauinformatik und Allgemeine Mechanik der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften an der Technischen Universität Graz.

Dem Fachbereich Ingenieurbaukunst ist das Bautechnikzentrum (BTZ) zugeordnet, welches als gemeinsame hochmoderne Laboreinrichtung zur Durchführung der experimentellen Forschung aller beteiligten Institute dient. Es umfasst die drei Laboreinheiten für konstruktiven Ingenieurbau, für Bauphysik und für Baustofftechnologie.

Der Fachbereich Ingenieurbaukunst kooperiert im gemeinsamen Forschungsschwerpunkt „Advanced Construction Technology“. Dieser Forschungsschwerpunkt umfasst sowohl Grundlagen – als auch praxisorientierte Forschungs- und Entwicklungsprogramme.

Weitere Forschungs- und Entwicklungskooperationen bestehen mit anderen Instituten der Fakultät, insbesondere mit der Gruppe Geotechnik, sowie nationalen und internationalen Partnern aus Wissenschaft und Wirtschaft.

Die Lehrinhalte des Fachbereichs Ingenieurbaukunst sind aufeinander abgestimmt. Aus gemeinsam betreuten Projektarbeiten und gemeinsamen Prüfungen innerhalb der Fachmodule können alle Beteiligten einen optimalen Nutzen ziehen.

Durch den gemeinsamen, einheitlichen Auftritt in der Öffentlichkeit präsentiert sich der Fachbereich Ingenieurbaukunst als moderne Lehr- und Forschungsgemeinschaft, welche die Ziele und Visionen der TU Graz umsetzt.

Nummerierungssystematik der Schriftenreihe:

D – Diplomarbeiten/Dissertationen | F – Forschungsberichte
S – Skripten, Vorlesungsunterlagen | V – Vorträge, Tagungen

Institutskenzahl:

1 – Allgemeine Mechanik | 2 – Baustatik | 3 – Betonbau
4 – Holzbau & Holztechnologie | 5 – Stahlbau & Flächentragwerke
6 – Materialprüfung & Baustofftechnologie | 7 – Baubetrieb & Bauwirtschaft
8 – Hochbau & Industriebau | 9 – Bauinformatik
10 – Labor für Konstruktiven Ingenieurbau

Fortlaufende Nummer pro Reihe und Institut / Jahreszahl

ISBN 978-3-85125-597-3